

В. Ш. Ройтенберг

О структуре пространства уравнений Абеля с периодическими коэффициентами

Банахово пространство приведенных уравнений Абеля с периодическими коэффициентами является объединением множеств Σ^0 , Σ^1 и Σ^2 , где Σ^0 – множество грубых уравнений, Σ^1 (Σ^2) – множество уравнений первой(второй) степени негрубости. Множество Σ^0 состоит из двух связных компонент. Множество Σ^1 является аналитическим подмногообразием коразмерности один и состоит из двух связных компонент. Множество Σ^2 является связным аналитическим подмногообразием коразмерности два.

Ключевые слова: приведенные уравнения Абеля с периодическими коэффициентами, грубые уравнения, уравнения первой и второй степеней негрубости.

V. Sh. Roitenberg

On the Structure of the Space of Reduced Abel's Equations with Periodic Coefficients

The Banach space of reduced Abel's equations with periodic coefficients is the union of sets Σ^0 , Σ^1 and Σ^2 , where Σ^0 is the set of structurally stable equations, Σ^1 (Σ^2) is the set of equations of the first (second) order instability. The set Σ^0 consists of two connected components. The set Σ^1 is the analytical submanifold of codimension one and consists of two connected components. The set Σ^2 is the connected analytical submanifold of codimension two.

Keywords: reduced Abel's equations with periodic coefficients, structurally stable equations, equations of the first and second order instability.

Будем рассматривать *приведенные уравнения Абеля*

$$a: \quad \dot{x} = x^3 + a_1(t)x^2 + a_2(t)x + a_3(t)$$

с 1-периодическими коэффициентами $a_i \in C^r$ ($r \geq 0$). Обозначим A_r^* – множество таких уравнений. Биекция $A_r^* \ni a \mapsto (a_1, a_2, a_3) \in C^r(\mathbf{R}/\mathbf{Z}, \mathbf{R}^3)$ вводит в A_r^* структуру банахова пространства с нормой $\|a\| = \max_{m=1,2,3} \max_{k=0,\dots,r} \max_t |a_m^{(k)}(t)|$.

Уравнение $a \in A_r^*$ определяет автономную систему

$$\dot{x} = x^3 + a_1(s)x^2 + a_2(s)x + a_3(s), \quad \dot{s} = 1$$

на цилиндре $\mathbf{R} \times \mathbf{R}/\mathbf{Z}$. Ее траектории будем называть *траекториями уравнения a* . Для приведенного уравнения Абеля бесконечность устойчива в том смысле, что при достаточно большом $d > 0$ траектории уравнения в точках $\{\pm d\} \times \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ направлены из $[-d, d] \times \mathbf{R}/\mathbf{Z}$.

Как известно [2], сумма кратностей 1-периодических решений (замкнутых траекторий) уравнения $a \in A_r^*$ не превосходит трех. Поэтому

$$A_r^* = \Sigma^0 \cup \Sigma^1 \cup \Sigma^2, \text{ где } \Sigma^0 = \Sigma_1^0 \cup \Sigma_3^0, \text{ а } \Sigma_k^0 \ (k = 1, 3)$$

состоит из уравнений, имеющих ровно k 1-периодических решений и эти решения – однократные, $\Sigma^1 = \Sigma_1^1 \cup \Sigma_r^1$ состоит из уравнений, имеющих одно 1-периодическое решение $x = p_1(t)$ и одно двукратное 1-периодическое решение $x = p_2(t)$, причем

$$p_2(t) < p_1(t) \text{ (} p_2(t) > p_1(t) \text{)} \text{ для } a \in \Sigma_1^1 \text{ (} a \in \Sigma_r^1 \text{), } \Sigma^2$$

состоит из уравнений, имеющих единственное трехкратное 1-периодическое решение. Согласно [3, 4] уравнение $a \in A_r^*$ является грубым тогда и только тогда, когда $a \in \Sigma^0$, множество Σ^0 открыто и всюду плотно в A_r^* ; уравнение $a \in A_r^*$ имеет первую степень негрубости тогда и только тогда, когда $a \in \Sigma^1$, множество Σ^1 открыто и всюду плотно в $A_r^* \setminus \Sigma^0$. Очевидно, что уравнения $a \in \Sigma^2$ имеют вторую степень негрубости.

Здесь мы докажем следующее утверждение.

Теорема. 1) Множества Σ_1^0 и Σ_3^0 – компоненты линейной связности множества Σ^0 ; 2) Множества Σ_1^1 и Σ_r^1 – компоненты линейной связности множества Σ^1 ; 3) множество Σ^2 линейно связно; 4) множество $\Sigma^1 \cup \Sigma^2$ линейно связно и является границей каждого из множеств Σ_1^0 и Σ_3^0 ; 5) Множества Σ^1 и Σ^2 являются вложенными аналитическим подмногообразиями A_r^* соответственно коразмерностей один и два.

Доказательство. Пусть $q(t)$ – 1-периодическая C^{r+1} -функция. Диффеоморфизм $g: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, заданный формулой

$$g(x, t) = (x - q(t), t),$$

индуцирует гомеоморфизм $g^*: A_r^* \rightarrow A_r^*$, переводящий уравнение (1) в уравнение

$$g^*(a): \dot{x} = x^3 + a_1^*(t)x^2 + a_2^*(t)x + a_3^*(t),$$

где

$$a_1^* = a_1 + 3q, \quad a_2^* = a_2 + 2a_1q + 3q^2, \quad a_3^* = a_3 + a_2q + a_1q^2 + q^3 - \dot{q}.$$

Докажем линейную связность Σ_1^0 . Пусть уравнение $a \in \Sigma_1^0$, а $p(t)$ – его 1-периодическое решение. Возьмем в определении g функцию $q(t) = \mu p(t)$ и рассмотрим семейство уравнений

$$a'' = g^*(a) \in \Sigma_1^0, \quad \mu \in [0; 1].$$

Уравнение a^0 совпадает с a , а уравнение a^1 имеет вид

$$\dot{x} = x(x^2 + a_1^*(t)x + a_2^*(t)).$$

Так как уравнение $a^1 \in \Sigma_1^0$, то его периодическое решение $x = 0$ неустойчивое и характеристический показатель $\int_0^1 a_2^*(t) dt > 0$. Ясно, что существует такое число $N > 0$, что

$$x^2 + va_1^*(t)x + va_2^*(t) > -N \text{ при всех } t \in \mathbf{R}, x \in \mathbf{R}, v \in [0; 1]. \quad (1)$$

Рассмотрим семейство уравнений

$$\hat{a}^\mu: \dot{x} = x(x^2 + a_1^*(t)x + a_2^*(t) + \mu N), \mu \in [0; 1].$$

При любом $\mu \in [0; 1]$ уравнение $\hat{a}^\mu$ имеет 1-периодическое решение $x = 0$ с характеристическим показателем $\int_0^1 (a_2^*(t) + \mu N) dt > 0$ и потому неустойчивое. Покажем, что при любом $\mu \in [0; 1]$ уравнение $\hat{a}^\mu$ не имеет других периодических решений и потому принадлежит Σ_1^0 . Множество M_0 тех $\mu \in [0; 1]$, для которых уравнение $\hat{a}^\mu$ не имеет периодических решений, отличных от $x = 0$, открыто в $[0; 1]$ и содержит нуль. Если множество $[0; 1] \setminus M_0$ не пусто, то оно содержит наименьший элемент $\mu_0 > 0$. Ясно, что $\hat{a}^{\mu_0} \in \Sigma^1$, ибо в противном случае $\hat{a}^{\mu_0} \in \Sigma_3^0$, а потому и $\hat{a}^\mu \in \Sigma_3^0$ при всех μ близких к μ_0 , в противоречии с выбором μ_0 . Пусть $x(t, u, \mu)$ – решение уравнения $\hat{a}^\mu$, удовлетворяющее начальному условию $x(0, u, \mu) = u$. Оно аналитически зависит от (u, μ) [1]. Пусть $x(t, u_0, \mu_0)$ – не-

нулевое 1-периодическое решение уравнения $\hat{a}^{\mu_0}$. Для определенности будем считать $u_0 > 0$. При μ близких к μ_0 в некоторой окрестности отрезка $[0, u_0]$ определена функция последования $P(\cdot, \mu) = x(1, \cdot, \mu)$, при этом $P(0, \mu_0) = 0$, $P(u_0, \mu_0) = u_0$. Производная $x'_\mu(t, u_0, \mu_0)$ удовлетворяет уравнению в вариациях $(x'_\mu)'_t = b(t)x'_\mu + Nx(t, u_0, \mu_0)$, где $b(t)$ – некоторая функция, и начальному условию $x'_\mu(0, u_0, \mu_0) = 0$. Следовательно,

$$P'_\mu(u_0, \mu_0) = N \int_0^1 x(s, u_0, \mu_0) \exp \int_s^1 b(\tau) d\tau ds.$$

Так как $u_0 > 0$, то $x(t, u_0, \mu_0) > 0$ и $P'_\mu(u_0, \mu_0) > 0$. Поэтому при некотором μ , достаточно близком к μ_0 , но меньшем μ_0 , $P(u_0, \mu) < u_0$. Так как решение $x = 0$ уравнения $\hat{a}^\mu$ неустойчивое, то $P(u_1, \mu) > u_1$ при некотором $u_1 \in (0, u_0)$. Но тогда найдется $u_2 \in (u_1, u_0)$, для которого $P(u_2, \mu) = u_2$, то есть уравнение $\hat{a}^\mu$ имеет ненулевое периодическое решение в противоречие с выбором μ_0 . Аналогичное противоречие получаем и при $u_0 < 0$. Поэтому $M_0 = [0, 1]$, то есть $\forall \mu \in [0; 1] \hat{a}^\mu \in \Sigma_1^0$. Рассмотрим теперь семейство уравнений

$$a^\mu \in A_r^* : \dot{x} = x(x^2 + (1 - \mu)(a_1(t)x + a_2(t)) + N), \mu \in [0; 1].$$

Ввиду (1) любое ненулевое решение уравнения a^μ является либо возрастающей, либо убывающей функцией потому не периодически. Следовательно, $\forall \mu \in [0; 1] a^\mu \in \Sigma_1^0$. Аналогично $\forall \mu \in [0; 1] a^\mu \in \Sigma_1^0$, где $a^{**} : \dot{x} = x^3 + ((1 - \mu)N + \mu)x$. Так как $a^{**0} = a^1_*$, $a^0_* = a^1$, $a^0 = a$, а уравнение a^{**1} совпадает с уравнением $\dot{x} = x^3 + x$, то произвольное уравнение $a \in \Sigma_1^0$ и уравнение $\dot{x} = x^3 + x$ можно соединить в Σ_1^0 путем. Следовательно, Σ_1^0 линейно связно.

Докажем линейную связность Σ_3^0 . Как и в случае $a \in \Sigma_1^0$ соединим уравнение $a \in \Sigma_3^0$ путем в Σ_3^0 с уравнением

$$a^1 : \dot{x} = x(x^2 + a^*_1(t)x + a^*_2(t)),$$

для которого $x = 0$ – устойчивое 1-периодическое решение с характеристическим показателем $\int_0^1 a^*_2(t) dt < 0$. Кроме $x = 0$, уравнение a^1 будет иметь неустойчивые периодические решения $p_-(t) < 0$ и $p_+(t) > 0$. Рассмотрим семейство уравнений

$$\hat{a}^\mu : \dot{x} = x(x^2 + (1 - \mu)a^*_1(t)x + (1 - \mu)a^*_2(t) - \mu), \mu \in [0; 1].$$

Так как для любого $\mu \in [0; 1] x = 0$ – 1-периодическое решение уравнения $\hat{a}^\mu$ с характеристическим показателем $(1 - \mu) \int_0^1 a^*_2(t) dt - \mu < 0$, а бесконечность устойчива, то в каждой из областей $x > 0$ и $x < 0$ имеются замкнутые траектории уравнения. Но это возможно только, если они гиперболические, то есть $\hat{a}^\mu \in \Sigma_3^0$. Таким образом, любое уравнение $a \in \Sigma_3^0$ можно соединить путем в Σ_3^0 с уравнением $\hat{a}^1 : \dot{x} = x(x^2 - 1)$ и потому Σ_3^0 линейно связно. Так как уравнения из Σ^0 , принадлежащие одной компоненте линейной связности, имеют одинаково число замкнутых траекторий, то Σ^0 состоит из двух компонент Σ_1^0 и Σ_3^0 .

Если уравнение $\tilde{a} \in \Sigma^1$ достаточно близко к уравнению $a \in \Sigma^1_l$, то и $\tilde{a} \in \Sigma^1_l$. Поэтому уравнения из Σ^1_l и из Σ^1_r принадлежат разным компонентам линейной связности множества Σ^1 . Докажем линейную связность Σ^1_l . Доказательство линейной связности Σ^1_r аналогично. Пусть $a \in \Sigma^1_l$. Как и вы-

ше, уравнение a можно соединить путем в Σ_l^1 с уравнением $a^1: \dot{x} = x(x^2 + a_1^*(t)x + a_2^*(t))$, имеющим двукратное периодическое решение $x = 0$ и однократное периодическое решение $p_1(t) > 0$. Рассмотрим семейство уравнений

$$\hat{a}^\mu: \dot{x} = x^3 + ((1-\mu)a_1^*(t) - \mu)x^2 + a_2^*(t)x, \mu \in [0;1].$$

Характеристический показатель $h = \int_0^1 a_2^*(t)dt$ его периодического решения $x = 0$ не зависит от μ . Так как $\hat{a}^0 = a^1$, то $h = 0$. Пусть $x(t, u, \mu)$ – решение уравнения $\hat{a}^\mu$, удовлетворяющее начальному условию $x(0, u, \mu) = u$. Тогда

$$x'_u(t, 0, \mu) = \exp \int_0^t a_2^*(s)ds \text{ и } P'_u(0, \mu) = x'_u(1, 0, \mu) = 1.$$

Производная $x''_{uu}(t, 0, \mu)$ удовлетворяет уравнению в вариациях

$$(x''_{uu})'_t = a_2^*(t)x''_{uu} + 2((1-\mu)a_1^*(t) - \mu)x_u'^2(t, 0, \mu)$$

и начальному условию $x''_{uu}(0, 0, \mu) = 0$.

Поэтому

$$P''_{uu}(0, \mu) = \int_0^1 2((1-\mu)a_1^*(t) - \mu) \exp \int_0^t a_2^*(s)ds dt = 2(1-\mu)P''_{uu}(0, 0) - 2\mu \int_0^1 \exp \int_0^t a_2^*(s)ds dt.$$

Так как $\hat{a}^0 = a^1$, то $P''_{uu}(0, 0) < 0$, потому при любом $\mu \in [0;1]$ и $P''_{uu}(0, \mu) < 0$, то есть $x = 0$ – двукратное периодическое решение уравнения $\hat{a}^\mu$ и, значит, $\hat{a}^\mu \in \Sigma_l^1$. Уравнение $\hat{a}^1$ имеет вид $\dot{x} = x^3 - x^2 + a_2^*(t)x$. Рассмотрим семейство уравнений

$$\bar{a}^\mu: \hat{a}^\mu: \dot{x} = x^3 - x^2 + (1-\mu)a_2^*(t)x, \mu \in [0;1].$$

Характеристический показатель нулевого решения этих уравнений $(1-\mu) \int_0^1 a_2^*(t)dt = 0$. Как и выше, получаем

$$P''_{uu}(0, \mu) = - \int_0^1 2 \exp \int_0^t a_2^*(s)ds dt < 0.$$

Поэтому при любом $\mu \in [0;1]$ $\bar{a}^\mu \in \Sigma_l^1$. Так как $\bar{a}^0 = \hat{a}^1$, а $\bar{a}^1: \dot{x} = x^3 - x^2$, то любое уравнение $a \in \Sigma_l^1$ можно соединить путем в Σ_l^1 с уравнением $\dot{x} = x^3 - x^2$. Таким образом, Σ_l^1 линейно связно.

Доказательство линейной связности Σ^2 и $\Sigma^1 \cup \Sigma^2$ мы опустим. Оно аналогично доказательству линейной связности Σ_l^1 .

Покажем, что Σ^1 – вложенное аналитическое подмногообразие коразмерности один. Правая часть уравнения Абеля $\tilde{a}$ аналитически зависит от $\tilde{a} \in A_r$. Поэтому его решение $x = \tilde{x}(t, u, \tilde{a})$ – аналитическая функция от $(u, \tilde{a})$ [1]. Пусть $\tilde{x}(t, \hat{u}, a)$ – двукратное периодическое решение уравнения $a \in \Sigma^1$. Обозначим $P(u, \tilde{a}) = \tilde{x}(1, u, \tilde{a})$ – функцию последования. Тогда

$$P(\hat{u}, a) - \hat{u} = P'_u(\hat{u}, a) - 1 = 0, \quad P''_{uu}(\hat{u}, a) \neq 0.$$

По теореме о неявной функции в некоторой окрестности W уравнения a существует единственная аналитическая функция $u(\cdot)$ такая, что

$$\forall \tilde{a} \in W \quad P'_u(u(\tilde{a}), \tilde{a}) - 1 = 0 \text{ и } u(a) = \hat{u}.$$

Пусть $f(\tilde{a}) = P(u(\tilde{a})) - u(\tilde{a})$. Тогда для достаточно малой окрестности $V \subset W$ уравнения a имеем

$$V \cap \Sigma^1 = \{\tilde{a} \in V: f(\tilde{a}) = 0\}.$$

Отсюда будет следовать, что Σ^1 – вложенное аналитическое подмногообразие коразмерности один, если мы покажем, что $f'(a) \neq 0$. Пусть $h^1: \dot{x} = x^3 + 1$. Рассмотрим уравнение

$$a + \tau h^1: \dot{x} = x^3 + a_1(t)x^2 + a_2(t)x + a_3(t) + \tau.$$

Обозначим $x(t, u, \tau) := \tilde{x}(t, u, a + \tau h^1)$. Производная $x'_\tau(t, \hat{u}, 0)$ удовлетворяет уравнению $(x'_\tau)'_t = b(t)x'_\tau + 1$, где $b(t)$ – некоторая функция, и начальному условию $x'_\tau(0, \hat{u}, 0) = 0$. Следовательно,

$$dP(\hat{u}, a + \tau h^1)/d\tau|_{\tau=0} = x'_\tau(1, \hat{u}, 0) = \int_0^1 \exp \int_s^1 b(\tau) d\tau ds > 0.$$

Так как $P'_u(\hat{u}, a) - 1 = 0$, то

$$f'(a)h^1 = \frac{d}{d\tau} f(a + \tau h^1)|_{\tau=0} = \frac{d}{d\tau} P(\hat{u}, a + \tau h^1)|_{\tau=0} \neq 0$$

и потому $f'(a) \neq 0$.

Ясно, что при достаточно малом $\tau > 0$ и $\varepsilon = \operatorname{sgn} P''_{uu}(\hat{u}, a)$ уравнение $a + \varepsilon \tau h^1$ принадлежит Σ^0_1 а уравнение $a - \varepsilon \tau h^1 \in \Sigma^0_3$. Поэтому Σ^1 входит в границу как Σ^0_1 , так и Σ^0_3 . В любой окрестности уравнения $a \in \Sigma^2$ есть уравнение из Σ^1 , а потому и из Σ^0_1 и Σ^0_3 . Таким образом, $\Sigma^1 \cup \Sigma^2$ является границей каждого из множеств Σ^0_1 и Σ^0_3 .

Для доказательства того, что Σ^2 – вложенное аналитическое подмногообразие коразмерности два, достаточно для любого уравнения $a \in \Sigma^2$ найти его окрестность V и аналитическое отображение $f: V \rightarrow \mathbf{R}^2$ такие, что $f'(a): A^*_r \rightarrow \mathbf{R}^2$ – сюръективное отображение, а $V \cap \Sigma^2 = \{\tilde{a} \in V: f(\tilde{a}) = 0\}$. Пусть $p(t)$ – периодическое решение уравнения $a \in \Sigma^2$. Отображение $g^*: A^*_r \rightarrow A^*_r$, построенное по $g(x, t) = (x - p(t), t)$, является аналитическим диффеоморфизмом, переводящим уравнение a в уравнение $g^*(a) \in \Sigma^2$, имеющее периодическое решение $x = 0$. Поэтому отображение $f: V \rightarrow \mathbf{R}^2$ достаточно построить в окрестности уравнения $a \in \Sigma^2$, с периодическим решением $x = 0$.

Для функции последования $P(u, a)$ имеем

$$P(0, a) = P'_u(0, a) - 1 = P''_{uu}(0, a) = 0, P'''_{uuu}(0, a) \neq 0.$$

По теореме о неявной функции отсюда следует, что в некоторой окрестности W уравнения a существует единственная аналитическая функция $u(\cdot)$, такая, что

$$\forall \tilde{a} \in W \quad P''_{uu}(u(\tilde{a}), \tilde{a}) = 0 \quad \text{и} \quad u(a) = 0.$$

Пусть

$$f_1(\tilde{a}) = P(u(\tilde{a}), \tilde{a}) - u(\tilde{a}), \quad f_2(\tilde{a}) = P'_u(u(\tilde{a}), \tilde{a}) - 1, \quad f = (f_1, f_2): W \rightarrow \mathbf{R}^2.$$

Тогда для достаточно малой окрестности $V \subset W$ уравнения a имеем $V \cap \Sigma^2 = \{\tilde{a} \in V: f(\tilde{a}) = 0\}$.

Осталось доказать сюръективность $f'(a)$. Пусть

$$h^1: \dot{x} = x^3 + 1, h^2: \dot{x} = x^3 + x.$$

Как и выше, получаем

$$dP(0, a + \tau h^1)/d\tau|_{\tau=0} > 0.$$

Пусть теперь $x = x(t, u, \tau)$ – решение уравнения

$$a + \tau h^2: \dot{x} = x^3 + a_1(t)x^2 + (a_2(t) + \tau)x,$$

удовлетворяющее начальному условию $x(0, u, \tau) = u$. Тогда $x(t, 0, \tau) \equiv 0$ и

$$dP(0, a + \tau h^2)/d\tau|_{\tau=0} = x'_\tau(1, 0, 0) = 0.$$

Производная $x''_{u\tau}(t, 0, 0)$ удовлетворяет уравнению

$$(x''_{u\tau})'_t = a_2(t)x''_{u\tau} + c(t), \text{ где } c(t) = x'_u(t, 0, 0) > 0,$$

и начальному условию $x''_{u\tau}(0, 0, 0) = 0$. Следовательно,

$$dP'_u(0, a + \tau h^2) / d\tau \Big|_{\tau=0} = x''_{u\tau}(1, 0, 0) = \int_0^1 c(t) \exp \int_s^1 a_2(\tau) d\tau ds > 0.$$

Учитывая равенства $P'_u(0, a) - 1 = P''_{uu}(0, a) = 0$, получаем

$$d f_1(a + \tau h^1) / d\tau \Big|_{\tau=0} = dP(0, a + \tau h^1) / d\tau \Big|_{\tau=0} \neq 0, d f_1(a + \tau h^2) / d\tau \Big|_{\tau=0} = dP(0, a + \tau h^2) / d\tau \Big|_{\tau=0} = 0, \\ d f_2(\hat{a} + \tau h^2) / d\tau \Big|_{\tau=0} = dP'_u(0, a + \tau h^2) / d\tau \Big|_{\tau=0} \neq 0.$$

Поэтому $\det(d f_i(a + \tau h^i) / d\tau \Big|_{\tau=0}) \neq 0$ и $f'(a): A_r^* \rightarrow \mathbf{R}^2$ – сюръективно.

Библиографический список

1. Лефшец, С. Геометрическая теория дифференциальных уравнений [Текст] / С. Лефшец. – М. : Изд-во иностранной литературы, 1961. – 387 с.
2. Плисс, В. А. О числе периодических решений уравнений с полиномиальной правой частью [Текст] / В. А. Плисс // ДАН СССР. – 1959. – Т. 127, № 5. – С. 965–968.
3. Ройтенберг, В. Ш. О грубости и первой степени негрубости обобщенных уравнений Абеля с периодическими коэффициентами [Текст] / В. Ш. Ройтенберг // Математика и математическое образование. Теория и практика : Межвуз. сб. науч. тр. – Вып. 8. – Ярославль, 2012. – С. 26–38.
4. Ройтенберг, В. Ш. О грубости уравнений Абеля с периодическими коэффициентами [Текст] / В. Ш. Ройтенберг // Ярославский педагогический вестник. – 2012. – Т. III (Естественные науки). – № 3. – С. 16–21.

Bibliograficheskiy spisok

1. Lefshec, S. Geometricheskaja teorija differencial'nyh uravnenij [Tekst] / S. Lefshec. – M. : Izd-vo inostrannoju literatury, 1961. – 387 s.
2. Pliss, V. A. O chisle periodicheskikh reshenij uravnenij s polinomial'noj pravoju chast'ju [Tekst] / V. A. Pliss // DAN SSSR. – 1959. – Т. 127, № 5. – С. 965–968.
3. Rojtenberg, V. Sh. O grubosti i pervoj stepeni negrubosti obobshhennyh uravnenij Abelja s periodicheskimimi kojefficientami [Tekst] / V. Sh. Rojtenberg // Matematika i matematicheskoe obrazovanie. Teorija i praktika : Mezhvuz. sb. nauch. tr. – Вып. 8. – Jaroslavl', 2012. – С. 26–38.
4. Rojtenberg, V. Sh. O grubosti uravnenij Abelja s periodicheskimi kojefficientami [Tekst] / V. Sh. Rojtenberg // Jaroslavskij pedagogicheskij vestnik. – 2012. – Т. III (Estestvennye nauki). – № 3. – С. 16–21.