УДК 372.851

Г. Г. Хамов, Л. Н. Тимофеева

Формирование исследовательских компетенций будущих учителей математики при изучении теоретико-числового материала

В статье рассматриваются вопросы, связанные с формированием исследовательских компетенций студентов педагогических вузов при изучении теоретико-числового материала. Приводятся примеры заданий на составление и решение диофантовых уравнений, позволяющих вовлечь обучаемых в исследовательскую деятельность, повысить мотивацию обучения.

Ключевые слова: исследовательская компетенция, исследовательская деятельность, диофантово уравнение, сравнение, первообразный корень, двучленное сравнение.

G. G. Khamov, L. N. Timofeeva

Formation of Research Competences of Future Mathematics Teachers While Studying Number-Theoretic Material

In the article the questions connected with the formation of the research competences of students of pedagogical universities foe the study of number-theoretical material are considered. The examples of the tasks for working out and solving the diophantine equations allowing to involve students in research activity to increase the motivation of training are given.

Keywords: research competence, research activity, diophantine equation, comparison, primitive root, binomial comparison.

Современное педагогическое образование ориентируется на воспитание профессионально компетентных педагогов, которые не только сами владеют приемами творческого мышления, рациональных действий по получению новых знаний, но и способны научить исследовательской деятельности учащихся. Соответственно, актуальной проблемой становится смещение акцентов с репродуктивной деятельности студентов в процессе обучения на самостоятельную исследовательскую деятельность в рамках компетентностного подхода [1].

Компетентностный подход предполагает организацию обучения, при которой обеспечивается формирование основных компетенций, позволяющих будущим педагогам не только успешно работать в профессиональной сфере, но и действовать в ней самостоятельно, творчески. Ведущая роль отводится именно исследовательским компетенциям.

Исследовательская компетенция – это совокупность знаний в определенной области, наличие исследовательских умений (видеть и решать проблемы на основе выдвижения и обоснования гипотез, ставить цель и планировать деятельность, осуществлять сбор и анализ необходимой информации, выбирать оптимальные методы, выполнять эксперимент, представлять результаты исследования), наличие способности применять эти знания и умения в конкретной деятельности [4].

В условиях образовательной практики не наблюдается максимального стимулирования исследовательской направленности учебной деятельности студентов, что связано и со слабой школьной подготовкой большинства абитуриентов и как следствие – отсутствием мотивации к учебе и тем более самостоятельной работе, что является главным условием формирования исследовательских компетенций. В таких условиях привлечение студентов к решению исследовательских задач при изучении различных разделов курса математики, их участие в конструировании собственных задач позволит постепенно приучить молодых людей к самостоятельной деятельности, развить способности, пробудить желание учиться, тем более что сейчас существует тенденция увеличения часов на самостоятельную работу и сокращение аудиторных часов.

Содержание теоретико-числового материала в курсе алгебры дает широкие возможности для формирования исследовательских компетенций студентов с помощью системы заданий исследовательского характера. Эффективными являются задания на составление неопределенных (диофантовых) уравнений, то есть алгебраических уравнений, содержащих более одной переменной и решаемых в целых или натуральных числах.

Проблема решения в целых числах неопределенных уравнений во все времена привлекала внимание математиков. Некоторые простейшие виды таких уравнений были рассмотрены математиками древности Пифагором (VI в. до н.э.), Диофантом (III в. до н.э.). В память о последнем уравнения называют диофантовыми. Изучение диофантовых уравнений дает возможность проводить содержательные исследования на базе относительно элементарных средств.

При решении задачи на составление диофантова уравнения следует идти от методов решений таких уравнений [2, 3], при этом в качестве коэффициентов и свободных членов могут быть выбраны определенные числа. В данной работе мы приводим примеры уравнений, содержащих число 2013.

Одним из методов исследования и решения неопределенных уравнений является вычисление возможных остатков от деления левой и правой частей уравнения на одно и то же число. При этом квадраты, кубы целых чисел некоторые из возможных остатков при делении на выбранное натуральное число давать не могут. Например, квадрат целого числа при делении на 5 не может давать остатков 2 и 3; а при делении на 8 – остатков 2, 3, 5, 6, 7. Куб целого числа при делении на 9 не может давать остатки 2, 3, 4, 5, 6, 7 и т.д. Кроме того, квадрат числа и квадрат его остатка при делении на одно и то же число дают равные остатки, это верно для кубов и других степеней. Произведение чисел и произведение их остатков также дают равные остатки при делении на одно и то же число. Эти свойства используются при составлении уравнений.

Задание 1. Составить уравнения с двумя и более переменными, содержащие число 2013 и решаемые путем нахождения остатков от деления левой и правой частей уравнения на одно и то же число (выбор чисел: 3, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 13).

При составлении таких уравнений надо учитывать сравнения:

$x^2 \equiv 0; 1 \pmod 3$, $x^2 \equiv 0; 1; 4 \pmod 5$,

$x^2 \equiv 0; 1; 3; 4 \pmod 6$, $x^3 \equiv 0; 1; 6 \pmod 7$,

$x^2 \equiv 0; 1; 4 \pmod 8$, $x^3 \equiv 0; 1; 8 \pmod 9$,

$x^2 \equiv 0; 1; 3; 4; 5; 9 \pmod{11}$,

$x^2 \equiv 0; 1; 3; 4; 9; 10; 12 \pmod{13}$,

$x^3 \equiv 0; 1; 5; 8; 12 \pmod{13}$.

Рассмотрим подробнее процесс составления неразрешимых уравнений, содержащих число 2013 и исследуемых посредством вычисления возможных остатков от деления на число 13. При составлении уравнений второй степени вначале определяем остаток от деления на 13 числа 2013 (он равен 11) и возможные остатки от деления на 13 любого квадрата целого числа x^2 (это числа 0, 1, 3, 4, 9, 10, 12), используя при этом сформулированные выше свойства квадрата числа и квадрата остатка. Отсюда мы заключаем, что неразрешимое в целых числах уравнение должно содержать такие числа, при которых квадрат переменной x^2 давал бы при делении на 13 один из остатков 2, 5, 6, 7, 8, 11. Используя формулу, вытекающую из теоремы о делении с остатком:

$$x^2 = 13y + r,\ 0 \le r \le 12,$$

подбираем числа и составляем уравнения.

Например, $x^2 \pm 13y^2 = 2013$;

$x^2 \pm 13y^n = 13t + r$, $r = 2; 5; 6; 7; 8; 11$.

Далее исследуем возможные остатки от деления числа ax^2 на 13, например, при $a = 20$ – 0, 2, 5, 6, 7, 8, 11, $a = 2013$ – 0, 2, 5, 6, 7, 8, 11. Составляем неразрешимые уравнения, в которых числа $20x^2$, $2013x^2$ дают остатки, не входящие в данный перечень:

- $20x^2 \pm 13y^{2013} = 1$; $20x^2 \pm 13y^n = 13z + r$, $r = 1; 3; 4; 9; 10; 12$,
- $2013x^2 \pm 13y = 12$; $2013x^2 \pm 13y^n = 13t + r$, $r = 1; 3; 4; 9; 10; 12$.

Таким же методом составляем уравнения, содержащие переменные в кубе и других степеней. Например,

$20x^3 \pm 13y^{2013} = 2013$; $20x^3 \pm 13y^n = 13t + r$,

$r = 1; 2; 3; 5; 8; 10; 11; 12$.

Для составления разрешимого уравнения следует выбирать числа, при которых квадрат переменной (или число ax^2) при делении на 13 дает конкретный возможный остаток:

✓ $2013x^2 - 13y = 11$.

Множество решений:

$$\begin{cases} x = 13t \pm 1 \\ y = 26169t^2 \pm 4026t + 154 \end{cases}, t \in \mathrm{Z}.$$

✓ Общее уравнение $2013x^2 \pm 13y = 13t + r$, $r = 0; 2; 5; 6; 7; 8; 11$ имеет бесконечное множество решений.

Возможные варианты ответа при других делителях:

- $y^2 = 2013x + 2012$, $y^2 \pm 2013x^n = 3t + 2$, $n \in \mathrm{N}$ (N – множество натуральных чисел). Уравнения целочисленных решений не имеют. (Далее во всех уравнениях показатели степеней – натуральные числа, под решениями понимаются целочисленные решения).
- $x^2 \pm 5y^2 = 2013$; $x^2 \pm 5y^n = 5z + r$,

  $r = 2; 3$. Решений нет.
- $x^3 - 5y = 2013$. Множество решений:

  $$\begin{cases} x = 5t + 2 \\ y = 25t^3 + 30t^2 + 12t - 401 \end{cases}, t \in \mathrm{Z},\ \mathrm{Z} -$$

  множество целых чисел.
- $x^2 \pm 6y^{2013} = 2012$; $x^2 \pm 6y^n = 6z + r$,

  $r = 2; 5$. Решений нет.
- $5x^2 - 6y = 2013$. Множество решений:

  $$\begin{cases} x = 6t + 3 \\ y = 30(t^2 + t) - 328 \end{cases}, \quad t = \mathrm{Z}.$$
- $x^3 \pm 7y = 2013$, $x^3 \pm 7y^n = 7z + r$,

  $r = 2; 3; 4; 5$. Решений нет.
- $x^2 - 7y = 2013$. Множество решений:

  $$\begin{cases} x = 7t \pm 2 \\ y = 7t^2 \pm 4t - 287 \end{cases}, t \in \mathrm{Z}.$$

В обеих формулах знак один и тот же.

- $201 = 3x^3 + 2013y^3$;

  $(7s + k)x^3 + 2013y^3 = 7t + r$, $k = 3; 4$, $r = 2; 5$, $s, t \in \mathrm{Z}$. Решений нет.

Примеры неразрешимых уравнений, решаемых исследованием остатков от деления на числа 8, 9, 11.

✓ $x^2 - 2y^2 = 2013$; $x^2 - 2y^2 = 8t + r$,

$r = 3; 5$,

✓ $x^4 + y^4 - z^4 = 2013$; $x^4 + y^4 - z^4 = 8t + r$;

$r = 3; 4; 5; 6$,

✓ $x^3 + y^3 + z^3 - 3z^2 + 3z = 2013$;

$x^3 + y^3 + z^3 = 9t + r$, $r = 4; 5$,

✓ $20 = 13x^2 - 2013y^2$;

$13x^2 - 2013y^n = 11t + r$, $r = 1; 3; 4; 5; 9$.

Задание 2. Составить уравнения, содержащие число 2013, решаемые путем исследования делимости обеих частей уравнения на одно и то же простое число или его натуральную степень.

- $y^2 = 2013 \cdot 13^m$; $y^n = 2013 \cdot 13^m$, $n \geq 2$.

  Решений нет.
- $x^2 - 6x + 2013 = 9y \Leftrightarrow$ $(x - 3)^2 = 3(3y - 668)$. Левая часть уравнения либо не делится на 3, либо делится на четную степень числа 3, а правая часть делится на 3, но не делится на 3^2. Решений нет.
- $x^2 + y^2 = 2013z^2$; $x^2 + y^2 = 2013(z^2 + t^2)$; $x^{2n} + y^{2m} = 2013(z^{2k} + t^{2s})$. (Сумма двух квадратов $x^2 + y^2$ делится на 3 тогда и только тогда, когда оба числа x и y делятся на 3. Поэтому левая часть уравнения делится на четную степень числа 3, а правая – на нечетную. Решение – нулевой набор).
- $x! + 2013 = y^2$ (делимость на степень 3). Решений нет.
- $5x^2 + 11y^2 = 2013$ (Исследовать делимость на 11, затем на 3. Решений нет).

- $11x^2 - 21y = 2013$ $(x = 3x_1,\ y = 11y_1)$,

$$\begin{cases} x = 3(7t \pm 2) \\ y = 11(21t^2 \pm 12t - 7) \end{cases},\ t \in \mathrm{Z}.$$

Задание 3. Составить уравнения, содержащие число 2013 и решаемые путем исследования возможных вариантов четности и нечетности значений переменных.

- $x^2 - 2y^2 = 2013$, $x^2 - 6y^2 = 2013$.

Решение: из уравнений следует, что $x = 2k + 1$ – нечетно. Подставляем в уравнение, преобразуем и приходим к неразрешимому в целых числах уравнению.

- $x^2 + 2x - y^2 = 2013$; $x^2 - y^2 = 4t + 2$ (Если разность квадратов четная, то она делится на 4. Решений нет).
- $20x^2 - 13y^2 = 2013$ (Число $y = 2k + 1$ – нечетное. Решений нет).
- $x^2 - 2013y^2 = 2014 \Leftrightarrow$ $x^2 - 2013y^2 = 4z + 2$. Числа x и y либо оба четны, либо оба нечетны. В обоих случаях левая часть делится на 4, а правая – только на 2. Решений нет.

Задание 4. Составить уравнение с числом 2013, допускающее разложение на множители входящего в него многочлена.

При решении уравнения такого вида сначала переносим все слагаемые, содержащие переменные, в левую часть, затем производим разложение многочлена на множители, добавляя в случае необходимости число. Затем приравниваем множители возможным делителям числа, стоящего в правой части, и находим целые решения уравнения. При составлении уравнения действия производим в обратном порядке, подбирая необходимые числа.

✓ $x^2 - y^2 = 2013$.

Ответ: 16 решений:
$\{(\pm 1007;\pm 1006), (\pm 337;\pm 334), (\pm 97;\pm 86), (\pm 47;\pm 14)\}$.

✓ $xy + 4x - 503y = 2013 \Leftrightarrow$

$(x - 503)(y + 4) = 1$.

Ответ: $\{(504;-3), (502;-5)\}$.

✓ $x^3y + 67x^3 - 30y = 2013 \Leftrightarrow$

$(x^3 - 30)(y + 67) = 3$. Ответ: $\{(3;-68)\}$.

✓ $xy^2 + 2010y^2 - x = 2013 \Leftrightarrow$

$(y^2 - 1)(x + 2010) = 3$.

Ответ: $\{(-2013;0), (-2009;\pm 2)\}$.

✓ $x^2 - 92x + 2013 = y^2 \Leftrightarrow$

$(x - 46)^2 - y^2 = 103$.

Ответ: $\{(98;\pm 51), (-6;\pm 51)\}$

При составлении следующих уравнений следует использовать равносильности:

- $(x + a)(y + b) = c \Leftrightarrow$ $xy + bx + ay + ab = c$,
- $(ax + b)(cy + d) = f \Leftrightarrow$ $acxy + adx + bcy + bd = f$,
- $(x + ay)(x + by) = c \Leftrightarrow$ $x^2 + (a + b)xy + aby^2 = c$,
- $(ax + by)(cx + dy) = f \Leftrightarrow$ $acx^2 + (ad + bc)xy + bdy^2 = f$,
- $(x + a)(y + b)(z + c) = d \Leftrightarrow$ $xyz + ayz + bxz + cxy + bcx + acy + abz + abc = d$.

- $xy + 10x - 201y = 2013 \Leftrightarrow$

$(x - 201)(y + 10) = 3$.

Ответ:

$\{(202;-1), (200;-13), (204;-9), (198;-11)\}$.

- $66xy + 737x - 180y = 2013 \Leftrightarrow$

  $(11x - 30)(6y + 67) = 3$.

  Ответ: $\{(3;-11)\}$.

- $x^2 + 94xy + 2013y^2 = 29 \Leftrightarrow$

  $(x + 33y)(x + 61y) = 29$.

Ответ: $\{(-32;1), (32;-1), (62;-1), (-62;1)\}$.

- $xyz - 503xy - 4xz - yz + 2012x + 503y + 4z = 2013$

  $\Leftrightarrow (x-1)(y-4)(z-503) = 1$

Ответ: $\{(2;5;504), (2;3;502), (0;5;502), (0;3;504)\}$.

Задание 5. Составить уравнения с числом 2013, исследование которых приводит к возможности использования свойств наибольшего общего делителя чисел, многочленов, а также взаимно простых многочленов.

При построении уравнений сначала выбираем пару взаимно простых многочленов с одной переменной, затем подбираем многочлен с другой переменной и числа.

✓ $(x^2-1)(y^2-20) = 2013x^2$. Так как числа x^2-1 и x^2 взаимно просты, то x^2-1 делит число 2013, что возможно при $x = \pm 2$. Ответ: $\{(\pm 2; \pm 52)\}$.

✓ $(x^2-1)(y^3+455) = 2013x^3$, $x = 2$, $y = 17$.

✓ $(2x^2+1)(y^2+25) = 2013(3x^2+2)$,

$x = \pm 4$, $y = \pm 55$.

Большое применение в теоретико-числовых исследованиях имеет теория сравнений в кольце целых чисел. Сравнения по модулю и их свойства, теоремы Эйлера и Ферма, сравнения с переменной, первообразные корни и индексы, двучленные сравнения используются для исследования и решения некоторых классов диофантовых уравнений. Составление таких уравнений будет способствовать формированию исследовательских умений будущего учителя математики.

Задание 6. Составить уравнения первой степени с двумя и тремя переменными, содержащие число 2013.

- $20x + 13y = 2013$. Переходим к сравнению по модулю 13. Множество решений: $\begin{cases} x = 13t + 9 \\ y = -20t + 141, \quad t \in Z. \end{cases}$

- $20x + y + 3z = 2013 \Leftrightarrow$

  $x = 100 + \dfrac{-y - 3z + 13}{20}$, так как x – целое, то

  $\dfrac{-y - 3z + 13}{20} = t$ – целое число. Множество

  решений: $\begin{cases} x = 100 + t \\ y = 13 - 3z - 20t, \quad z,\ t \in Z. \end{cases}$

- $5x + 2013y + z = 4$. Множество решений:

  $\begin{cases} x = -402y + t \\ z = -3y - 5t + 4, \quad y,\ t \in Z. \end{cases}$

Задание 7. Составить уравнения, содержащие число 2013, которые с помощью свойств сравнений и алгебраических преобразований приводятся к двучленному сравнению.

- $x^2 + x + 2013 = 5y \Leftrightarrow (x+3)^2 \equiv 1 \pmod 5$.

Множество решений:
$\{(5t-2, 5t^2-3t+403); (5t-4, 5t^2-7t+405), t \in Z\}$.

- $x^2 + 2013x + 2014 = 13y^n \Leftrightarrow$

  $(x-1)^2 \equiv 2 \pmod{13}$. Решений нет.

- $x^3 - 31x^2 - 4x + 2013 = 7y^n \Leftrightarrow$

  $(x-1)^3 \equiv 2 \pmod 7$. Решений нет.

Задание 8. Составить уравнения с числом 2013, неразрешимость которых в целых числах можно доказать с помощью теоремы Ферма.

Этому заданию предшествуют исследования уравнений вида:

- $x^{p-1} + y^{p-1} = k$, $x^{p-1} - y^{p-1} = k$,
- $x^{p-1} + x^{p-2}y + \ldots + xy^{p-2} + y^{p-1} = k$,
- $x^{p-1} - x^{p-2}y + \ldots - xy^{p-2} + y^{p-1} = k$ (p – простое, $p > 3$) с помощью теоремы Ферма. Ис-

следование показывает, что данные уравнения в целых числах неразрешимы при $k \not\equiv 0; 1; 2 \pmod{p}$. С помощью сравнения Ферма данное утверждение доказывается для случая $x > 0$, $y > 0$, а из этого случая оно легко выводится для других вариантов сочетания знаков x и y. Примеры:

- ✓ $x^6 + y^6 = 2013$, $x^6 - y^6 = 2013$.
- ✓ $x^6 + x^5y + x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 + xy^5 + y^6 = 2013$.

Задание 9. Используя свойства и таблицы первообразных корней и индексов по простому модулю, составить уравнения с числом 2013.

- $3^x - 2013 = 13y$, $3^x - 2013 = 13y^n$. Решений нет.
- $x^3 - 17y = 2013$. Множество решений:
  $$\begin{cases} x = 17t - 3 \\ y = 289t^3 - 153t^2 + 27y - 120, \; t \in Z. \end{cases}$$
- $x^5 \pm 2013y = a$,
  $a \equiv 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \pmod{11}$. Решений нет.
- $x^3 \pm 2013y = a$. Уравнение решений не имеет, если $\operatorname{ind}_{61} a$ не делится на 3, т.е.
  $a \equiv 2, 4, 5, ..., 57, 59 \pmod{61}$.
- $ax^3 - 13y^n = 2013$. Уравнение решений не имеет, если $a \equiv 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12 \pmod{13}$.

Задание 10. С помощью свойства: сравнение $a^x \equiv b \pmod{p}$, p – простое, $x \in N$ не имеет решений, если наибольший общий делитель чисел $\operatorname{ind}_p a$ и $p-1$ не делит $\operatorname{ind}_p b$, составить неразрешимые уравнения с числом 2013.

- $13^x \pm 17y^n = 2013$;
- $a^x \pm 2013y^n = b$, $a \equiv 3, 4, 5, 9 \pmod{11}$,
  $b \equiv 2, 6, 7, 8, 10 \pmod{11}$;
  $5^x \pm 2013y^n = 2012$;
- $2013^x \pm 7y^n = b$, $b \equiv 3, 5, 6 \pmod{7}$.

Задание 11. С помощью свойства: сравнение $ax^n \equiv b \pmod{p}$, p – простое, $n \in N$ не имеет целочисленных решений, если наибольший общий делитель чисел n и $p-1$ не делит число $\operatorname{ind}_p b - \operatorname{ind}_p a$, составить неразрешимые уравнения с числом 2013.

- $17x^n \pm 23y^m = 2013$, n – четное или делится на 11.
- $2013x^n \pm 19y^m = 25$, число n кратно 2 или 3.

Задание 12. С помощью свойства: сравнение $x^2 \equiv g \pmod{p}$, p – простое, $p > 2$ – неразрешимо, если g – первообразный корень по $\bmod\, p$, составить неразрешимые уравнения с числом 2013.

- ✓ $x^2 \pm 17y^m = 2013$, $x^2 \pm 17y^m = 17t + 7$,
  $t \in Z$.
- ✓ $x^2 \pm 2013y^m = 71$, $x^2 \pm 2013y^m = 61t + 10$,
  $t \in Z$.

Работа по составлению таких уравнений будет способствовать более глубокому пониманию будущим учителем содержания теорий делимости, сравнений и возможности их применения в других областях математики.

Библиографический список

1. Смирнов, Е. И. Фундирование опыта в профессиональной подготовке и инновационной деятельности педагога [Текст] : монография. – Ярославль, 2012. – 646 с.
2. Хамов, Г. Г., Тимофеева, Л. Н. Использование диофантовых уравнений как средства совершенствования учебной деятельности студентов по математике [Текст] // Вестник Поморского университета. – 2011. – № 6. – С. 151–156.
3. Хамов, Г. Г., Тимофеева, Л. Н. Решение уравнений в целых числах [Текст] // Математика в школе. – 2006. – № 9. – С. 44–48.
4. Хуторской, А. В. Ключевые компетенции как компонент личностно-ориентированной парадигмы образования [Текст] // Доклады 4-й Всероссийской дистанционной августовской педагогической конференции «Обновление российской школы» (26 августа – 10 сентября 2002 г.).

Bibliograficheskij spisok

1. Smirnov E.I. Fundirovanie opyta v professional'noj podgotovke i innovatsionnoj deyatel'nosti pedagoga. Monografiya. YAroslavl', 2012, 646s.
2. KHamov G.G., Timofeeva L.N. Ispol'zovanie diofantovykh uravnenij kak sredstva sovershenstvovaniya uchebnoj deyatel'nosti studentov po matematike //Vestnik Pomorskogo universiteta.- 2011, №6, s. 151-156
3. KHamov G.G., Timofeeva L.N. Reshenie uravnenij v tse-lykh chislakh //Matematika v shkole.-2006, №9, s. 44-48.
4. KHutorskoj A.V. Klyuchevye kompetentsii kak kompo-nent lichnostno-orientirovannoj paradigmy obrazovaniya / Doklady 4-j Vserossijskoj distantsionnoj avgustovskoj pedagogicheskoj konferentsii "Obnovlenie rossijskoj shkoly" (26 avgusta - 10 sentyabrya 2002 g.).