УДК 521.1

**А. В. Бородин**

## Метод спектрального барисинтеза и вложение n-мерного диффеоморфизма в векторное поле

В работе методами барианализа, разработанного автором, осуществляется глобальное вложение *n*-мерного спектрально разложимого диффеоморфизма класса $C^3$ в векторное поле класса $C^1$ (построение дифференциального уравнения с заданной симметрией).

**Ключевые слова:** барианализ, спектральная бариалгебра, баридифференцируемость, диффеоморфизм, вложение, спектральный барисинтез, векторное поле, симметрия.

**A. V. Borodin**

## A Method of Spectral Barisynthesis and Inclusion of N-Dimensional Diffeomorphism in the Vector Field

In the work by means of the methods of barianalysis, developed by the author, global inclusion of n-dimensional spectrally decomposable diffeomorphism of the class $C^3$ into the vector field of the class $C^1$ (creation of the differential equation with the set symmetry) is carried out.

**Keywords:** barianalysis, spectral barialgenra, baridifferentiability, diffeomorphism, inclusion, spectral barisynthesis, a vector field, symmetry.

Данная работа является продолжением серии работ [2, 3, 4, 5], посвященных приложению барианализа к решению задач из разных разделов математического анализа. В частности, к решению задачи вложения *n*-мерного диффеоморфизма в векторное поле, решенную для 1-мерного диффеоморфизма класса $C^6$ в работе [7] и класса $C^3$ в работе [1]. Эта задача рассматривается в рамках метода спектрального барисинтеза, предложенного в работе [5] и примененного там к барисинтезу стационарных ДУ Шредингера.

Предполагая известными понятия и обозначения из барианализа на уровне работы [3], расширим их необходимым минимумом определений, обозначений и результатов из работ [1, 5].

1. Пусть $\mathbb{P}=\mathbb{C}$ (или $\mathbb{P}=\mathbb{R}$), $\langle\mathbb{P}\rangle_s^n$ – гиперболическая (*s*= « + ») или эллиптическая (*s*= « - ») спектральная бариалгебра над полем $\mathbb{P}$, элементами которой являются упорядоченные $(n+1)$-кичисел – бариэлементы (БЭЛ):

$$\langle x\rangle=\langle x_0;\bar{x}\rangle=\langle x_0;x_1,x_2,\ \ldots,\ x_n\rangle\in\langle\mathbb{P}\rangle_s^n\ \ \left(x_k\in\mathbb{P}(\langle 0\rangle)\right),$$

где $\mathbb{P}(\langle 0\rangle)$ – расширение поля $\mathbb{P}$ посредством нестандартных нуля $\langle 0\rangle$ и бесконечности $\langle\infty\rangle$ (подробнее в [5]). Относительно канонического унитарного барибазиса

$$\langle e\rangle_0=\langle 1;0,0,\ldots,0\rangle,\quad \langle e\rangle_k=\langle\langle 0\rangle;1,\ldots,1,\langle\infty\rangle,0,\ldots,0\rangle\quad (k=1,2,\ldots,n) \tag{1}$$

(где символ нестандартного нуля $\langle 0\rangle$ стоит на нулевом, а символ нестандартной бесконечности $\langle\infty\rangle=\langle 0\rangle^{-1}$ стоит на *k*-ом месте) любой БЭЛ представляется в канонической форме

$$\langle x\rangle=\left\langle x^0;x^1/x^0,x^2/x^1,\ldots,x^n/x^{n-1}\right\rangle=\sum_{k=0}^{n}x^k\langle e\rangle_k\,, \tag{2}$$

где *k*-ая барикоордината

© Бородин А. В., 2013

$$x^k = \mu^k\big(\langle x\rangle\big) \overset{def}{=} \prod_{j=0}^{k} x_j \in \mathbb{P}$$

– момент *k*-го порядка БЭЛ $\langle x\rangle$. При этом,

$$\langle x\rangle = \langle y\rangle \Leftrightarrow x^k = y^k \;\big(k = 0,1,\ldots,n\big);$$

БЭЛ $\langle e\rangle_0$ является единицей относительно эллиптического и гиперболического умножения БЭЛ.

Согласно спектральной теореме [5], наряду с каноническим барибазисом (1), на бариалгебре $\langle\mathbb{P}\rangle_{\pm}^{n}$ существует спектральный барибазис

$$\langle \varepsilon\rangle_k^{\pm} = \frac{1}{n+1}\big\langle 1; \varepsilon_k^{\pm}, \varepsilon_k^{\pm}, \ldots, \varepsilon_k^{\pm}\big\rangle \;\big(k = 0,1,\ldots,n\big), \tag{3}$$

где $\varepsilon_k^{-} = \exp\dfrac{(2k+1)\pi}{n+1} i$, $\varepsilon_k^{+} = \exp\dfrac{2k\pi}{n+1} i$. БЭЛ $\langle\varepsilon\rangle_k^{\pm}$ этого базиса являются эрмитовыми и обладают спектральными свойствами:

$$\langle\varepsilon\rangle_j^{\pm}\langle\varepsilon\rangle_k^{\pm} = \begin{cases}\langle\tilde{0}\rangle, & если\;\; j \neq k\\ \langle\varepsilon\rangle_k^{\pm}, & если\;\; j = k\end{cases}, \quad \sum_{k=0}^{n}\langle\varepsilon\rangle_k^{\pm} = \langle e\rangle.$$

Для каждого $\langle x\rangle \in \langle\mathbb{P}\rangle_s^n$ имеет место спектральное разложение

$$\langle x\rangle = \sum_{k=0}^{n} x_{\pm}^{k}\,\langle\varepsilon\rangle_k^{\pm}, \tag{4}$$

где спектральные барикоординаты (СБК)

$$x_{\pm}^{k} = \lambda_k^{\pm}\big(\langle x\rangle\big) = (n+1)\,\big\langle\langle x\rangle, \langle\varepsilon\rangle_k^{\pm}\big\rangle = \sum_{j=0}^{n} x^j\,\big((\varepsilon_k^{\pm})^j\big)^{*} \;\;\big(k = 0,1,\ldots,n\big) \tag{5}$$

– собственные (спектральные) значения БЭЛ $\langle x\rangle$, отвечающие его собственным элементам (3) (общим для всех БЭ), то есть

$$\langle x\rangle\langle\varepsilon\rangle_k^{\pm} = x_{\pm}^{k}\,\langle\varepsilon\rangle_k^{\pm},$$

а число $\big\langle\langle x\rangle, \langle y\rangle\big\rangle \overset{def}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k (y^k)^{*}$ – барискалярное произведение БЭЛ $\langle x\rangle$ и $\langle y\rangle$.

При этом функционалы $\lambda_k^{\pm}\big(\langle x\rangle\big)$– гомоморфизмы из $\langle\mathbb{P}\rangle_{\pm}^{n}$ в $\mathbb{C}$. Поэтому любое отображение $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, определенное на спектре $\sigma\big(\langle x\rangle\big) = \big\{\lambda_k^{\pm}\big(\langle x\rangle\big)\big\}_{k=0}^{n}$ БЭЛ $\langle x\rangle \in \langle\mathbb{P}\rangle_{\pm}^{n}$, допускает продолжение до бариотображения $\langle f\rangle : \langle\mathbb{P}\rangle_{\pm}^{n} \to \langle\mathbb{P}\rangle_{\pm}^{n}$ по формуле

$$\langle y\rangle = \langle f\rangle\big(\langle x\rangle\big) \overset{def}{=} \sum_{k=0}^{n} f\Big(\lambda_k^{\pm}\big(\langle x\rangle\big)\Big)\langle\varepsilon\rangle_k^{\pm} = \sum_{k=0}^{n} f\big(x_{\pm}^{k}\big)\langle\varepsilon\rangle_k^{\pm}. \tag{6}$$

Теперь рассмотрим общее бариотображение (БОТ)

$$\langle f\rangle :\; \langle x\rangle \in \mathcal{D}\big(\langle f\rangle\big) \to \langle y\rangle = \langle f\rangle\big(\langle x\rangle\big) \in \langle\mathbb{P}\rangle_{\pm}^{n}$$

с областью определения $\mathcal{D} = \mathcal{D}\big(\langle f\rangle\big) \subseteq \langle\mathbb{P}\rangle_{\pm}^{n}$ (бариоткрытымбарисвязным множеством). В барикоординатной форме (относительно барибазиса (1)) оно будет записано так:

$$y^k = f^k\big(x\big) = f^k\big(x^0, x^1, \ldots, x^n\big)\,(k = 0,1,\ldots,n);$$

в бариспектральной форме (относительно барибазиса (3)) оно будет иметь следующий вид:

$$y_{\pm}^{k} = f_{\pm}^{k}\big(x_{\pm}\big) = f_{\pm}^{k}\big(x_{\pm}^{0}, x_{\pm}^{1}, \ldots, x_{\pm}^{n}\big)\,(k = 0,1,\ldots,n), \tag{7}$$

где

$$f_{\pm}^{k}(x_{\pm})=\lambda_{k}^{\pm}\left(\langle f\rangle(\langle x\rangle)\right)=(n+1)\left\langle\langle f\rangle(\langle x\rangle),\langle\varepsilon\rangle_{k}^{\pm}\right\rangle=\sum_{j=0}^{n}f^{j}(x)\left((\varepsilon_{k}^{\pm})^{j}\right)^{*},$$

$$x=\left(x^{0},x^{1},\ldots,x^{n}\right)\in\mathbb{P}^{n},\quad x_{\pm}=\left(x_{\pm}^{0},x_{\pm}^{1},\ldots,x_{\pm}^{n}\right)\in\mathbb{P}^{n}.$$

**Определение** 1. *Бариотображение* $\langle f\rangle:\mathcal{D}\to\langle\mathbb{P}\rangle_{\pm}^{n}$ *называется s-дифференцируемым в бариточке* $\langle x\rangle\in\mathcal{D}$, *если существует бариэлемент* $\langle a\rangle\in\langle\mathbb{P}\rangle_{\pm}^{n}$ *такой, что* $\left(\forall\ \Delta\langle x\rangle\in\langle\mathbb{P}\rangle_{\pm}^{n}:\langle x\rangle+\Delta\langle x\rangle\in\mathcal{D}\right)$:

$$\Delta\langle y\rangle=\Delta\langle f\rangle(\langle x\rangle)=\langle f\rangle(\langle x\rangle+\Delta\langle x\rangle)-\langle f\rangle(\langle x\rangle)=\left(\langle a\rangle\cdot\Delta\langle x\rangle\right)_{\pm}+o\left(\left\|\Delta\langle x\rangle\right\|\right)$$

*При этом БЭЛ* $\langle a\rangle$ *называется s-производной* (*гиперболической при s*=«+» *и эллиптической при s*=«–») *бариотображения* $\langle f\rangle$ *в бариточке* $\langle x\rangle\in\mathcal{D}$ *и обозначается символом* $\langle f\rangle_{\pm}^{\prime}(\langle x\rangle)$ *или* $D_{\pm}\langle f\rangle(\langle x\rangle)$.

Понятно, что $s$-дифференцируемость БОТ $\langle f\rangle$ в бариточке $\langle x\rangle$ влечет дифференцируемость $\langle f\rangle$ по Фреше в $\langle x\rangle$ и равенство $s$-производной $D_{\pm}\langle f\rangle(\langle x\rangle)$ и производной по Фреше $D_{\pm}\langle f\rangle(\langle x\rangle)$ (относительно соответствующего барибанахова пространства $\langle\mathbb{P}\rangle_{\pm}^{n}$). Поэтому $s$-производной $D_{\pm}\langle f\rangle(\langle x\rangle)$ отвечает следующее барикоординатное (матричное) представление:

$$D_{+}\langle f\rangle(\langle x\rangle)=\langle a\rangle\ \cong\ \left(a_{j}^{k}=a^{\{k-j\}}=\partial_{j}f^{k}(x)\right),\tag{8$_+$}$$

$$D_{-}\langle f\rangle(\langle x\rangle)=\langle a\rangle\ \cong\ \left(a_{j}^{k}=\operatorname{sgn}(k-j)\,a^{\{k-j\}}=\partial_{j}f^{k}(x)\right),\tag{8$_-$}$$

где

$$\{k-j\}\overset{def}{=}\begin{cases}k-j+n+1, & если\ \ \mathrm{k-j}<0,\\ \mathrm{k-j}\ , & если\ \ \mathrm{k-j}\geq 0;\end{cases}\quad \operatorname{sgn}(k-j)=\begin{cases}-1, & если\ \ \mathrm{k-j}<0,\\ +1, & если\ \ \mathrm{k-j}\geq 0;\end{cases}$$

$\partial_{j}f^{k}(x)$ – частная производная от функции $f^{k}$ по переменной $x^{j}$ *в* точке $x$.

Из (8$_+$) ((8$_-$)) следует, что БОТ $\langle f\rangle$ *гиперболически* (*эллиптически*) *дифференцируемо в* $\langle x\rangle$ *тогда и только тогда, когда ее частные производные* $\partial_{j}f^{k}\ (j,k=0,1,\ldots,n)$ *удовлетворяют соответственно условиям*:

$$\partial_{j}f^{k}(x)=\partial_{0}f^{\{k-j\}}(x)\ (j,k=0,1,\ldots,n),\tag{9$_+$}$$

$$\partial_{j}f^{k}(x)=\operatorname{sgn}(k-j)=\partial_{0}f^{\{k-j\}}(x)\ (j,k=0,1,\ldots,n),\tag{9$_-$}$$

Условия (9$_+$) ((9$_-$)) являются аналогом условий Коши – Римана в комплексном анализе. Из них вытекает справедливость следующего фундаментального утверждения, касающегося структуры $s$-дифференцируемых БОТ [5].

**Теорема** 1. БОТ $\langle f\rangle:\mathcal{D}\to\langle\mathbb{P}\rangle_{\pm}^{n}$ *s-дифференцируема на D тогда и только тогда, когда его спектральное представление* (7) *имеет вид*

$$\langle f\rangle(\langle x\rangle)=\sum_{k=0}^{n}f_{\pm}^{k}\left(x_{\pm}^{k}\right)\langle\varepsilon\rangle_{k},\tag{10}$$

*где спектральные компоненты* $f_{\pm}^{k}\left(x_{\pm}^{k}\right)$ $(k=0,1,\ldots,n)$ *– дифференцируемые по соответствующим спектральным аргументам* $x_{\pm}^{k}\in\mathbb{P}$ *функции*; *при этом*

$$D_{\pm}\langle f\rangle(\langle x\rangle)=\sum_{k=0}^{n}Df_{\pm}^{k}\left(x_{\pm}^{k}\right)\langle\varepsilon\rangle_{k}.$$

Здесь уместно следующее важное замечание [5].

**Замечание** 1. 1) *Поскольку согласно* (5) *спектральные переменные* $x_{\pm}^{k} = \lambda_{k}^{\pm}(\langle x \rangle)$ *принимают комплексные значения, то функции* $f_{\pm}^{k}(x_{\pm}^{k})$ *в спектральном представлении* (10) *являются голоморфными в области своего определения* $\mathfrak{D}_{\pm}^{k} = \mathfrak{D}(f_{\pm}^{k}) \subseteq \mathbb{C}$.

2) *Векторные поля* $\left(\partial_j f^k(x) = \partial_0 f^{\{k-j\}}(x), \quad j = 0,1,\ldots,n\right)\left(k = 0,1,\ \ldots,n\right)$ *– потенциальные.*

3) *Векторные поля* $\left(\partial_j f^k(x) = \partial_0 f^{\{k-j\}}(x), \quad k = 0,1,\ldots,n\right)\left(j = 0,1,\ \ldots,n\right)$ *– коммутирующие.*

2. Далее изложим основные результаты работы [1]. Пусть $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – отображение класса $C^m\ (m > 2)$, причем,

$$\varphi(u) = u + au^2 + o(u^2) \quad (u \in \mathbb{R}, u \to 0), \tag{11}$$

где $a > 0$ – постоянная. С помощью замены функции $\varphi(u)$ на функцию $\tilde{\varphi}(u) = a\,\tilde{\varphi}(a^{-1}u)$ можно добиться, чтобы в (11) параметр $a = 1$ (что дальше и предполагается). Затем посредством функций $\delta(u)$ и $\delta_0(u)$ таких, что

$$\delta(u) = u^2 + o(u^2) = u^2\,(1 + \delta_0(u)), \quad \delta_0(u) = o(1) \quad (u \to 0),$$

функция (11) будет записана так

$$\varphi(u) = u + \delta(u) \quad (u \in \mathbb{R}, u \to 0). \tag{11'}$$

Задача 1. *На прямой* $\mathbb{R}$ *найти векторное поле* $f \in C^1(\mathbb{R})$, *или автономное* ДУ

$$\dot{u}(t) = f\big(u(t)\big) \quad (t \in \mathbb{R}) \tag{12}$$

*такое, что соответствующая однопараметрическая группа диффеоморфизмов* $g^t$ *обладает свойством*

$$g^1(u_0) = \varphi(u_0) \quad \big(u_0 \in U(0)\big), \tag{13}$$

*где* $U(0) \subseteq \mathbb{R}$ *— некоторая связная окрестность нуля.*

*По-другому эту задачу можно сформулировать так*: *найти* ДУ 1-*го порядка* (12) *такое, что для каждого* $u_0$ *из некоторой окрестности* $U(0) \subseteq \mathbb{R}$ *разрешима первая краевая задача*

$$u(0) = u_0, \quad u(1) = \varphi(u_0).$$

Введем окрестность $U_0 = \{u \in U(0) : \varphi'(u) > 0 \wedge \varphi'' > 0\}$ точки 0. В этой окрестности отображение (11) имеет единственную неподвижную точку $u = 0$. Справедливо следующее утверждение ([1], теорема 1).

**Лемма** 1. *Для того чтобы векторное поле* $f \in C^1(\mathbb{R})$ *решало задачу* (12), (13) *в окрестности* $U_0$, *необходимо и достаточно, чтобы в* $U_0$ *функция* $f$ *удовлетворяла условиям*:

$$1) \quad f(u) \neq 0 \quad (\forall u \neq 0), \quad 2)\ f(\varphi(u)) = \varphi'(u)\, f(u). \tag{14}$$

*При этом, если в* (11') $\delta'(u) = 2u + o(u)$, то есть $u\,\delta_0'(u) = o(1)$ при $u \to 0$, то

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0.$$

Таким образом, диффеоморфизм $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является *симметрией* ДУ (12) (векторного поля $f \in C^1(\mathbb{R})$) [6].

Лемма 1 (вместе с соответствующими замечаниями к ней [1]) положена в основу доказательства существования решения задачи 1. А именно, сначала с ее помощью доказано промежуточное утверждение ([1], теорема 2).

**Лемма** 2. *Решение* $f \in C^1(U_0)$, *удовлетворяющее условию* 1) и *уравнению* 2) *из* (14), *определяется с точностью до постоянного множителя и потому единственно при выполнении соответствующего условия нормировки.*

А затем – основное утверждение работы ([1], теорема 3).

**Теорема** 2. *Если отображение* (11) *удовлетворяет, помимо указанных условий, еще условиям*:

a) $\varphi \in C^3(\mathbb{R})$;

b) $\varphi$ *имеет на* $\mathbb{R}$ *единственную неподвижную точку* $u = 0$;

c) $\delta(u) \sim u^{\alpha}$, $\delta'(u) \sim \alpha\, u^{\alpha-1}$ $(u \to +\infty)$, *где* $\alpha = \text{const} > 1$;

*то задача* (12), (13) *имеет глобальное решение* $f \in C^1(\mathbb{R})$.

3. Теперь сформулируем аналог задачи 1 в рамках спектральной бариалгебры $\langle \mathbb{P} \rangle_{\pm}^{n}$, где $\mathbb{P} = \mathbb{R}$. Пусть

$$\langle \varphi \rangle : \langle x \rangle \in \langle \mathbb{P} \rangle_{\pm}^{n} \to \langle y \rangle = \langle \varphi \rangle(\langle x \rangle) \in \langle \mathbb{P} \rangle_{\pm}^{n} \tag{14}$$

–БОТ, спектральное компоненты которого (см. (7)) имеют вид

$$y_{\pm}^{k} = \varphi_{\pm}^{k}\left(x_{\pm}^{0}, x_{\pm}^{1}, \ldots, x_{\pm}^{n}\right), \tag{15}$$

где

$$\varphi_{\pm}^{k}(x_{\pm}) = \sum\nolimits_{j=0}^{n} \varphi^{j}(x)\left((\varepsilon_{k}^{\pm})^{j}\right)^{*}, \quad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

–вещественные функции вещественных аргументов $x_{\pm}^{0}, x_{\pm}^{1}, \ldots, x_{\pm}^{n}$ (см. (4), (5)) класса $C^{m}$ $(m > 2)$.

Пусть в бариокрестности $\langle U \rangle(\langle \tilde{0} \rangle) \subseteq \langle \mathbb{P} \rangle_{\pm}^{n}$ баринуля $\langle \tilde{0} \rangle$ выполнено условие

$$\langle \varphi \rangle(\langle x \rangle) = \langle x \rangle + \left(\langle a \rangle \langle x \rangle^{2}\right)_{\pm} + o(\|\langle x \rangle\|^{2}) \quad \left(\langle x \rangle \to \langle \tilde{0} \rangle\right), \tag{16}$$

где $\langle a \rangle = \sum\nolimits_{k=0}^{n} a_{\pm}^{k} \langle \varepsilon \rangle_{k}^{\pm}$ – барипостоянная такая, что $a_{\pm}^{k} > 0$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ (короче $\langle a \rangle > \langle \tilde{0} \rangle$).

Задача 2. *На бариалгебре* $\langle \mathbb{R} \rangle_{\pm}^{n}$ *найти баривекторное поле* $\langle f \rangle \in \langle C \rangle^{1}\left(\langle \mathbb{R} \rangle_{\pm}^{n}\right)$ (*дифференцирование понимается в смысле Фреше*), *или автономное* БДУ

$$\frac{d}{dt}\langle x \rangle(t) = \langle f \rangle(\langle x \rangle(t)) \quad (t \in \mathbb{R}) \tag{17}$$

*такое, что соответствующая однопараметрическая группа баридиффеоморфизмов* $\langle g \rangle^{t}$ *обладает свойством*

$$\langle g \rangle^{1}(\langle x \rangle_{0}) = \langle \varphi \rangle(\langle x \rangle_{0}) \quad \left(\langle x \rangle_{0} \in \langle U \rangle(\langle \tilde{0} \rangle)\right), \tag{18}$$

*где* $\langle U \rangle(\langle \tilde{0} \rangle)$ *– некоторая связная бариокрестность баринуля. Другими словами*: *найти* БДУ 1-*го порядка* (17) *такое, что для каждого* $\langle x_0 \rangle$ *из некоторой бариокрестности* $\langle V \rangle(\langle \tilde{0} \rangle)$ *разрешима первая краевая задача*

$$\langle x \rangle(0) = \langle x \rangle_{0}, \quad \langle x \rangle(1) = \langle \varphi \rangle(\langle x \rangle_{0}).$$

Для решения этой задачи переведем ее на язык бариспектральных координат (5). На этом языке условие (16) перепишется так:

$$\varphi_{\pm}^{k}(x_{\pm}) = x_{\pm}^{k} + a_{\pm}^{k}\left(x_{\pm}^{k}\right)^{2} + o\left(\|x_{\pm}\|^{2}\right) (x_{\pm} \to 0), \tag{16'}$$

где $a_{\pm}^{k} > 0$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$. Аналогично БДУ (17) примет вид системы ДУ 1-го порядка

$$\frac{d}{dt} x_{\pm}^{k}(t) = f_{\pm}^{k}(x_{\pm}(t)) \quad (k = 0, 1, \ldots, n). \tag{17'}$$

Наложим на БОТ $\langle \varphi \rangle$ и $\langle f \rangle$ следующие *дополнительные условия* (см. представление (10)):

$$\varphi_{\pm}^{k}(x_{\pm}) = \varphi_{\pm}^{k}\left(x_{\pm}^{k}\right), \; f_{\pm}^{k}(x_{\pm}) = f_{\pm}^{k}\left(x_{\pm}^{k}\right), (k = 0, 1, \ldots, n). \tag{19}$$

Тогда условия (16') примут вид несвязных между собой отношений:

$$\varphi_{\pm}^{k}\left(x_{\pm}\right)=x_{\pm}^{k}+a_{\pm}^{k}\left(x_{\pm}^{k}\right)^{2}+o\left(\left\|x_{\pm}^{k}\right\|^{2}\right)\ (x_{\pm}^{k}\to 0), \tag{20}$$

а система ДУ (17') распадется на систему несвязных между собой ДУ 1-го порядка

$$\frac{d}{dt}x_{\pm}^{k}(t)=f_{\pm}^{k}\left(x_{\pm}^{k}(t)\right)\quad (k=0,1,\ldots,n). \tag{21}$$

Таким образом, при дополнительных условиях (19) задача 2 разлагается на конечное число ($n$+1) задач 1. Согласно теореме 2 каждая из этих задач при соблюдении функциями $\varphi_{\pm}^{k}\left(x_{\pm}^{k}\right)$ условий a), b), c) имеет единственное глобальное решение $f_{\pm}^{k}\left(x_{\pm}^{k}\right)\in C^{1}(\mathbb{R})$ $(k=0,1,\ldots,n)$. Подставляя эти решения в формулу (см. (10))

$$\langle f\rangle(\langle x\rangle)=\sum_{k=0}^{n} f_{\pm}^{k}\left(x_{\pm}^{k}\right)\langle\varepsilon\rangle_{k}^{\pm}, \tag{22}$$

получим решение $\langle f\rangle(\langle x\rangle)\in\langle C\rangle^{1}(\langle\mathbb{R}\rangle^{n})$ задачи 2 (вообще говоря, комплекснозначное). Такой метод получения решения задачи 2 называется *спектральным барисинтезом* [5].

Тем самым доказано следующее утверждение.

**Теорема** 3. *Если отображение* (14) *такое, что ее спектральные компоненты* (15) *удовлетворяют условиям* (19), (20) *и условиям теоремы* 2, *то задача* 2 *имеет глобальное решение* (22) *из класса* $\langle C\rangle^{1}(\langle\mathbb{R}\rangle^{n})$.

Поскольку по лемме 1 спектральные компоненты решения (22) необходимо удовлетворяют уравнениям

$$f_{\pm}^{k}(\varphi_{\pm}^{k}(x_{\pm}^{k}))=\left(\varphi_{\pm}^{k}\right)'(x_{\pm}^{k})\, f_{\pm}^{k}(x_{\pm}^{k}),\quad (k=0,1,\ldots,n),$$

то

$$\langle f\rangle(\langle\varphi\rangle(\langle x\rangle))=\sum_{k=0}^{n} f_{\pm}^{k}\left(\varphi_{\pm}^{k}(x_{\pm})\right)\langle\varepsilon\rangle_{k}^{\pm}=\sum_{k=0}^{n} f_{\pm}^{k}\left(\varphi_{\pm}^{k}\left(x_{\pm}^{k}\right)\right)\langle\varepsilon\rangle_{k}^{\pm}=\sum_{k=0}^{n}\left(\varphi_{\pm}^{k}\right)'(x_{\pm}^{k})\, f_{\pm}^{k}(x_{\pm}^{k})\langle\varepsilon\rangle_{k}^{\pm}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\left(\varphi_{\pm}^{k}\right)'(x_{\pm}^{k})\,\langle\varepsilon\rangle_{k}^{\pm}\cdot\sum_{k=0}^{n} f_{\pm}^{k}(x_{\pm}^{k})\langle\varepsilon\rangle_{k}^{\pm}=\left(\langle\varphi\rangle'(\langle x\rangle)\cdot\langle f\rangle(\langle x\rangle)\right)_{\pm},$$

то есть и само решение (22) необходимо удовлетворяет аналогичному бариуравнению

$$\langle f\rangle(\langle\varphi\rangle(\langle x\rangle))=\langle\varphi\rangle'(\langle x\rangle)\langle f\rangle(\langle x\rangle). \tag{23}$$

Следовательно, диффеоморфизм $\langle\varphi\rangle:\langle\mathbb{P}\rangle_{\pm}^{n}\to\langle\mathbb{P}\rangle_{\pm}^{n}$, удовлетворяющий указанным в теореме 3 условиям, является *симметрией* ДУ (17), (22) (векторного поля (22)).

Вопрос о том, является ли условие (23) достаточным для того, чтобы БОТ $\langle f\rangle(\langle x\rangle)$ разрешало задачу 2 в общем случае (16) (без соблюдения условия (19)), остается открытым.

**Замечание** 2. *Ввиду теоремы* 1 *условие* (19) *заведомо выполняется, если* (14) – *s-дифференцируемое*БОТ. *Однако при этом, согласно замечанию* 1, *спектральные компоненты* (19) *будут голоморфными функциями, и, следовательно, задачу 1 необходимо решить в классе голоморфных функций* $\varphi$ *и* $f$.

К сказанному уместно добавить, что можно с самого начала взять ($n$+1) диффеоморфизмов $\varphi_{\pm}^{k}\left(x_{\pm}\right):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $(k=0,1,\ldots,n)$, удовлетворяющих условиям теоремы 2, и вложить каждый из них в векторное поле $f_{\pm}^{k}\in C^{1}(\mathbb{R})$ $(k=0,1,\ldots,n)$ соответственно. Тогда спектрально барисинтезированный диффеоморфизм

$$\langle\varphi\rangle(\langle x\rangle)=\sum_{k=0}^{n}\varphi_{\pm}^{k}\left(x_{\pm}^{k}\right)\langle\varepsilon\rangle_{k}^{\pm}:\langle\mathbb{R}\rangle_{\pm}^{n}\to\langle\mathbb{C}\rangle_{\pm}^{n}$$

будет соответственно вложенным в векторное поле (в общем случае, комплекснозначное)

$$\langle f\rangle(\langle x\rangle)=\sum_{k=0}^{n} f_{\pm}^{k}\left(x_{\pm}^{k}\right)\langle\varepsilon\rangle_{k}^{\pm}\in\langle C\rangle^{1}(\langle\mathbb{R}\rangle^{n})$$

и удовлетворяющим условию симметрии (23).

### Библиографический список

1. Арнольд, В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений [Текст] / В. И. Арнольд. – М. : Наука, 1978. – 304 с.
2. Бородин, А. В. Барианализточных решений нелинейных эволюционных уравнений [Текст] / А. В. Бородин // Ярославский педагогический вестник. – 2007. – № 3 (52). – С. 72–78.
3. Бородин, А. В. Бариоперационный методрешения алгебраических уравнений [Текст] / А. В. Бородин // Ярославский педагогический вестник.– 2010. – № 2. – Т. III (Естественные науки). – С. 7–14.
4. Бородин, А. В. Бариоперационный методрешения нелинейных эволюционных уравнений [Текст] / А. В. Бородин // Ярославский педагогический вестник. – 2012. – № 3 – Т. III (Естественные науки). – С. 50–56.
5. Бородин, А. В. Многомерный барианализ и его приложения. Часть I [Текст] / А. В. Бородин. – Ярославль : Изд-во ЯГТУ, 2005. – 432 с.
6. Бородин, А. В. О вложении диффеоморфизма класса $C^3$ в векторное поле [Текст] / А. В. Бородин // Математика и математическое образование. Теория и практика : Межвуз. сб. научн. тр. – Вып. 2. – Ярославль : Изд-во ЯГТУ, 2001. – С. 14–37.
7. Newhouse S., Palis J., Takens F. // Publ. Math. INES. – 1983. – V. 57. – P. 5–72.

### Bibliograficheskij spisok

1. Arnol'd, V. I. Dopolnitel'nye glavy teorii obyknovennyh differencial'nyh uravnenij [Tekst] / V. I. Arnol'd. – M. : Nauka, 1978. – 304 s.
2. Borodin, A. V. Barianaliztochnyh reshenij nelinejnyh jevoljucionnyh uravnenij [Tekst] / A. V. Borodin // Jaroslavskij pedagogicheskij vestnik. – 2007. – № 3 (52). – S. 72–78.
3. Borodin, A. V. Barioperacionnyj metodreshenija algebraicheskih uravnenij [Tekst] / A. V. Borodin // Jaroslavskij pedagogicheskij vestnik.– 2010. – № 2. – T. III (Estestvennye nauki). – S. 7–14.
4. Borodin, A. V. Barioperacionnyj metodreshenija nelinejnyh jevoljucionnyh uravnenij [Tekst] / A. V. Borodin // Jaroslavskij pedagogicheskij vestnik. – 2012. – № 3 – T. III (Estestvennye nauki). – S. 50–56.
5. Borodin, A. V. Mnogomernyj barianaliz i ego prilozhenija. Chast' I [Tekst] / A. V. Borodin. – Jaroslavl' : Izd-vo JaGTU, 2005. – 432 s.
6. Borodin, A. V. O vlozhenii diffeomorfizma klassa C3 v vektornoe pole [Tekst] / A. V. Borodin // Matematika i matematicheskoe obrazovanie. Teorija i praktika : Mezhvuz. sb. nauchn. tr. – Vyp. 2. – Jaroslavl' : Izd-vo JaGTU, 2001. – S. 14–37.
7. Newhouse S., Palis J., Takens F. // Publ. Math. INES. – 1983. – V. 57. – P. 5–72.