УДК 519.212.2

Х. Д. Нурлигареев

О многолистных правильных паркетах на плоскости

В настоящей статье дано описание всевозможных многолистных правильных паркетов; указано, какие из них являются конечнолистными и каково число их слоев. Приведены основные идеи и ключевые моменты доказательств. Также статья снабжена большим количеством иллюстраций.

Ключевые слова:правильный паркет, многолистный паркет, Андрей Николаевич Колмогоров.

Kh. D. Nurligareev

About Multifoliate Regular Parquets on the Plane

In the present article the description of various multifoliate regular parquets is given; it is specified which of them are finite-sheeted and what number of their layers is. The main ideas and key moments of proofs are given. Also the article is supplied with a great number of illustrations.

Keywords: regular parquet, multifoliate parquet, Andrey Nikolaevich Kolmogorov.

Введение

В начале 1970-х годов на одном из математических кружков для школьников Андрей Николаевич Колмогоров поставил перед своими подопечными задачу, заключающуюся в классификации всех правильных паркетов. Под *паркетом* он понимал такое покрытие плоскости правильными многоугольниками без пробелов и наложений, при котором любые два многоугольника имеют либо общую сторону, либо общую вершину, либо не пересекаются вовсе. Под *правильным паркетом* понимают такой паркет, который можно наложить самого на себя так, чтобы произвольная данная вершина совместилась с любой другой наперед заданной вершиной. Несложно убедиться, что различных паркетов бесконечно много. А вот правильных паркетов конечное число. Юным ученикам предлагалось найти их все и удостовериться, что других правильных паркетов нет.

Опишем решение исходной задачи в общих чертах [2, 3]. Правильные многоугольники, составляющие паркет, мы будем называть *плитками,* а их вершины –*узлами* паркета. Каждый узел паркета характеризуется множеством плиток, прилегающих к этому узлу, и порядком, в котором они встречаются при обходе данного узла. Этот порядок можно записать в виде конечной последовательности чисел, отвечающих количеству сторон соответствующих плиток, которая называется *типом* данного узла. Ясно, что каждый правильный паркет определяется типом своих узлов. Поэтому для классификации достаточно найти все возможные типы узлов, а потом для каждого найденного типа определить, существует ли правильный паркет, соответствующий этому типу. Под «возможным типом узла» мы подразумеваем конечную последовательность правильных многоугольников со сторонами одной и той же длины, которые можно расположить на плоскости так, чтобы все они пересекались по одной вершине, а любые два соседних пересекались по стороне (при этом два многоугольника, не являющиеся соседними, будут пересекаться по вершине, а первый и последний многоугольники мы считаем соседними).

Возможные типы узлов находятся в соответствии с решениями диофантовых уравнений некоторого специального вида. В ходе решения исходной задачи некоторые возможные типы узлов приходится исключать из рассмотрения, поскольку при попытке продолжить их до правильного паркета мы сталкиваемся с тем, что плитки начинают накладываться друг на друга. Поэтому возникает следующий вопрос: а что будет, если мы разрешим плиткам перекрываться? Вообще говоря, у нас получится многолистный паркет. Будет ли он конечнолистным? И если да, то, каково количество слоев? Ответам на эти вопросы и посвящена настоящая статья.

Автор благодарен В. В. Вавилову, познакомившему его с тематикой этой статьи и сподвигнувшему к изучению поставленных вопросов.

Возможные типы узлов

Перечислим все возможные типы узлов, которые не продолжаются до правильных паркетов.

В каждом узле могут сходиться три, четыре, пять или шесть плиток. Если их шесть, то все они – треугольники (и мы получаем треугольный паркет). Если их пять, то либо это шестиугольник и четыре треугольника, либо два квадрата и три треугольника (причем в последнем случае у нас может быть два типа узла в зависимости от того, в каком порядке мы эти квадраты и треугольники расположим). Все эти три варианта соответствуют правильным паркетам.

Рассмотрим две оставшиеся возможности. Допустим, в узле A сходятся четыре плитки, количество вершин которых есть k, l, m и n соответственно. Тогда, записывая условие того, что сумма примыкающих к A углов равна развернутому, мы имеем равенство:

$$\frac{(k-2)\pi}{k}+\frac{(l-2)\pi}{l}+\frac{(m-2)\pi}{m}+\frac{(n-2)\pi}{n}=2\pi.$$

Преобразования приводят нас к следующему диофантову уравнению:

$$\frac{1}{k}+\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=1.$$

Без ограничения общности считая, что $k\le l\le m\le n$, и решая полученное уравнение при помощи типичных оценок, мы обретаем все его решения: $\{(3,3,4,12), (3,3,6,6), (3,4,4,6), (4,4,4,4)\}$. С учетом различных перестановок элементов эти решения дают нам семь возможных типов узлов, из которых три (4,4,4,4; 3,6,3,6 и 3,4,6,4) достраиваются до правильных паркетов, а остальные четыре нет.

Остается исследовать типы узлов, в которых сходятся три плитки. Тем же методом, что был использован выше, мы получаем уравнение

$$\frac{1}{k}+\frac{1}{l}+\frac{1}{m}=\frac{1}{2}.$$

Оно имеет 10 различных решений: 3,7,42; 3,8,24; 3,9,18; 3,10,15; 3,12,12; 4,5,20; 4,6,12; 4,8,8; 5,5,10; 6,6,6. К правильным паркетам приводят четыре типа узлов: 3,12,12; 4,6,12; 4,8,8; 6,6,6.

Таким образом, из 21 возможного типа узлов 11 соответствуют правильным паркетам. Остальные 10 типов узлов (3,7,42; 3,8,24; 3,9,18; 3,10,15; 4,5,20; 5,5,10; 3,3,4,12; 3,4,3,12; 3,3,6,6 и 3,4,4,6) до правильных паркетов не достраиваются. Они и подлежат дальнейшему исследованию.

Общий случай

Основное соображение, которое мы будем использовать при изучении многолистных паркетов, заключается в том, что множество узлов произвольного конечнолистного паркета является дискретным. Таким образом, если в окрестности некоторой точки плоскости содержится бесконечное количество узлов многолистного паркета, то этот паркет бесконечнолистен. Для проверки этого условия в большей части случаев удается использовать общую теорию, касающуюся дискретных множеств. Суть ее заключается в следующем.

Рассмотрим некоторое дискретное множество V точек плоскости, которое удовлетворяет следующему условию: для любых двух элементов $a,b\in V$ существует такое движение g плоскости, которое переводит a в b, оставляя при этом V неподвижным. Пусть G – группа всех движений, относительно которых V инвариантно. Тогда справедлив следующий результат [1, 4].

Лемма 1. *Если $g\in G$ – вращение, то его порядок не может принимать значения, отличные от 2, 3, 4, 6.*

Интерпретируя множество узлов паркета как указанное дискретное множество V, на основе леммы 1 удается доказать важный факт, сформулированный ниже.

Лемма 2. *Если правильный n-угольник является плиткой конечнолистного правильного паркета, причем в тип паркета число n входит только один раз, то $n\in\{3,4,6,8,12\}$.*

Непосредственно из леммы 2 вытекает интересующий нас результат.

Следствие. *Многолистные правильные паркеты 3,7,42; 3,8,24; 3,9,18; 3,10,15; 4,5,20 и 5,5,10 конечнолистными не являются.*

Частные случаи

Итак, из десяти многолистных правильных паркетов шесть оказались бесконечнолистными. Осталось изучить четыре паркета: 3,3,4,12; 3,4,3,12; 3,3,6,6 и 3,4,4,6. Первые три из них также оказываются бесконечнолистными, однако методы, рассмотренные в предыдущем разделе, для доказательства этого факта не годятся. Поэтому для каждого из указанных паркетов мы непосредственным образом предъявим пару несоизмеримых параллельных переносов из групп движений плоскости, оставляющих эти паркеты инвариантными. Таким образом, будет показано, что множество узлов каждого из них дискретным не является.

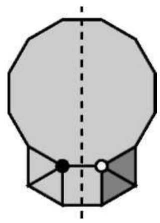

Рис. 1

Рассмотрим какой-нибудь узел паркета 3,3,4,12 и выясним, как выглядят окрестности плиток, если мы начнем строить паркет из этого узла. Для того чтобы построить такую окрестность, будем двигаться от данного узла по ребрам фиксированной плитки к другому узлу паркета, симметрично отражая плитки, сходящиеся в узле, относительно срединного перпендикуляра к ребру. На рис. 1 показан один шаг такого движения. Исходный узел отмечен черным, следующий по ходу движения – белым. Ось, относительно которой мы отражаем, изображена пунктиром, исходные плитки закрашены светло-серым, новые – темно-серым.

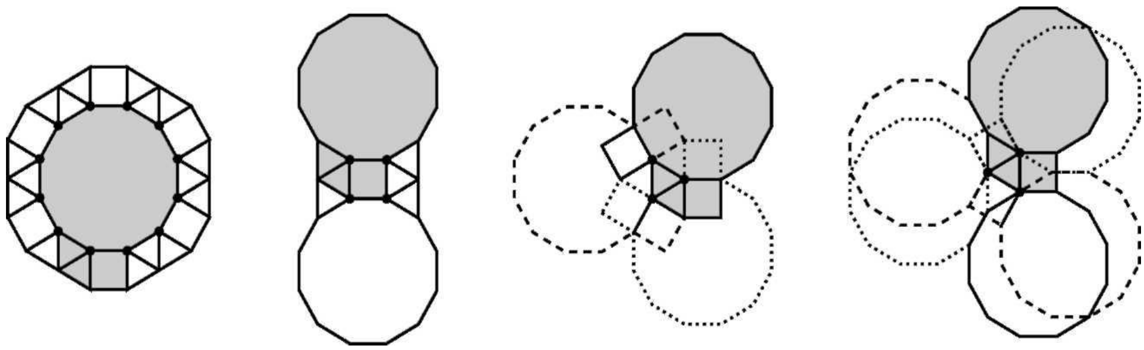

Рис. 2

Рис. 2 иллюстрирует получающиеся окрестности разных плиток (здесь светло-серым закрашены исходные плитки, а разными типами линий обозначены границы накладывающихся друг на друга многоугольников). Исходя из того, как выглядят окрестности треугольников, мы можем утверждать, что многолистный правильный паркет 3,3,4,12 содержит в себе треугольный паркет T в качестве подпаркета. С другой стороны, считая длину стороны плитки паркета равной единице, рассмотрение окрестности квадрата показывает, что в исходном многолистном паркете содержится также подпаркет T' типа (6)3, сдвинутый относительно T на величину $d_1 = \left(1+\sqrt{3}\right)$. Это означает, что в группе движений плоскости, оставляющей паркет 3,3,4,12 неизменным, содержатся несоизмеримые параллельные переносы (так как d_1 несоизмеримо с $\sqrt{3}$) Как было отмечено выше, отсюда следует, что правильный паркет 3,3,4,12 конечнолистным не является.

Аналогичным образом происходит исследование паркета 3,4,3,12. Рассматривая окрестности входящих в него плиток (они изображены на рис. 3), мы можем заметить, что в него в качестве подпаркетов входят два треугольных паркета. Более ясно это видно из рис. 4, на котором построение многолистного паркета осуществляется посредством накладывания друг на друга окрестностей треугольника (для облегчения иллюстрации двенадцатиугольники на рис. 4 не изображены). Эти два подпаркета сдвинуты друг относительно друга на величину $d_2 = \left(1+\sqrt{3}\right)$, а значит, как и в предыдущем случае, паркет 3,4,3,12 является бесконечнолистным.

Согласно той же схеме мы поступаем и с паркетом 3,4,4,6. Окрестности его плиток изображены на рис. 5, а некоторые из слоев – на рис. 6.

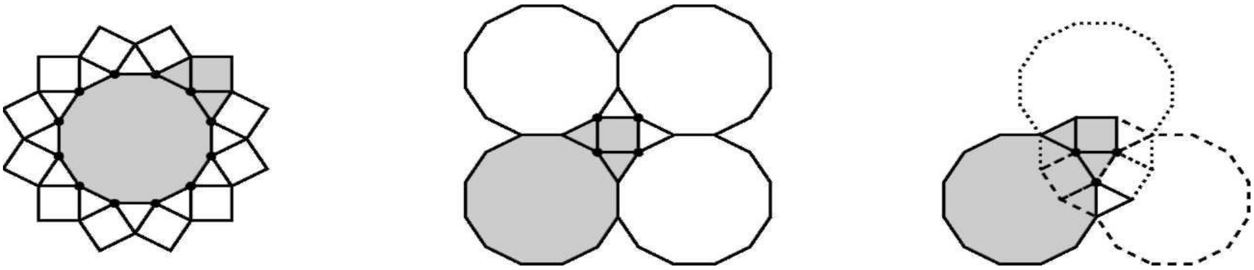

Рис. 3

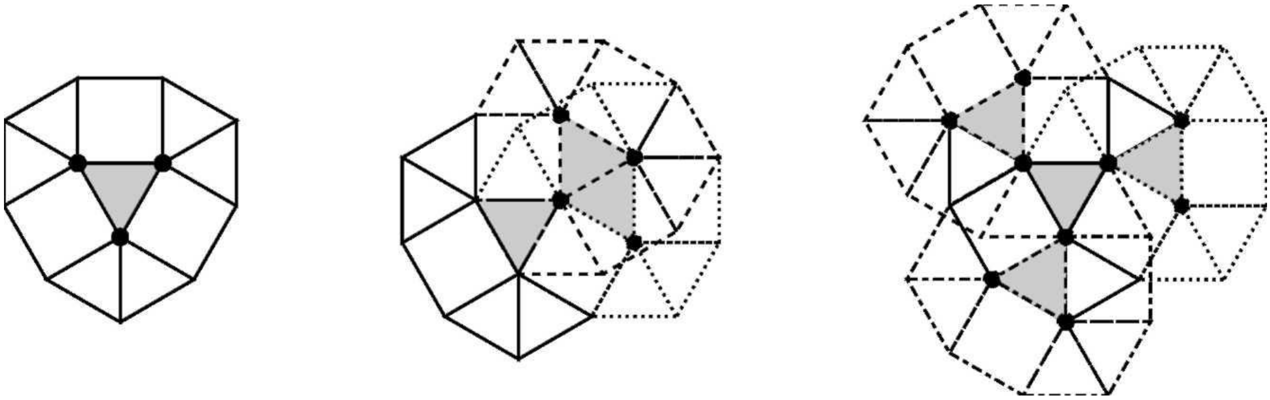

Рис.4

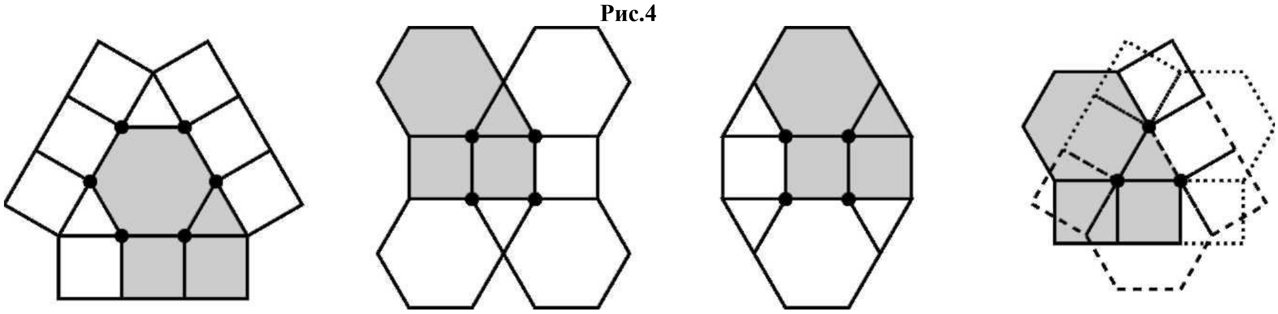

Рис.5.

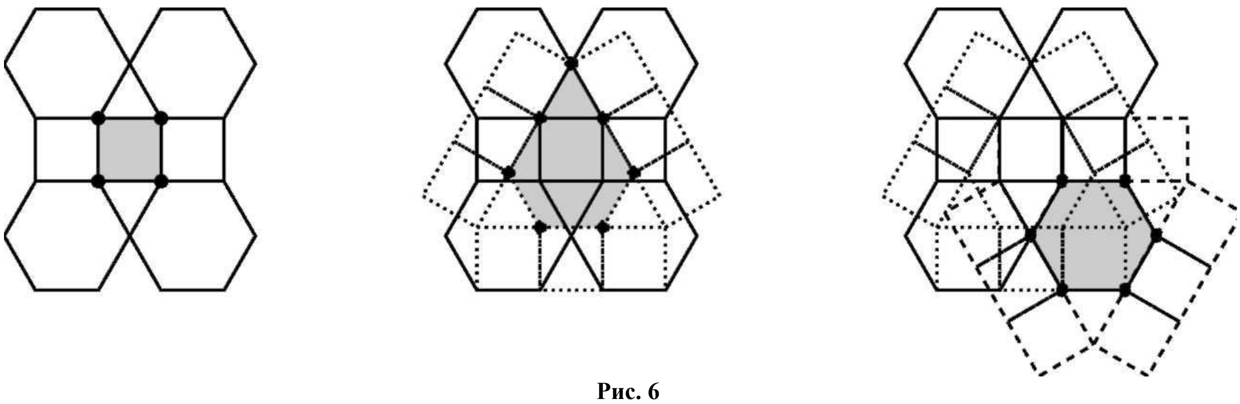

Рис. 6

Единственное отличие от предыдущих двух паркетов заключается в том, что здесь для доказательства того, что множество узлов паркета не является дискретным, мы будем выделять не треугольные подпаркеты, а бесконечные полосы квадратов единичной ширины. Из второй иллюстрации на рис. 6 ясно, что существуют параллельные полосы, расстояние между нижними границами которых равно $\sqrt{3}$. А из третьей иллюстрации видно, что существуют также такие полосы, расстояние между нижними границами которых составляет $d_3 = \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (более того, квадраты этих полос сдвинуты друг относительно друга по горизонтали). Из несоизмеримости этих двух чисел мы и делаем вывод, что правильный паркет 3,4,4,6 конечнолистным не является.

Остается исследовать последний из нашего списка паркетов – 3,3,6,6. Он единственный оказывается конечнолистным. Это следует из того факта, что множество всех его узлов дискретно (и совпадает с множеством узлов паркета (6)3, который можно рассматривать как подпаркет искомого паркета), а количество различных расположений плиток, сходящихся в одном и том же фиксированном узле, конечно. Окрестности плиток представлены на рис. 7, а все возможные расположения плиток – на рис. 8 (накрываемая точка отмечена белым).

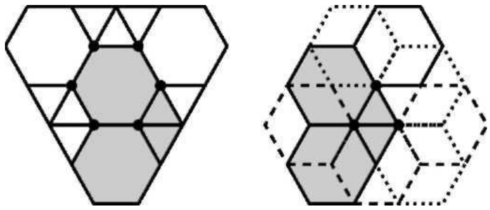

Рис. 7

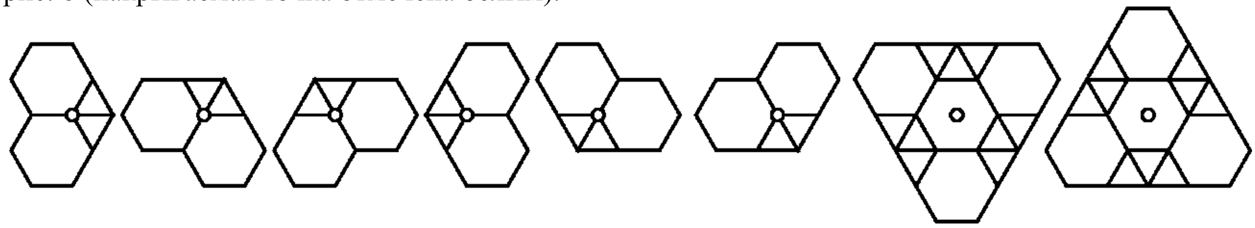

Рис. 8

Нетрудно убедиться, что все варианты, указанные на рис. 8, реализуются. Таким образом, правильный паркет 3,3,6,6 является восьмилистным.

Заключение

Итак, исследование всех возможных типов узлов дало следующие результаты.

1. Всего возможных типов узлов 21.
2. 11 типов узлов соответствуют однолистным паркетам. Это стандартные правильные паркеты: (6)3; (4)4; (3)6; 3,12,12; 4,8,8; 3,6,3,6; (4)3,6; 3,4,6,4; (3)3,(2)4; (2)3,4,3,4; 4,6,12.
3. Один тип узла соответствует восьмилистному паркету: 3,3,6,6.
4. Остальные девять типов узлов соответствуют бесконечнолистным паркетам. Это правильные паркеты 3,7,42; 3,8,24; 3,9,18; 3,10,15; 4,5,20; 5,5,10; 3,3,4,12; 3,4,3,12; 3,4,4,6.

Библиографический список

1. Кокстер, Г. С. М. Введение в геометрию [Текст] / Г. С. М. Кокстер. – М. : Наука, 1966.
2. Колмогоров, А. Н. Паркеты из правильных многоугольников [Текст] / А. Н. Колмогоров // Квант. – 1986. – № 8. – С. 3–7.
3. Михайлов, О. Одиннадцать правильных паркетов [Текст] / О. Михайлов // Квант. – 1979. – № 2. – С. 9–14.
4. Нурлигареев, Х. Д. О правильных конечнолистных паркетах на плоскости [Текст] / Х. Д. Нурлигареев // Математическое образование. – 2012. – № 1. – С. 23–29.

Bibliograficheskij spisok

1. Kokster, G. S. M. Vvedenie v geometriju [Tekst] / G. S. M. Kokster. – M. : Nauka, 1966.
2. Kolmogorov, A. N. Parkety iz pravil'nyh mnogougol'nikov [Tekst] / A. N. Kolmogorov // Kvant. – 1986. – № 8. – S. 3–7.
3. Mihajlov, O. Odinnadcat' pravil'nyh parketov [Tekst] / O. Mihajlov // Kvant. – 1979. – № 2. – S. 9–14.
4. Nurligareev, H. D. O pravil'nyh konechnolistnyh parketah na ploskosti [Tekst] / H. D. Nurligareev // Matematicheskoe obrazovanie. – 2012. – № 1. – S. 23–29.