

## МАТЕМАТИКА

УДК 516

В. Н. Алексеев

**Медианное и высотное сопряжения на множестве классов подобия треугольников**

Рассмотрена одна из моделей множества классов подобия треугольников. Показано, что построение треугольника из медиан исходного треугольника определяет на этом множестве классов подобия инволюцию. Получено аналитическое описание инволютивного преобразования, найдена кривая неподвижных точек. Выделено подмножество классов подобия треугольников, на котором аналогичные результаты получены для построения треугольника из высот. Рассмотренные преобразования названы соответственно медианным и высотным сопряжениями.

**Ключевые слова:** множество классов подобия треугольников, инволюция, кривая неподвижных точек, медианное сопряжение, высотное сопряжение.

V. N. Alekseev

**Median conjugation and height conjugation on the set of classes of triangle similarity**

One of the models of the set of classes of triangle similarity is analyzed in the article. We show that the construction of a triangle of medians of the initial triangle defines involution on the set of classes of similarity. An analytical description of this involution is obtained and the curve of fixed points is found. A subset of classes of triangle similarity is found, for which similar results are received to construct a triangle from heights. The considered transformations are called median and height conjugations correspondingly.

**Keywords:** a set of classes of triangle similarity, involution, a curve of fixed points, median conjugation, height conjugation.

**Описание модели множества классов подобия треугольников.** Рассмотрим одну из многочисленных моделей множества треугольников, рассматриваемых с точностью до подобия [1, с. 101–102]. Воспользуемся признаком подобия треугольников по «трем сторонам». Поскольку очевидно, что отношение подобия на множестве невырожденных треугольников (евклидовой плоскости) является отношением эквивалентности, то все многообразие форм треугольников можно описать с помощью фактор-множества по отношению подобия. Для краткости такое фактор-множество будем называть множеством классов подобия треугольников. Поскольку каждый класс эквивалентности однозначно определяется любым своим представителем, то в качестве такового выберем из каждого класса треугольник, у которого длина самой длинной стороны равна 2. Две другие стороны (короткие) будем располагать по возрастанию  $a \leq b \leq 2$ . Тогда на параметры  $a$  и  $b$  необходимо наложить еще условие существования треугольника  $a + b \geq 2$ . В этом условии допускается равенство, что позволяет компактифицировать множество классов подобия треугольников за счет добавления классов подобия вырожденных треугольников (сумма двух сторон равна третьей) с указанием пропорции деления длинной стороны. Таким образом, интересующая нас модель  $M$  будет описана следующим образом:

$$M : \begin{cases} b \leq 2; \\ a \leq b; \\ a + b \geq 2. \end{cases}$$

Теперь разобьем множество классов подобия по форме треугольника (остроугольные, прямоугольные, тупоугольные). Для этого используем косинус наибольшего угла. Поскольку наибольший угол лежит против наибольшей стороны, то, обозначив его  $\gamma$ , по теореме косинусов получим:

$$4 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma \Rightarrow \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - 4}{2ab}.$$

Последняя формула позволяет произвести нужное разбиение. Считая, что  $a$  и  $b$  удовлетворяют ограничениям модели (то есть позволяют построить треугольник со сторонами  $a$ ,  $b$  и 2) мы получаем:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{треугольник остроугольный} \\ \text{треугольник прямоугольный} \\ \text{треугольник тупоугольный} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \gamma < 90^\circ \\ \gamma = 90^\circ \\ \gamma > 90^\circ \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a^2 + b^2 > 4 \\ a^2 + b^2 = 4 \\ a^2 + b^2 < 4 \end{array} \right\}.$$

Подводя итог данному описанию, мы можем суммарно выразить его с помощью рисунка 1.

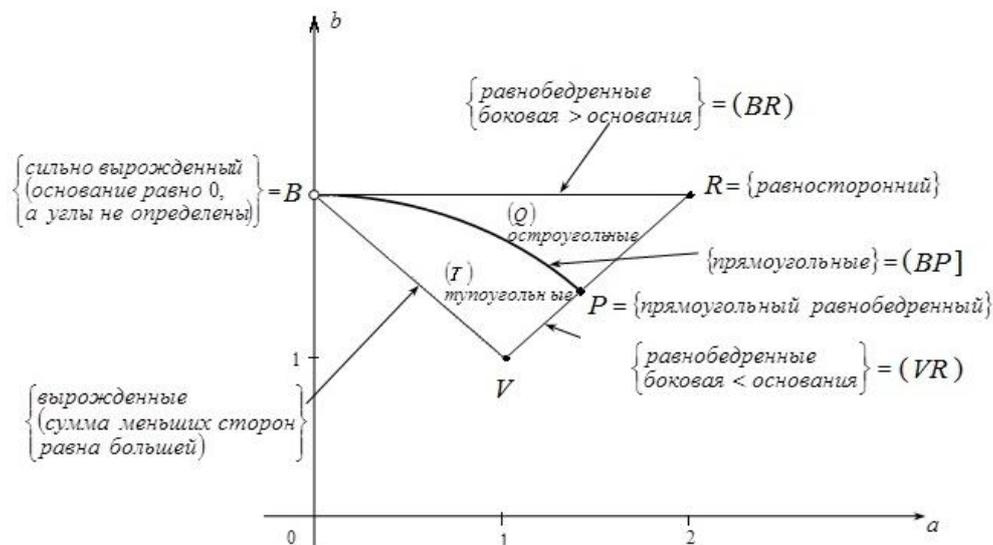


Рис. 1.

Отметим, что формула для  $\cos \gamma$  не дает определенного значения только в одной точке  $B(0; 2)$  данной модели. Но в этом случае существуют однозначно определенные предельные значения при приближении точки к точке  $B$  вдоль прямых  $b = ka + 2$  для  $-1 \leq k \leq 0$ . Эти значения  $k$  при  $a \rightarrow 0 + 0$  обеспечивают приближение переменной точки к  $B$  по точкам модели. Такое положение дел обеспечивает «раздутие» точки  $B$  и «стягивание»  $(BV)$  при переходе к модели множества классов подобия треугольников, где классы подобия определяются величинами углов. Подробнее об этом можно прочитать в книге [1, с. 103–105]. В данной ситуации мы для простоты будем присоединять точку  $B$  к дуге  $[BP]$  поскольку такой выбор (равно как и иное предельное значение) в этой модели не повлияет на дальнейшее изложение.

**Медианное сопряжение.** Рассмотрим произвольный треугольник с длинами сторон, упорядоченными по возрастанию  $a \leq b \leq c$ . Известно (и легко проверяется непосредственно), что из медиан любого невырожденного треугольника можно построить треугольник, который будем называть медианным треугольником для исходного. Длины медиан легко вычисляются и равны соответственно  $m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$ ,  $m_b = \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$  и  $m_c = \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$ . Если вновь использовать эти же формулы для нахождения медиан медианного треугольника, то получим (прямые вычисления):

$$M_a = \frac{1}{2} \sqrt{2m_b^2 + 2m_c^2 - m_a^2} = \frac{3}{4} a;$$

$$M_b = \frac{1}{2} \sqrt{2m_a^2 + 2m_c^2 - m_b^2} = \frac{3}{4} b;$$

$$M_c = \frac{1}{2} \sqrt{2m_a^2 + 2m_b^2 - m_c^2} = \frac{3}{4} c.$$

Из полученных соотношений (которые еще легче установить средствами векторной алгебры) мы можем сделать два следующих важных вывода. Во-первых, медианный треугольник медианного треугольника подобен исходному треугольнику с коэффициентом подобия 0,75. Далее, поскольку очевидно, что медианные треугольники подобных треугольников подобны, то на множестве классов подобия треугольников сопоставление классу треугольников класса, состоящего из медианных треугольников исходного класса, является инволюцией (то есть отображением, вторая степень которого совпадает с тождественным отображением).

Получим аналитическое описание рассмотренной инволюции, которую будем называть медианным сопряжением. Из упорядоченности сторон  $a \leq b \leq c$  и формул для длин медиан следует, например:

$$4m_c^2 - 4m_b^2 = 3(b^2 - c^2) \leq 0 \Rightarrow m_c \leq m_b .$$

Проведя аналогичные выкладки для других пар медиан, получим такой итоговый результат (обратное утверждение методом «от противного»):

$$a \leq b \leq c \Leftrightarrow m_a \geq m_b \geq m_c .$$

Т. е. в любом треугольнике к меньшей стороне проходит большая медиана. Теперь для получения формул, задающих медианное сопряжение на выше рассмотренной модели, мы «нормируем» исходный треугольник, положив в нем  $c = 2$ , и его медианный треугольник, приведя наибольшую медиану  $m_a$  к длине равной 2. Тогда класс подобия исходного треугольника в рассмотренной модели будет представлен точкой  $X(a; b)$ . Пусть соответствующей точкой, представляющей медианно сопряженный класс, будет точка  $X_\mu(a_\mu; b_\mu)$ . Тогда из выше сказанного следует, что медианное сопряжение  $\mu$  можно описать следующим образом:

$$\mu: M \rightarrow M: X(a; b) \mapsto X_\mu \left( \frac{2\sqrt{2a^2 + 2b^2 - 4}}{\sqrt{2b^2 + 8 - a^2}}; \frac{2\sqrt{2a^2 + 8 - b^2}}{\sqrt{2b^2 + 8 - a^2}} \right).$$

Иначе

$$\begin{cases} a_\mu = 2\sqrt{\frac{2a^2 + 2b^2 - 4}{2b^2 + 8 - a^2}}; \\ b_\mu = 2\sqrt{\frac{2a^2 + 8 - b^2}{2b^2 + 8 - a^2}}. \end{cases}$$

Теперь проверка соотношения  $\mu^2 = id_M$ , где  $id_M$  – тождественное отображение, сводится к прямой проверке, равно как и проверка того, что соответствующие корни можно извлекать для координат  $a$  и  $b$  всех точек модели  $M$ .

Найдем множество самосопряженных классов подобия (их наличие очевидно, например, класс подобия равносторонних треугольников). Если класс подобия является самосопряженным, то должны выполняться условия  $a_\mu = a$  и  $b_\mu = b$ . Упрощая совместно эти равенства, получим:

$$\begin{cases} a = \frac{2\sqrt{2a^2 + 2b^2 - 4}}{\sqrt{2b^2 + 8 - a^2}} \\ b = \frac{2\sqrt{2a^2 + 8 - b^2}}{\sqrt{2b^2 + 8 - a^2}} \end{cases} \Rightarrow \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{4} = 1.$$

Легко проверяется и обратное утверждение, т. е. если точка модели  $M$  лежит на гиперболе с уравнением  $\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{4} = 1$ , то она представляет собой самосопряженный класс. Результаты отражены на рисунке 2.

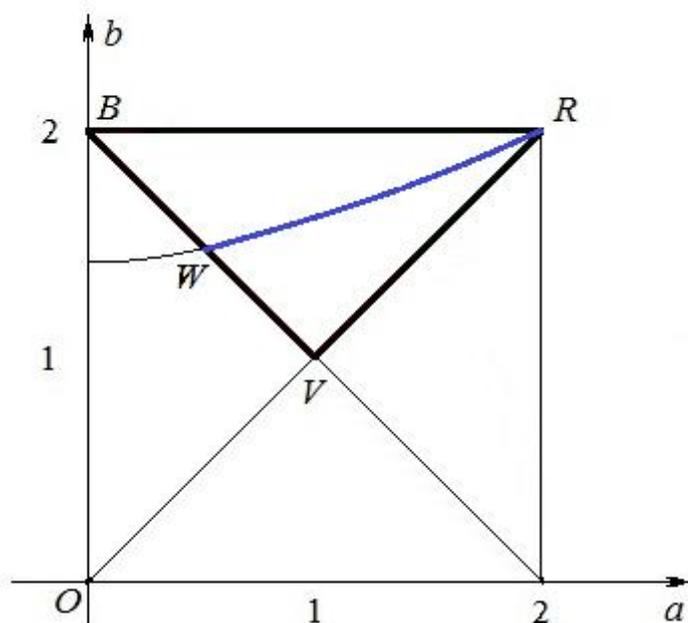


Рис. 2.

Как из интуитивно понятных соображений, так и из непосредственных вычислений следует, что  $\mu([VR]) = [BR]$  и  $\mu([VW]) = [BW]$ . Кроме того  $[RW]$  является кривой неподвижных точек, причем отображение медианного сопряжения непрерывно в том числе и на указанных границах. Поэтому области, на которые кривая неподвижных точек разбивает множество классов подобия треугольников, отображаются друг в друга. Легко проверить, что рассматриваемое отображение не конформно.

**Высотное сопряжение.** Рассмотрим вопрос о возможности построения треугольника из высот некоторого исходного треугольника (такой треугольник в случае существования будем называть высотным по отношению к исходному треугольнику). В отличие от медиан интуитивно понятно, что такое построение возможно не для всякого треугольника, а, значит, и не для всякого класса подобия треугольников можно определить класс подобия высотных треугольников. Найдем те классы, для которых такое построение возможно.

Пусть вновь для модели  $M$  имеется упорядочивание сторон  $a \leq b \leq 2$ . Тогда (рассматриваем пока невырожденные треугольники) высоты треугольника со сторонами  $a$ ,  $b$  и  $2$  будут равны соответственно  $h_a = \frac{2S}{a}$ ,  $h_b = \frac{2S}{b}$  и  $h_c = \frac{2S}{2} = S$ , где  $S$  – площадь исходного треугольника. Тогда (по свойствам неравенств) очевидно, что  $h_c \leq h_b \leq h_a$ . Ввиду этого, для того, чтобы из высот можно было построить треугольник (даже вырожденный), необходимо и достаточно, чтобы сумма двух коротких сторон была не меньше длинной стороны, т. е. чтобы выполнялось неравенство  $h_c + h_b \geq h_a$ .

Производя обычные упрощения указанного неравенства, мы получим условие на параметры  $a$  и  $b$  для невырожденных треугольников, при выполнении которого можно найти класс подобия высотных треугольников:

$$h_c + h_b \geq h_a \Rightarrow b \leq \frac{4}{2-a} - 2.$$

Область модели  $M$ , удовлетворяющая приведенному условию, изображена на рисунке 3.

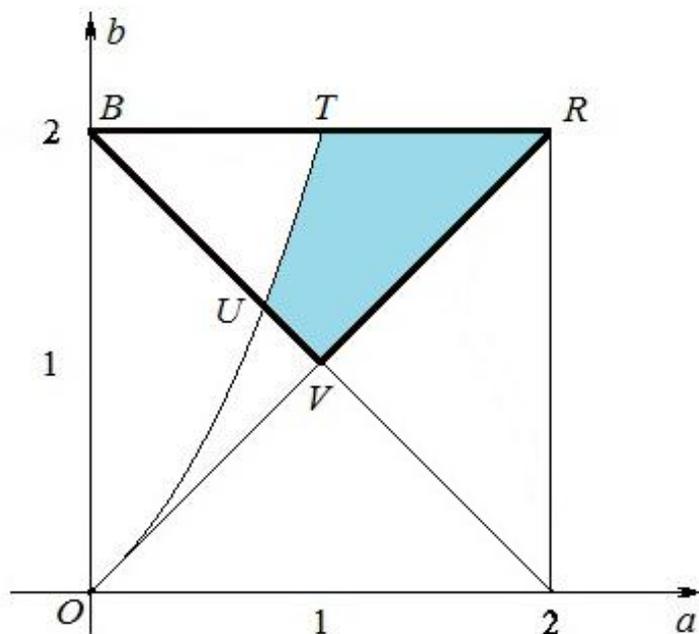


Рис. 3.

Граничная кривая пересекает  $[BR]$  в точке  $T(1;2)$  и  $[BV]$  в точке  $U(3 - \sqrt{5}; \sqrt{5} - 1)$ .

Рассмотрим теперь произвольный невырожденный треугольник, для которого можно построить также невырожденный высотный треугольник со сторонами  $h_a = \frac{2S}{a}$ ,  $h_b = \frac{2S}{b}$  и  $h_c = \frac{2S}{c}$ . Найдем высоты этого треугольника, считая, что его площадь равна  $S_1$ . Имеем:

$$H_a = \frac{2S_1}{h_a} = \frac{S_1}{S} \cdot a; \quad H_b = \frac{2S_1}{h_b} = \frac{S_1}{S} \cdot b; \quad H_c = \frac{2S_1}{h_c} = \frac{S_1}{S} \cdot c.$$

Таким образом, мы получили следующее утверждение: если для невырожденного треугольника можно построить невырожденный высотный треугольник, то для него также можно построить высотный треугольник, который будет подобен исходному треугольнику.

Для множества классов подобия треугольников данное утверждение означает (аналогично медианному сопряжению), что на множестве  $TUVR$  (рисунок 3), за исключением точек границ  $VU$  и  $UT$ , определено высотное сопряжение:

$$\eta : G \rightarrow G : X(a; b) \mapsto X_\eta(a_\eta; b_\eta).$$

Здесь  $G$  – выше описанная область (ни открытая, ни замкнутая, здесь слово область выступает просто синонимом слова множество) и  $\eta^2 = id_G$ . Найдем аналитическое описание для этой инволюции, для

чего достаточно треугольник со сторонами  $h_a = \frac{2S}{a}$ ,  $h_b = \frac{2S}{b}$  и  $h_c = S$  «нормировать», приведя самую

длинную сторону  $h_a$  к длине равной двум (т. е. использовать коэффициент подобия  $\frac{a}{S}$ ). Имеем:

$$\begin{cases} a_\eta = a; \\ b_\eta = \frac{2a}{b}. \end{cases}$$

Тогда по непрерывности полученные формулы можно распространить и на замыкание  $G$  (либо это можно сделать непосредственно предельным переходом из внутренности области к граничным точкам, результат не изменится).

Теперь найдем кривую неподвижных точек для высотного сопряжения. Очевидным является следующий результат такого поиска:

$$\begin{cases} a_\eta = a \\ b_\eta = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = a \\ \frac{2a}{b} = b \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{b^2}{2}.$$

Итак, кривая неподвижных точек в интересующей нас области представлена фрагментом параболы, проходящей через точки  $R$  и  $U$ . И вновь по принципу соответствия границ (нужно проверить, что границы областей разбиения отображаются друг в друга) можно утверждать, что области разбиения кривой неподвижных точек отображаются друг в друга, но тоже не конформно. Соответствующее разбиение на части кривой неподвижных точек изображено на рисунке 4.

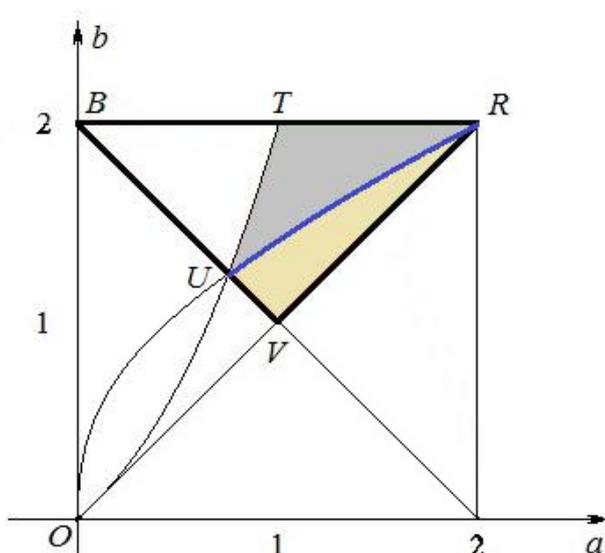


Рис. 4.

**Заключительные замечания.** Отметим, что полученные в работе результаты не потребовали слишком изощренной техники, но являются новыми в классической геометрии. Эти обстоятельства позволяют использовать изложенный материал для проведения самостоятельных исследований, как школьников, так и студентов. Включение вырожденных треугольников в множество классов подобия треугольников требует большой собранности и аккуратности при рассмотрении этих классов. Остаются открытыми многие частные задачи (найти неподвижные множества разных видов, найти образ множества классов прямоугольных треугольников и так далее). Работа с этой тематикой позволит вооружить учащихся неоценимым опытом проведения исследований и развить математические способности. Можно поручить провести и полностью самостоятельное исследование для рассмотренных отображений на другой модели множества классов подобия (например, модели, определяющей класс подобия величиной двух меньших углов). Весьма ценным и полезным при работе с этой тематикой также является тот факт, что для получения результатов можно использовать «инструментарий» различных разделов математики, что, безусловно, послужит делу пополнения «арсенала» учащихся соответствующими средствами и методами.

К изложенным материалам привело рассмотрение обобщения продолжения теоремы Пифагора [2], что также может послужить средством овладения исследовательскими навыками.

Возможным вариантом приобретения исследовательских навыков является обсуждение материала на кружковых занятиях с обоснованиями «от учащихся».

**Библиографический список:**

1. Афанасьев, В. В. Работа с одаренными детьми по математике [Текст] / В. В. Афанасьев, В. Н. Алексеев, С. А. Тихомиров. – Ярославль : ЯГПУ им. К.Д. Ушинского, 2011. – 132 с.
2. Алексеев, В. Н. Обобщение продолжения теоремы Пифагора [Текст] / В. Н. Алексеев // Вестник Ишимского государственного педагогического института им. П. П. Ершова. Серия «Физико-математические науки и методика их преподавания». – 2012. – № 1(6). – С. 4–10.

**Bibliograficheskij spisok:**

1. Afanas'ev, V. V. Rabota s odarennymi det'mi po matematike [Tekst] / V. V. Afanas'ev, V. N. Alekseev, S. A. Tihomirov. – Jaroslavl' : JaGPU im. K.D. Ushinskogo, 2011. – 132 s.
2. Alekseev, V. N. Obobshhenie prodolzhenija teoremy Pifagora [Tekst] / V. N. Alekseev // Vestnik Ishimskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo instituta im. P. P. Ershova. Serija «Fiziko-matematicheskie nauki i metodika ih prepodavanija». – 2012. – № 1(6). – S. 4–10.