

С. А. Тихомиров, А. П. Ляпин, А. В. Жигарева

Многообразия модулей стабильных рефлексивных пучков ранга 2 с нечетным первым классом Черна на комплексном проективном пространстве

В данной статье мы устанавливаем фундаментальные взаимосвязи между двумя специальными классами многообразий модулей стабильных рефлексивных пучков ранга 2 с нечетным первым классом Черна на P_3

Ключевые слова: рефлексивный пучок, стабильный пучок, классы Черна, многообразие модулей.

S. A. Tikhomirov, A. P. Lyapin, A. V. Zhigareva

Varieties of Moduli of Stable Reflexive Rank-2 Sheaves with Odd First Chern's Class on Complex Projective Space

In this article we establish the fundamental interrelations between two special classes of variety of moduli of stable reflexive rank-2 sheaves with odd first Chern's class on P_3 .

Keywords: a reflexive sheaf, a stable sheaf, Chern's classes, variety of moduli.

Маруяма [3] показал, что множество классов эквивалентности изоморфных стабильных рефлексивных пучков параметризуется так называемым (грубым) пространством модулей. То есть, проще говоря, точке в пространстве модулей соответствует класс эквивалентности таких пучков. Это пространство имеет структуру алгебраического многообразия.

Мы рассматриваем наши многообразия модулей стабильных рефлексивных пучков ранга 2 с первым классом Черна, равным -1 (по традиции называемым в алгебраической геометрии *нечетным*) на трехмерном проективном пространстве P_3 над полем C .

Настоящая работа посвящена установлению фундаментальных взаимосвязей между двумя специальными классами таких многообразий.

Имеют место следующие утверждения.

Утверждение 1. (Хартсхорн, [2], лемма 9.3).

Многообразие модулей стабильных рефлексивных пучков ранга 2 на P_3 с классами Черна $(-1, m, m^2)$ неприводимо, гладко и рационально размерности 3, если $m=1$, и размерности m^2+3m+1 , если $m \geq 2$.

Определение 1. Назовем такое многообразие модулей *многообразием Хартсхорна*.

Утверждение 2. (Ведерников, [1], лемма 4).

Многообразие модулей стабильных рефлексивных пучков ранга 2 на P_3 с нечетными классами Черна $(-1, l(k+1), l(k+1)^2)$ неприводимо, рационально и гладко размерности

$$lk^2 + (6l - l^2)k + \frac{1}{2}l^3 - 2l^2 + \frac{21}{2}l - 4$$

Определение 2. Назовем такое многообразие модулей *многообразием Ведерникова*.

Теперь мы формулируем первый из основных результатов нашей работы.

Теорема 1. Для каждого многообразия Хартсхорна всегда найдется многообразие Ведерникова в точности такой же размерности, причем классы Черна пучков в обоих многообразиях будут совпадать.

Доказательство данного результата будем проводить получением экспериментальных данных о размерностях многообразий Хартсхорна и Ведерникова и установлением взаимосвязей между общими формулами для размерностей Хартсхорна и Ведерникова, указанными выше.

Ниже мы приводим наши экспериментальные данные – таблицы размерностей многообразий Хар-тсхорна (по переменной m) и многообразий Ведерникова (по переменным l и k). Цифра после двоеточия и есть размерность конкретного многообразия при данном значении переменной (переменных).

$m=1 : 3$	$m=51 : 2755$	$m=101 : 10505$
$m=2 : 11$	$m=52 : 2861$	$m=102 : 10711$
$m=3 : 19$	$m=53 : 2969$	$m=103 : 10919$
$m=4 : 29$	$m=54 : 3079$	$m=104 : 11129$
$m=5 : 41$	$m=55 : 3191$	$m=105 : 11341$
$m=6 : 55$	$m=56 : 3305$	$m=106 : 11555$
$m=7 : 71$	$m=57 : 3421$	$m=107 : 11771$
$m=8 : 89$	$m=58 : 3539$	$m=108 : 11989$
$m=9 : 109$	$m=59 : 3659$	$m=109 : 12209$
$m=10 : 131$	$m=60 : 3781$	$m=110 : 12431$
$m=11 : 155$	$m=61 : 3905$	$m=111 : 12655$
$m=12 : 181$	$m=62 : 4031$	$m=112 : 12881$
$m=13 : 209$	$m=63 : 4159$	$m=113 : 13109$
$m=14 : 239$	$m=64 : 4289$	$m=114 : 13339$
$m=15 : 271$	$m=65 : 4421$	$m=115 : 13571$
$m=16 : 305$	$m=66 : 4555$	$m=116 : 13805$
$m=17 : 341$	$m=67 : 4691$	$m=117 : 14041$
$m=18 : 379$	$m=68 : 4829$	$m=118 : 14279$
$m=19 : 419$	$m=69 : 4969$	$m=119 : 14519$
$m=20 : 461$	$m=70 : 5111$	$m=120 : 14761$
$m=21 : 505$	$m=71 : 5255$	$m=121 : 15005$
$m=22 : 551$	$m=72 : 5401$	$m=122 : 15251$
$m=23 : 599$	$m=73 : 5549$	$m=123 : 15499$
$m=24 : 649$	$m=74 : 5699$	$m=124 : 15749$
$m=25 : 701$	$m=75 : 5851$	$m=125 : 16001$
$m=26 : 755$	$m=76 : 6005$	$m=126 : 16255$
$m=27 : 811$	$m=77 : 6161$	$m=127 : 16511$
$m=28 : 869$	$m=78 : 6319$	$m=128 : 16769$
$m=29 : 929$	$m=79 : 6479$	$m=129 : 17029$
$m=30 : 991$	$m=80 : 6641$	$m=130 : 17291$
$m=31 : 1055$	$m=81 : 6805$	$m=131 : 17555$
$m=32 : 1121$	$m=82 : 6971$	$m=132 : 17821$
$m=33 : 1189$	$m=83 : 7139$	$m=133 : 18089$
$m=34 : 1259$	$m=84 : 7309$	$m=134 : 18359$
$m=35 : 1331$	$m=85 : 7481$	$m=135 : 18631$
$m=36 : 1405$	$m=86 : 7655$	$m=136 : 18905$
$m=37 : 1481$	$m=87 : 7831$	$m=137 : 19181$
$m=38 : 1559$	$m=88 : 8009$	$m=138 : 19459$
$m=39 : 1639$	$m=89 : 8189$	$m=139 : 19739$
$m=40 : 1721$	$m=90 : 8371$	$m=140 : 20021$
$m=41 : 1805$	$m=91 : 8555$	$m=141 : 20305$
$m=42 : 1891$	$m=92 : 8741$	$m=142 : 20591$
$m=43 : 1979$	$m=93 : 8929$	$m=143 : 20879$
$m=44 : 2069$	$m=94 : 9119$	$m=144 : 21169$
$m=45 : 2161$	$m=95 : 9311$	$m=145 : 21461$
$m=46 : 2255$	$m=96 : 9505$	$m=146 : 21755$
$m=47 : 1979$	$m=97 : 9701$	$m=147 : 22051$
$m=48 : 2449$	$m=98 : 9899$	$m=148 : 22349$
$m=49 : 2549$	$m=99 : 10099$	$m=149 : 22649$
$m=50 : 2651$	$m=100 : 10301$	$m=150 : 22951$

m=151 : 23255	m=204 : 42229	m= 257 : 66821
m=152 : 23561	m=205 : 42641	m= 258 : 67339
m=153 : 23869	m=206 : 43055	m=259 : 67859
m=154 : 24179	m=207 : 43471	m=260: 68381
m=155 : 24491	m=208 : 43889	m=261 : 68905
m=156 : 24805	m= 209 : 44309	m=262 : 69431
m=157 : 25121	m= 210 : 44731	m= 263 : 69959
m= 158 : 25439	m=211 : 45155	m=264 : 70489
m= 159 : 25759	m=212 : 45581	m=265: 71021
m=160 : 26081	m=213 : 46009	m=266 : 71555
m=161 : 26405	m=214 : 46439	m=267 : 72091
m=162 : 26731	m=215 : 46871	m=268 : 72629
m=163 : 27059	m=216 : 47305	m=269 : 73169
m=164 : 27389	m=217 : 47741	m=270 : 73711
m=165 : 27721	m=218 : 48179	m=271 : 74255
m=166 : 28055	m=219 : 48619	m=272 : 74801
m=167 : 28391	m=220 : 49061	m=273: 75349
m=168 : 28729	m= 221 : 49505	m= 274: 75899
m=169 : 29069	m= 222 : 49951	m= 275: 76451
m= 170 : 29411	m=223 : 50399	m=276 : 77005
m= 171 : 29755	m=224 : 50849	m=277 : 77561
m=172 : 30101	m=225 : 51301	m=278 : 78119
m=173 : 30449	m=226 : 51755	m=279 :78679
m=174 : 30799	m=227 : 52211	m=280 : 79241
m=175 : 31151	m=228 : 52669	m=281 : 79805
m=176 : 31505	m=229 : 53129	m=282 : 80371
m=177 : 31861	m=230 : 53591	m=283 : 80939
m=178 : 32219	m=231 : 54055	m=284 : 81509
m=179 : 32579	m=232 : 54521	m=285 : 82081
m=180 : 32941	m=233 : 54989	m= 286 : 82655
m=181 : 33305	m= 234 : 55459	m= 287 : 83231
m=182 : 33671	m=235 : 55931	m=288: 83809
m=183 : 34039	m=236 : 56405	m=289: 84389
m=184 : 34409	m=237 : 56881	m=290 :84971
m= 185 : 34781	m=238 : 57359	m=291 : 85555
m= 186 : 35155	m=239 : 57839	m=292 : 86141
m=187 : 35531	m=240 : 58321	m=293 : 86729
m=188 : 35909	m=241 : 58805	m=294 : 87319
m=189 : 36289	m=242 : 592991	m=295 : 87911
m=190 : 36671	m=243 : 59779	m=296 : 88505
m=191 : 37055	m=244 : 60269	m=297 : 89101
m=192 : 37441	m= 245 : 60761	m=298 : 89699
m=193 : 37829	m= 246 : 61255	m=299 : 90299
m=194 : 38219	m=247 : 61751	m=300 : 90901
m=195 : 38611	m=248 : 62249	m= 301 : 91505
m=196 : 39005	m=249: 62749	m= 302 : 92111
m= 197 : 39401	m=250: 63251	m=303 : 92719
m= 198 : 39799	m=251: 63755	m=304 : 93329
m=199 : 40199	m=252: 64261	m=305 : 93941
m=200 : 40601	m=253 : 64769	m=306 : 94555
m=201 : 41005	m=254 : 65279	m=307 : 95171
m=202 : 41411	m=255 : 65791	m=308 : 95789
m=203 : 41819	m=256 : 66305	m=309 : 96409

m=310 : 97031	m=353 : 125669	m=396 : 158005
m=311 : 97655	m=354 : 126379	m=397 : 158801
m=312 : 98281	m=355 : 127091	m=398 : 159599
m= 313: 98909	m=356 : 127805	m=399 : 160399
m= 314 : 99539	m=357 : 128521	m= 400 : 161201
m=315 : 100171	m=358 : 129239	m= 401 : 162005
m=316 : 100805	m=359 : 129959	m=402 : 162811
m=317 : 101441	m=360 : 130681	m=403 : 163619
m=318 : 102079	m= 361 : 131405	m=404 : 164429
m=319 : 102719	m= 362 : 132131	m=405 : 165241
m=320 : 103361	m=363 : 132859	m=406 : 166055
m=321 : 104005	m=364 : 133589	m=407 : 166871
m=322 : 104651	m=365 : 134321	m=408 : 167689
m=323 : 105299	m=366 : 135055	m=409 : 168509
m=324 : 105949	m=367 : 135791	m=410 : 169331
m= 325 : 106601	m=368 : 136529	m=411 : 170155
m= 326 : 107255	m=369 : 137269	m= 412 : 170981
m=327 : 107911	m=370 : 138011	m= 413 : 171809
m=328 : 108569	m=371 : 138755	m=414 : 172639
m=329 : 109229	m=372 : 139501	m=415 : 173471
m=330 : 109891	m= 373 :140249	m=416 : 174305
m=331 : 110555	m= 374 : 140999	m=417 : 175141
m=332 : 111221	m=375 : 141751	m=418 : 175979
m=333 : 111889	m=376 : 142505	m=419 : 176819
m=334 : 112559	m=377 : 143261	m=420 : 177661
m=335 : 113231	m=378 : 144019	m=421 : 178505
m=336 : 113905	m=379 : 144779	m=422 : 179351
m= 337 : 114581	m=380 : 145541	m=423 : 180199
m= 338 : 115259	m=381 : 146305	m= 424 :181049
m=339 : 115939	m=382 : 147071	m= 425 :181901
m=340 : 116621	m=383 : 147839	m=426 : 182755
m=341 : 117305	m=384 : 148609	m=427 : 183611
m=342 : 117991	m=385 : 149381	m=428 : 184469
m=343 : 118679	m=386 : 150155	m=429 : 185329
m=344 : 119369	m=387 : 150931	m=430 : 186191
m=345 : 120061	m= 388 : 151709	m=431 : 187055
m=346 : 120755	m= 389 : 152489	m=432 : 187921
m=347 : 121451	m=390 : 153271	m=433 : 188789
m=348 : 122149	m=391 : 154055	m=434 : 189659
m= 349 : 122849	m=392: 154841	m=435 : 190531
m= 350 : 123551	m=393 : 155629	m= 436 :191405
m=351 : 124255	m=394 : 156419	
m=352 : 124961	m=395 : 157211	
l=1, k=2 : 19	l=1, k=12 : 209	l=1, k=22 : 599
l=1, k=3 : 29	l=1, k=13 : 239	l=1, k=23 : 649
l=1, k=4 : 41	l=1, k=14 : 271	l=1, k=24 : 701
l=1, k=5 : 55	l=1, k=15 : 305	l=1, k=25 : 755
l=1, k=6 : 71	l=1, k=16 : 341	l=1, k=26 : 811
l=1, k=7 : 89	l=1, k=17 : 379	l=1, k=27 : 869
l=1, k=8 : 109	l=1, k=18 : 419	l=1, k=28 : 929
l=1, k=9 : 131	l=1, k=19 : 461	l=1, k=29 : 991
l=1, k=10 : 155	l=1, k=20 : 505	l=1, k=30 : 1055
l=1, k=11 : 181	l=1, k=21 : 551	l=1, k=31 : 1121

l=1, k=32 : 1189	l=1, k=85 : 7655	l=1, k=138 : 19739
l=1, k=33 : 1259	l=1, k=86 : 7831	l=1, k=139 : 20021
l=1, k=34 : 1331	l=1, k=87 : 8009	l=1, k=140 : 20305
l=1, k=35 : 1405	l=1, k=88 : 8189	l=1, k=141 : 20591
l=1, k=36 : 1481	l=1, k=89 : 8371	l=1, k=142 : 20879
l=1, k=37 : 1559	l=1, k=90 : 8555	l=1, k=143 : 21169
l=1, k=38 : 1639	l=1, k=91 : 8741	l=1, k=144 : 21461
l=1, k=39 : 1721	l=1, k=92 : 8929	l=1, k=145 : 21755
l=1, k=40 : 1805	l=1, k=93 : 9119	l=1, k=146 : 22051
l=1, k=41 : 1891	l=1, k=94 : 9311	l=1, k=227 : 52669
l=1, k=42 : 1979	l=1, k=95 : 9505	l=1, k=243 : 60269
l=1, k=43 : 2069	l=1, k=96 : 9701	l=1, k=324 : 106601
l=1, k=44 : 2161	l=1, k=97 : 9899	l=1, k=245 : 61255
l=1, k=45 : 2255	l=1, k=98 : 10099	l=1, k=236 : 56881
l=1, k=46 : 2351	l=1, k=99 : 10301	l=1, k=257 : 67339
l=1, k=47 : 2449	l=1, k=100: 10505	l=1, k=268 : 73169
l=1, k=48 : 2549	l=1, k=101 : 10711	l=1, k=279 : 79241
l=1, k=49 : 2651	l=1, k=102 : 10919	l=1, k=280 : 79805
l=1, k=50 : 2755	l=1, k=103 : 11129	l=1, k=291 : 86141
l=1, k=51 : 2861	l=1, k=104 : 11341	l=1, k=298 : 90299
l=1, k=52 : 2969	l=1, k=105 : 11555	l=1, k=305 : 94555
l=1, k=53 : 3079	l=1, k=106 : 11771	l=1, k=314 : 100171
l=1, k=54 : 3191	l=1, k=107 : 11989	l=1, k=325 : 107255
l=1, k=55 : 3305	l=1, k=108 : 12209	l=1, k=336 : 114581
l=1, k=56 : 3421	l=1, k=109 : 12431	l=1, k=347 : 122149
l=1, k=57 : 3539	l=1, k=110 : 12655	l=1, k=358 : 129959
l=1, k=58 : 3659	l=1, k=111 : 12881	l=1, k=349 : 123551
l=1, k=59 : 3781	l=1, k=112 : 13109	l=1, k=350 : 124255
l=1, k=60 : 3905	l=1, k=113 : 13339	l=1, k=362 : 132859
l=1, k=61 : 4031	l=1, k=114 : 13571	l=1, k=377 : 144019
l=1, k=62 : 4159	l=1, k=115 : 13805	l=1, k=382 : 147839
l=1, k=63 : 4289	l=1, k=116 : 14041	l=1, k=394 : 157211
l=1, k=64 : 4421	l=1, k=117 : 14279	l=1, k=405 : 166055
l=1, k=65 : 4555	l=1, k=118 : 14519	l=1, k=413 : 172639
l=1, k=66 : 4691	l=1, k=119 : 14761	l=1, k=427 : 184469
l=1, k=67 : 4829	l=1, k=120 : 15005	l=1, k=428 : 185329
l=1, k=68 : 4969	l=1, k=121 : 15251	l=1, k=432 : 188789
l=1, k=69 : 5111	l=1, k=122 : 15499	l=1, k=436 : 192281
l=1, k=70 : 5255	l=1, k=123 : 15749	l=2, k=2 : 37
l=1, k=71 : 5401	l=1, k=124 : 16001	l=2, k=3 : 55
l=1, k=72 : 5549	l=1, k=125 : 16255	l=2, k=4 : 77
l=1, k=73 : 5699	l=1, k=126 : 16511	l=2, k=5 : 103
l=1, k=74 : 5851	l=1, k=127 : 16769	l=2, k=6 : 133
l=1, k=75 : 6005	l=1, k=128 : 17029	l=2, k=7 : 167
l=1, k=76 : 6161	l=1, k=129 : 17291	l=2, k=8 : 205
l=1, k=77 : 6319	l=1, k=130 : 17555	l=2, k=9 : 247
l=1, k=78 : 6479	l=1, k=131 : 17821	l=2, k=10 : 293
l=1, k=79 : 6641	l=1, k=132 : 18089	l=2, k=11 : 343
l=1, k=80 : 6805	l=1, k=133 : 18359	l=2, k=12 : 397
l=1, k=81 : 6971	l=1, k=134 : 18631	l=2, k=13 : 455
l=1, k=82 : 7139	l=1, k=135 : 18905	l=2, k=14 : 517
l=1, k=83 : 7309	l=1, k=136 : 19181	l=2, k=15 : 583
l=1, k=84 : 7481	l=1, k=137 : 19459	l=2, k=16 : 653

$l=2, k=17 : 727$	$l=2, k=29 : 1927$	$l=3, k=42 : 5693$
$l=2, k=18 : 805$	$l=2, k=30 : 2053$	$l=3, k=43 : 5957$
$l=2, k=19 : 887$	$l=3, k=31 : 3185$	$l=3, k=44 : 6227$
$l=2, k=20 : 973$	$l=3, k=32 : 3383$	$l=3, k=45 : 6503$
$l=2, k=21 : 1063$	$l=3, k=33 : 3587$	$l=3, k=46 : 6785$
$l=2, k=22 : 1157$	$l=3, k=34 : 3797$	$l=3, k=47 : 7073$
$l=2, k=23 : 1255$	$l=3, k=35 : 4013$	$l=3, k=48 : 7367$
$l=2, k=24 : 1357$	$l=3, k=36 : 4235$	$l=3, k=49 : 7667$
$l=2, k=25 : 1463$	$l=3, k=38 : 4697$	$l=3, k=50 : 7973$
$l=2, k=26 : 1573$	$l=3, k=39 : 4937$	$l=3, k=51 : 8285$
$l=2, k=27 : 1687$	$l=3, k=40 : 5183$	$l=3, k=52 : 8603$
$l=2, k=28 : 1805$	$l=3, k=41 : 5435$	$l=3, k=53 : 8927$

Формула для размерности многообразий Хартсхорна имеет вид: m^2+3m+1 (для $m \geq 2$). Формула для размерностей многообразий Ведерникова имеет вид: $lk^2 + (6l - l^2)k + \frac{1}{2}l^3 - 2l^2 + \frac{21}{2}l - 4$. При определенных значениях l, k и m формулы дают в точности совпадающие значения (см. экспериментальные данные выше). Это наводит на мысль о глубокой взаимосвязи между этими формулами. Более точно замечаем, что совпадающие значения получаются при $l=1, k=m-1$. Подставим в формулу Ведерникова $l=1, k=m-1$:

$$l(m-1)^2 + (6l - l^2)(m-1) + \frac{1}{2}l^3 - 2l^2 + \frac{21}{2}l - 4 = (m-1)^2 + 5(m-1) + \frac{1}{2} - 2 + \frac{21}{2} - 4 = m^2 - 2m + 1 + 5m - 5 + 11 - 6 = m^2 + 3m + 1.$$

Мы получаем в чистом виде формулу Хартсхорна. Это обстоятельство и позволяет нам формулировать наш первый основной результат. Теорема доказана.

Итак, мы уже знаем, среди многообразий Ведерникова встречаются многообразия в точности той же размерности, что и многообразия Хартсхорна и мы строго доказали, что при определенных условиях ($l=1, k=m-1$) формула Ведерникова превращается в формулу Хартсхорна. Это наводит на мысль еще более глобальную – второй наш основной результат.

Теорема 2. Многообразия Хартсхорна содержатся среди многообразий Ведерникова.

Доказательство. Действительно, доказательство формулы Хартсхорна в лемме 9.3 его статьи опирается на конструкцию, упоминаемую в этой же статье в примерах 4.2.3, 4.2.5, 8.2.4, где рефлексивный пучок F ранга 2 с нужными классами Черна получается как расширение из точной тройки

$$0 \rightarrow O \rightarrow F(1) \rightarrow I_Y(1) \rightarrow 0, \quad (*)$$

где O – структурный пучок P_3 , а Y – кривая степени $d=c_2$ в P_3 .

В свою очередь доказательство формулы Ведерникова в лемме 4 его работы опирается на конструкцию, где рефлексивный пучок F ранга 2 с нужными классами Черна получается как расширение из точной тройки

$$0 \rightarrow O \rightarrow F\left(\left[\frac{l+1}{2}\right]\right) \rightarrow I_X(l) \rightarrow 0, \quad (**)$$

где O – структурный пучок P_3 , а X – полное пересечение (кривая) типа $(l, k+1)$ в P_3 .

Сопоставляя (*) и (**), мы легко получаем, что при $l=1$ тройки в точности совпадают. Это позволяет нам говорить, что конструкция Ведерникова (а тем самым и формула Ведерникова) является естественным обобщением конструкции Хартсхорна (а тем самым и формулы Ведерникова). Следовательно, многообразия Хартсхорна и в самом деле образуют подмножество во множестве многообразий Ведерникова. Теорема доказана.

В заключение следует сказать, что статья Ведерникова вышла на 4 года позднее статьи Хартсхорна. Ведерников о работе Хартсхорна знал и даже поместил ее в список литературы, но никаких фундаментальных взаимосвязей между его результатами и результатами Хартсхорна в своей работе он не установил.

Библиографический список

1. Ведерников, В. К. Модули стабильных векторных расслоений ранга 2 на P_3 с фиксированным спектром [Текст] / В. К. Ведерников // Известия РАН. Серия математическая, 1984, т.48, № 5. – С. 986–998.
2. Hartshorne R. Stable reflexive sheaves // Math. Ann., 254, 1980, 121–176.
3. Maruyama M. Moduli of stable sheaves, I // J. Math. Kyoto Univ., 17, 1977, 91–126.

Bibliograficheskijspisok

1. Vedernikov, V. K. Moduli stabil'ny'h vektorny'h rassloeniy ranga 2 na P_3 s fiksirovanny'm spektrom [Tekst] / V. K. Vedernikov // Izvestiya RAN. Seriya matematicheskaya. – 1984. – Т. 48, № 5. – С. 986–998.
2. Hartshorne R. Stable reflexive sheaves // Math. Ann., 254 (1980), 121–176.
3. Maruyama M. Moduli of stable sheaves, I // J. Math. Kyoto Univ., 17, 1977, 91–126.