

С. Г. Афанасьев

Математическая модель плоскорадиальной нестационарной фильтрации совершенной жидкости к вертикальной скважине

В статье рассматривается возможность перехода от математической модели плоскопараллельной фильтрации нестационарного притока совершенного флюида к вертикальной скважине к плоскорадиальной модели нестационарной фильтрации совершенного флюида к вертикальной скважине. Обуславливаются правила замены переменной при переходе от одной модели фильтрации к другой.

Ключевые слова: плоскопараллельная фильтрация, плоскорадиальная фильтрация, плоскопараллельное течение, плоскорадиальное течение, математическая модель нестационарного плоскорадиального течения, дифференциальное уравнение параболического типа, уравнение теплопроводности.

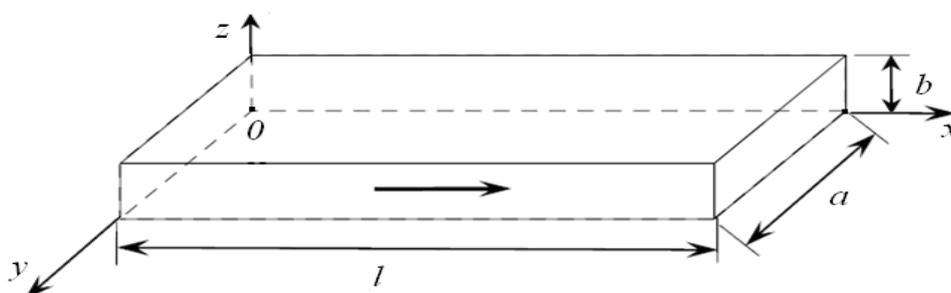
S. G. Afanasiev

A Mathematical Model of Flat-Radial Unsteady Filtration of a Perfect Liquid to a Vertical Well

The possibility to transfer mathematical models of flat-line filtration of the unsteady flow of a perfect fluid into a vertical well in the radial plane. Are set rules for the replacement of the variable in the transition from one model to the next filtering model.

Keywords: flat flow filtration, flat radial filtration, a plane parallel flow, a plane radial flow, a mathematical model of the unsteady plane radial flow, a differential equation of the parabolic type.

Задачи интерпретации данных неустановившейся фильтрации нефти или газа в пластах требуются при обработке КВД (кривая восстановления давления), КПД (кривая падения давления), полученных в ходе эксплуатации скважин. Для обработки данных ГДИ скважины широко применяются плоскорадиальные модели притока флюида к скважине.



Плоскопараллельный поток

Рис. 1. Плоскопараллельная стационарная фильтрация флюида

Распределение давления в пласте при плоскопараллельной стационарной фильтрации флюида носит линейный характер.

Из уравнения неразрывности и закона фильтрации Дарси [2, с. 411]:

$$\frac{d^2 p(x)}{dx^2} = 0 \quad (1)$$

Интегрируя уравнение (1) $\Rightarrow \frac{dp(x)}{dx} = C_1 \Rightarrow dp(x) = C_1 \cdot dx \Rightarrow$

$$\int dp(x) = C_1 \cdot \int dx$$

$$p(x) = C_1 x + C_2, \tag{2}$$

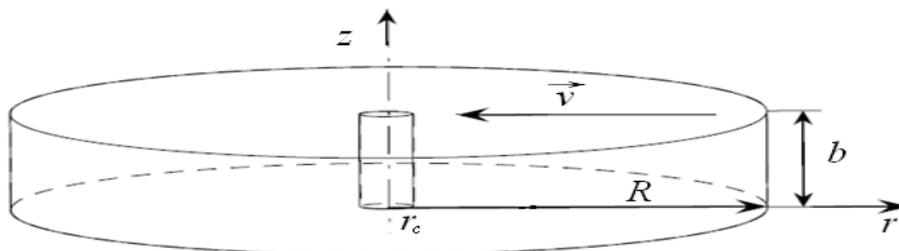
где C_1, C_2 – константы, вычисляются из граничных условий:

$$p(0) = C_2 = p_n$$

$$p(l) = C_1 l + C_2 = p_c \tag{3}$$

где p_n – давление контура питания, p_c – забойное давление.

$$p(x) = \frac{p_n - p_c}{l} \cdot x + p_c \tag{4}$$



Плоскорадийальный поток

Рис. 2. Плоскорадийальная стационарная фильтрация флюида

R – радиус контура питания пласта;

r_c – радиус скважины;

p_n – давление контура питания;

p_c – забойное давление.

$$R \gg r_c, p_n > p_c$$

Уравнение неразрывности в случае установившегося движения флюида [2, с. 416]:

$$\Delta p(x, y, z) = 0, \tag{5}$$

Переходя к цилиндрической системе координат:

$$\Delta p = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0. \tag{6}$$

Рассматривая только радиальное движение флюида:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{dp(r)}{dr} \right) = 0. \tag{7}$$

Интегрируя уравнение (7) $\Rightarrow r \frac{dp(r)}{dr} = C_1 \Rightarrow dp(r) = C_1 \cdot \frac{dr}{r} \Rightarrow$

$$\int dp(r) = C_1 \cdot \int \frac{dr}{r} \Rightarrow p(r) = C_1 \ln(r) + C_2 \tag{8}$$

$$\int_{p_c}^{p_n} dp(r) = C_1 \cdot \int_{r_c}^R \frac{dr}{r} \Rightarrow p_n - p_c = C_1 \cdot \ln \frac{R}{r_c} \Rightarrow C_1 = \frac{p_n - p_c}{\ln \frac{R}{r_c}} \Rightarrow$$

$$\int_{p_c}^{p(r)} dp(r) = C_1 \cdot \int_{r_c}^r \frac{dr}{r} \Rightarrow \int_{p_c}^{p(r)} dp(r) = \frac{p_n - p_c}{\ln \frac{R}{r_c}} \cdot \int_{r_c}^r \frac{dr}{r} \Rightarrow p(r) - p_c = \frac{p_n - p_c}{\ln \frac{R}{r_c}} \cdot \ln \frac{r}{r_c} \Rightarrow$$

$$p(r) = \frac{P_n - P_c}{\ln \frac{R}{r_c}} \cdot \ln \frac{r}{r_c} + p_c. \quad (9)$$

Математическая модель нестационарного плоскопараллельного притока идеального флюида по закону Дарси к совершенной вертикальной скважине для однородной призабойной зоны пласта описывается уравнением [2, с. 481]:

$$\frac{\partial^2 \Phi(x, t)}{\partial x^2} = \xi^2 \cdot \frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial t}, \quad (10)$$

где $\xi^2 = m \cdot \frac{\mu}{k}$, k – проницаемость среды, m – пористость среды, μ – вязкость флюида.

Уравнение (10) – это дифференциальное уравнение в частных производных параболического типа, так называемое уравнение теплопроводности.

Решение уравнения (10) хорошо известно [1, с. 151]:

$$\Phi(x, t) = (C_1 \cdot \cos(\lambda x) + C_2 \cdot \sin(\lambda x)) \cdot e^{-t \left(\frac{\lambda}{\xi}\right)^2}. \quad (11)$$

При сравнении формул (4) и (9)

$$p(x) = \frac{P_n - P_c}{l} \cdot x + p_c$$

$$p(r) = \frac{P_n - P_c}{\ln \frac{R}{r_c}} \cdot \ln \frac{r}{r_c} + p_c$$

видно, что переменная x в формуле (4) для плоскопараллельного потока заменяется на переменную r в формуле (9) для плоскорadiaльного потока по правилу:

$$x \Leftrightarrow \ln \frac{r}{r_c} \quad (12)$$

$$l \Leftrightarrow \ln \frac{R}{r_c}. \quad (13)$$

Математическая модель нестационарного плоскорadiaльного притока флюида по закону Дарси к совершенной вертикальной скважине для однородной призабойной зоны пласта, применяя правило (12), запишется:

$$x = \ln \frac{r}{r_c} \Rightarrow dx = d \left(\ln \frac{r}{r_c} \right) = \frac{1}{r} \cdot dr \Rightarrow \frac{dr}{dx} = r \quad (14)$$

$$\frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial \Phi(r, t)}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial \Phi(r, t)}{\partial r} \cdot r \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi(x, t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi(r, t)}{\partial r} \cdot r \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \Phi(r, t)}{\partial r} \cdot r \right) \frac{\partial r}{\partial x} = \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \Phi(r, t)}{\partial r} \cdot r \right) \cdot r = r^2 \cdot \frac{\partial^2 \Phi(r, t)}{\partial r^2} + r \cdot \frac{\partial \Phi(r, t)}{\partial r} \end{aligned} \quad (16)$$

$$r^2 \cdot \frac{\partial^2 \Phi(r, t)}{\partial r^2} + r \cdot \frac{\partial \Phi(r, t)}{\partial r} = \xi^2 \cdot \frac{\partial \Phi(r, t)}{\partial t} \quad (17)$$

Уравнение (17) представляет собой дифференциальное уравнение в частных производных, полученное для круговой области, в которой осуществляется радиальное движение флюида.

Разделяя переменные, получаем систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \xi^2 \cdot \frac{\partial \psi(t)}{\partial t} = -\lambda^2 \cdot \psi(t) \\ r^2 \cdot \frac{\partial^2 \varphi(r)}{\partial r^2} + r \cdot \frac{\partial \varphi(r)}{\partial r} = -\lambda^2 \cdot \varphi(r) \end{cases} \quad (18)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi(r)}{\partial r} = -\lambda^2 \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \varphi(r) \quad (19)$$

Решением последнего дифференциального уравнения является функция:

$$\varphi(r) = C_1 \cdot \sin(\lambda \cdot \ln(r)) + C_2 \cdot \cos(\lambda \cdot \ln(r)) \quad (20)$$

Делая проверку:

$$\varphi_r = C_1 \cdot \frac{\lambda}{r} \cdot \cos(\lambda \cdot \ln(r)) - C_2 \cdot \frac{\lambda}{r} \cdot \sin(\lambda \cdot \ln(r)) \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{rr} = & -C_1 \cdot \frac{\lambda^2}{r^2} \cdot \sin(\lambda \cdot \ln(r)) - C_2 \cdot \frac{\lambda^2}{r^2} \cdot \cos(\lambda \cdot \ln(r)) - \\ & - C_1 \cdot \frac{\lambda}{r^2} \cdot \cos(\lambda \cdot \ln(r)) + C_2 \cdot \frac{\lambda}{r^2} \cdot \sin(\lambda \cdot \ln(r)) \end{aligned} \quad (22)$$

подставляя (21) и (22) в дифференциальное уравнение (19), убеждаемся в верности равенства.

Также решением (17) будет функция

$$\varphi(r) = C_1 \cdot \sin\left(\lambda \cdot \ln\left(\frac{r}{r_c}\right)\right) + C_2 \cdot \cos\left(\lambda \cdot \ln\left(\frac{r}{r_c}\right)\right) \quad (23)$$

Решение уравнения (17) в общем виде запишется:

$$\Phi(r, t) = \left(C_1 \cdot \sin\left(\lambda \cdot \ln\left(\frac{r}{r_c}\right)\right) + C_2 \cdot \cos\left(\lambda \cdot \ln\left(\frac{r}{r_c}\right)\right) \right) \cdot e^{-t \cdot \left(\frac{\lambda}{\xi}\right)^2} \quad (24)$$

Коэффициенты вычисляются из начально-краевых условий.

Для выбора единственного решения уравнения (17) необходимо указать начальные и граничные условия.

Начальное условие состоит в задании значений функции $\Phi(r, t)$ в начальный момент времени $t_0=0$

$$\Phi(r, 0) = \chi(r) \quad (25)$$

Конечные условия могут быть различны в зависимости от режима давления на границах.

Граничные условия включают в себя два момента:

1-й – форма границы (здесь это круговая область, в центре которой скважина);

2-й – числовые значения параметра на границе, характеризующие градиент параметра (здесь это давление).

Рассмотрим задачу плоскорадиальной фильтрации флюида с заданной функцией давления на забое и контуре питания.

Пусть имеется плоскорадиальный пласт с флюидом, непроницаемым для окружающей породы, в центре которого сделана скважина радиуса r_c . На контуре питания радиуса R и в скважине поддерживается некоторое определенное давление, постоянное или меняющееся по некоторому закону.

Если известно начальное радиальное распределение давления в пласте, то для того, чтобы установить закон распределения давления $\Phi(r, t)$ в любой точке пласта и в любой момент времени, необходимо решить дифференциальное уравнение (17)

$$r^2 \cdot \Phi_{rr}(r, t) + r \cdot \Phi_r(r, t) = \xi^2 \cdot \Phi_t(r, t),$$

при начальном условии

$$\Phi(r,0) = \chi(r), \quad (26)$$

и при граничных условиях

$$\Phi(r_c, t) = \alpha(t), \quad \Phi(R, t) = \beta(t), \quad (27)$$

где $\alpha(t)$, $\beta(t)$ – законы изменения давления на забое и контуре питания соответственно.

Проще решать задачу для фильтрации флюида в плоскопараллельном пласте, а затем, используя правила (12) и (13), перейти в решении для случая плоскорадиальной фильтрации флюида.

В плоскопараллельном пласте на контуре питания и галерее поддерживается некоторое определенное давление P_c и $P_{пл}$, соответственно, постоянное или меняющаяся по некоторому закону. Контур питания от галереи расположен на расстоянии l .

Если известно начальное распределение давления в пласте, то для того, чтобы установить закон распределения его $\Phi(x, t)$ в любой точке пласта и в любой момент времени, надо решить дифференциальное уравнение (10)

$$\Phi_{xx}(x, t) = \xi^2 \cdot \Phi(x, t),$$

при начальном условии

$$\Phi(x, 0) = \varphi(x), \quad (28)$$

и при граничных условиях

$$\Phi(0, t) = \alpha(t), \quad \Phi(x, t) = \beta(t), \quad (29)$$

где $\alpha(t)$, $\beta(t)$ – законы изменения давления на галерее и контуре питания соответственно.

Для того, чтобы найти решение уравнения (10) при начальном условии (28) и граничном условии (29), необходимо сделать замену переменных с таким расчетом, чтобы новая неизвестная функция удовлетворяла однородным граничным условиям

$$V(0, t) \equiv 0, \quad V(l, t) \equiv 0. \quad (30)$$

Для этого вводится функция $V(x, t)$, связанная с переменной функцией $\Phi(x, t)$ соотношением

$$V(x, t) \equiv \Phi(x, t) - U(x, t), \quad (31)$$

где $U(x, t)$ – любая по возможности более простая функция, удовлетворяющая граничным условиям (29), такая что

$$V(0, t) \equiv \Phi(0, t) - U(0, t) = \alpha(t) - \alpha(t) \equiv 0, \quad V(l, t) \equiv \Phi(l, t) - U(l, t) = \beta(t) - \beta(t) \equiv 0 \quad (32)$$

В качестве $U(x, t)$ можно выбрать функцию, линейную относительно x

$$U(x, t) = \alpha(t) + \frac{\beta(t) - \alpha(t)}{l} \cdot x. \quad (33)$$

Если функция $U(x, t)$ выбрана таким образом, то функция $V(x, t)$ удовлетворяет нулевым граничным условиям (32).

Тогда функция $V(x, t)$ удовлетворяет однородным граничным условиям:

$$V(0, t) = 0, \quad V(l, t) = 0, \quad (34)$$

и начальному условию

$$V(x, 0) = \Phi(x, 0) - U(x, 0) = \varphi(x) - \alpha(0) - \frac{\beta(0) - \alpha(0)}{l} \cdot x, \quad (35)$$

и дифференциальному уравнению

$$\xi^2 \cdot (V(x, t) + U(x, t)) = V_{xx}(x, t). \quad (36)$$

Итак, пусть плоскопараллельный пласт – это галерея длиной l ;

A – давление, поддерживаемое на галерее, $x=0$;

B – давление, поддерживаемое на контуре питания, $x=l$.

$$\left. \begin{aligned} \Phi(0,t) &= A \\ \Phi(l,t) &= B \end{aligned} \right\} - \text{границные условия.} \quad (37)$$

Начальное распределение давления в пласте задается функцией $\varphi(x)$, то есть формулой (28)

$$\Phi(x,0) = \varphi(x).$$

Задача состоит в отыскании закона распределения давления $\Phi(x,t)$ в любой момент времени в предположении, что внутри пласта происходит фильтрация по закону Дарси

$$\Phi_{xx}(x,t) = \xi^2 \cdot \Phi_t(x,t).$$

Делая замену переменных

$$V(x,t) = V_{xx}(x,t) - \left(A + \frac{B-A}{l} \cdot x \right) \quad (38)$$

Функция $V(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$V_{xx}(x,t) = \xi^2 V_t(x,t), \quad (39)$$

начальному условию

$$V(x,t) = \Phi(x,0) - \left(A + \frac{B-A}{l} \cdot x \right) = \varphi(x) - \left(A + \frac{B-A}{l} \cdot x \right) \quad (40)$$

и однородным граничным условиям

$$V(0,t) = 0, \quad V(l,t) = 0. \quad (41)$$

Применяя метод Фурье, функция $V(x,t)$ записывается в виде суммы следующего ряда

$$V(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(C_k \cdot e^{-\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 t} \cdot \sin\left(\frac{\pi k x}{l}\right) \right) \quad (42)$$

где C_k – коэффициенты, вычисляющиеся по формуле

$$C_k = \frac{2}{l} \int_0^l \left(\varphi(x) - \left(A + \frac{B-A}{l} \cdot x \right) \right) \cdot \sin\left(\frac{\pi k x}{l}\right) dx, \quad (43)$$

откуда

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{2}{l} \int_0^l \left(\varphi(x) - \left(A + \frac{B-A}{l} \cdot x \right) \right) \cdot \sin\left(\frac{\pi k x}{l}\right) dx = \\ &= \frac{2}{l} \left(\int_0^l \varphi(x) \cdot \sin\left(\frac{\pi k x}{l}\right) dx - A \int_0^l \sin\left(\frac{\pi k x}{l}\right) dx - \frac{B-A}{l} \int_0^l x \sin\left(\frac{\pi k x}{l}\right) dx \right) = \\ &= \frac{2}{l} \left(\int_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{\pi k x}{l}\right) dx + \frac{Al}{\pi k} ((-1)^k - 1) - \frac{B-A}{l} \cdot \frac{l^2}{k\pi} (-1)^{k+1} \right) = \\ &= \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{\pi k x}{l}\right) dx + \frac{2A}{\pi k} (-1)^k - \frac{2A}{\pi k} - \frac{2B}{\pi k} (-1)^{k+1} + \frac{2A}{\pi k} (-1)^{k+1} = \\ &= \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{\pi k x}{l}\right) dx - \frac{2}{\pi k} (A + B(-1)^{k+1}). \end{aligned}$$

$$C_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin\left(\pi \frac{kx}{l}\right) dx - \frac{2}{\pi k} (A + (-1)^{k+1} B) \quad (44)$$

С учетом замены переменной (33) искомое распределение давления внутри пласта запишется в следующем виде

$$\varphi(x,t) = V(x,t) + \left(A + \frac{B-A}{l} \cdot x \right) = A + \frac{B-A}{l} \cdot x + \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-\frac{\pi^2 k^2}{\xi^2 l^2} t} \cdot \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right) \quad (45)$$

Заметим, что при $t \rightarrow \infty \Rightarrow \varphi \rightarrow \left(A + \frac{B-A}{l} x \right)$, что эквивалентно выражению

$$p(x) = \frac{P_n - P_c}{l} \cdot x + p_c, \text{ говорящему, что скважина вышла на стационарный режим работы.}$$

Возвращаясь к плоскорадиальной модели фильтрации, получается, что:

- контур питания скважины удален на расстояние R ;
- Φ_c – давление, поддерживаемое на скважине;
- Φ_{nl} – давление, поддерживаемое на контуре питания.

$$\left. \begin{aligned} \Phi(r_c, t) &= \Phi_c \\ \Phi(R, t) &= \Phi_{nl} \end{aligned} \right\} - \text{граничные условия.} \quad (46)$$

С учетом замены переменной по правилу (12) и (13) искомое радиальное распределение давления в плоскорадиальном пласте запишется в следующем виде

$$C_k = \frac{2}{\ln \frac{R}{r_c}} \int_{r_c}^R \chi(r) \cdot \frac{1}{r} \cdot \sin\left(\frac{\pi k}{\ln \frac{R}{r_c}} \cdot \ln \frac{r}{r_c}\right) dr - \frac{2}{\pi k} (\Phi_c + (-1)^{k+1} \Phi_{nl}), \quad (47)$$

где $\chi(r)$ – начальное распределение давления в пласте,

$$\Phi(r,t) = \left(\Phi_c + \frac{\Phi_{nl} - \Phi_c}{\ln \frac{R}{r_c}} \cdot \ln \frac{r}{r_c} \right) + V(r,t) \quad (48)$$

$$\Phi(r,t) = \Phi_c + \frac{\Phi_{nl} - \Phi_c}{\ln \frac{R}{r_c}} \cdot \ln \frac{r}{r_c} + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \sin\left(\frac{\pi k}{\ln \frac{R}{r_c}} \cdot \ln \frac{r}{r_c}\right) \cdot e^{-\frac{\pi^2 k^2}{\xi^2 \left(\ln \frac{R}{r_c}\right)^2} t} \quad (49)$$

Если $\chi(r) = \Phi_0 = const$, тогда (49) переписывается:

$$\Phi(r,t) = \Phi_c + \frac{\Phi_{nl} - \Phi_c}{\ln \frac{R}{r_c}} \cdot \ln \frac{r}{r_c} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\Phi_0 - \Phi_c + (\Phi_0 - \Phi_{nl}) \cdot (-1)^{n+1}) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{\ln \frac{R}{r_c}} \cdot \ln \frac{r}{r_c}\right) \cdot e^{-\frac{\pi^2 n^2}{\xi^2 \left(\ln \frac{R}{r_c}\right)^2} t} \quad (50)$$

Заметим, что при $t \rightarrow \infty \Rightarrow \Phi \rightarrow \left(\Phi_c + \frac{\Phi_{nl} - \Phi_c}{\ln \frac{R}{r_c}} \cdot \ln \frac{r}{r_c} \right)$, что эквивалентно выражению

$$p(r) = \frac{P_n - P_c}{\ln \frac{R}{r_c}} \cdot \ln \frac{r}{r_c} + p_c, \text{ говорящему, что скважина вышла на стационарный режим работы.}$$

Используя реальные физические величины, выполним построение графиков функции (50) в математической оболочке *Maple*.

Забойное давление $\Phi_c=21 \cdot 10^6$ МПа, пластовое давление $\Phi_{пл}=25 \cdot 10^6$ МПа, начальное распределение давления в пласте $\Phi_0=25 \cdot 10^6$ МПа, радиус пласта $R=250$ м, радиус скважины $r_c=0,1$ м, проницаемость $k=1,2 \cdot 10^{-12}$ м², пористость $m=0,2$, вязкость флюида $\mu=0,015$ МПа·с.

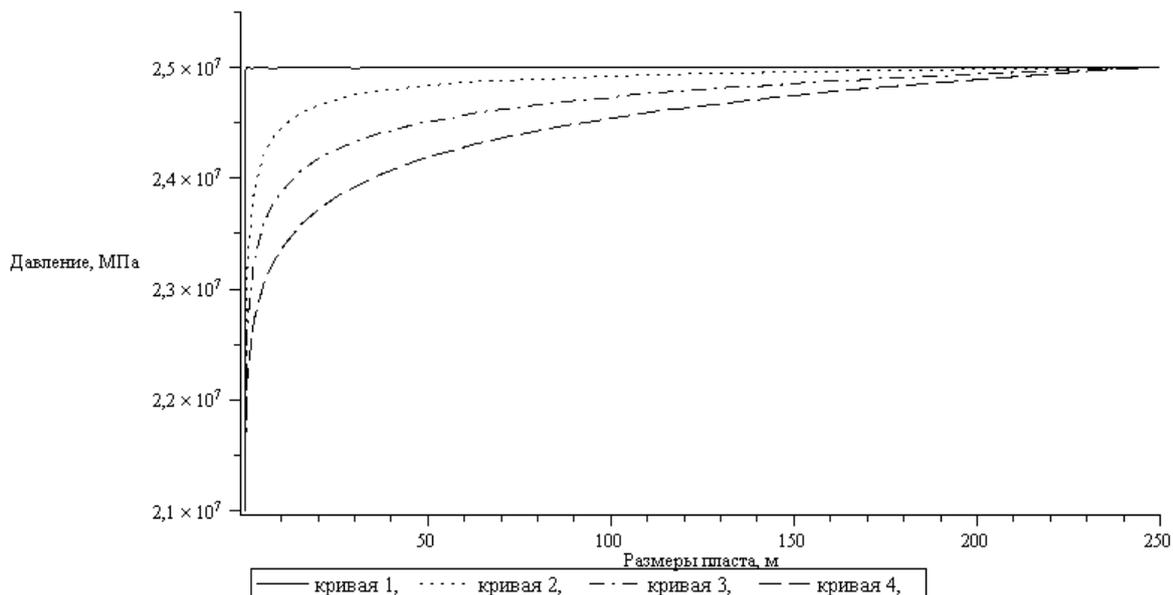


Рис. 3

кривая 1 – радиальное распределение давления в пласте в начальный момент времени t_0 ;

кривая 4 – радиальное распределение давления в пласте, стационарный режим работы, начиная с некоторого момента времени t_3 ;

кривая 2, 3 – радиальное распределение давления в пласте в некоторые промежуточные моменты времени t_1, t_2 , причем $t_0 < t_1 < t_2 < t_3$.

Библиографический список

1. Араманович, И. Г., Левин, В. И. Уравнения математической физики [Текст] / И. Г. Араманович, В. И. Левин. – М. : Наука, 1969.
2. Басниев, К. С. Нефтегазовая гидромеханика [Текст] / К. С. Басниев, Н. М. Дмитриев, Г. Д. Розенберг // Нефтегазовая гидромеханика : учебное пособие для вузов. – М. : Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2005. – 544 с.
3. Фихтенгольц, Г. М. Основы математического анализа [Текст] / Г. М. Фихтенгольц. – М. : Наука, 1968.

Bibliograficheskij spisok

1. Aramanovich, I. G., Levin, V. I. Uravnenija matematicheskoy fiziki [Tekst] / I. G. Aramanovich, V. I. Levin. – М. : Nauka, 1969.
2. Basniev, K. S. Neftegazovaja gidromehanika [Tekst] / K. S. Basniev, N. M. Dmitriev, G. D. Rozenberg // Neftegazovaja gidromehanika : uchebnoe posobie dlja vuzov. – М. : Izhevsk, Institut komp'juternyh issledova-nij, 2005. – 544 s.
3. Fih tengol'c, G. M. Osnovy matematicheskogo analiza [Tekst] / G. M. Fih tengol'c. – М. : Nauka, 1968.