УДК 512.7

С. А. Тихомиров, А. П. Ляпин, Е. В. Казанцева

Спектры стабильных 2-расслоений с нечетным первым классом Черна на трехмерном проективном пространстве

В данной статье мы получаем новые важные результаты о спектрах стабильных 2-расслоений на P^3, имеющих нечетный первый класс Черна.

Ключевые слова: векторное расслоение, стабильное расслоение, классы Черна, многообразие модулей.

S. A. Tikhomirov, A. P. Lyapin, E. V. Kazantseva

Spectra of stable 2-bundles with odd first Chern's class on complex projective space

In this article we receive new important results about spectra of stable 2-bundles on P^3, having an odd first Chern's class.

Keywords: vector bundle, stable bundle, Chern's classes, variety of moduli.

Спектры расслоений дают нам своего рода стратификацию (разбиение) соответствующих многообразий модулей, что в свою очередь помогает установлению точной геометрии данных многообразий, а это и есть один из самых важных вопросов всей теории векторных расслоений на многообразиях. В настоящей работе мы изучаем стабильные расслоения ранга 2 с c_1=-1 на трехмерном проективном пространстве P^3 над полем C.

Приведем определение и свойства спектра для 2-расслоения E с нечетным первым классом Черна на P^3 [2].

Спектром расслоения E ранга 2 на P_3 с c_1=-1 и некоторым c_2 называется определенная последовательность целых чисел в количестве c_2 штук. Пусть $\chi=\{k_1, k_2,\ldots,k_{C2}\}$ − спектр E, где $k_i \in Z$. Тогда χ удовлетворяет условиям:

(S1) симметричность: $\{-k_i\}=\{k_i+1\}$.

(S2) связность: для любых двух чисел в χ, каждое число, лежащее между ними, также лежит в χ.

Основной результат настоящей работы – следующая **Теорема:**

1) Для таких расслоений спектры существуют только при четных c_2.
2) Общее число спектров P(n) для произвольного четного c_2=n находится по формуле

$$P(n) = 2^{\frac{n}{2}-1}.$$

Доказательство:

1) Согласно свойству симметричности спектра мы легко получаем, что два разных числа не могут при данной симметрии соответствовать одному числу, более того, у каждого числа свое единственное симметричное ему и ноль не симметричен самому себе (0 соответствует -1). Тем самым, весь спектр разбивается на некоторое количество «пар симметричных чисел», а значит в таком спектре может быть только четное количество чисел и по определению спектра это число и есть второй класс Черна.

2) Для начала, используя определение спектра, получим и приведем экспериментальные данные – таблицы спектров наших 2-расслоений до c_2=16 включительно:

c_2=2 – имеется 1 спектр: -10; c_2=4 – имеется 2 спектра: -1-100, -2-101;

c_2=6 – имеется 4 спектра: -1-1-1000, -2-1-1001, -2-2-1011, -3-2-1012;

c_2 =8 – имеется 8 спектров: -1-1-1-10000, -2-1-1-10001, -2-2-1-10011, -2-2-2-10111, -3-2-1-10012, -3-2-2-10112, -3-3-2-10122, -4-3-2-10123;

c_2=10 – имеется 16 спектров: -1-1-1-1-100000, -2-1-1-1-100001, -2-2-1-1-100011, -2-2-2-1-100111, -2-2-2-2-101111, -3-2-1-1-100012, -3-2-2-1-100112, -3-2-2-2-101112, -3-3-2-1-100122, -3-3-2-2-101122,

-3-3-3-2-101222, -4-3-2-1-100123, -4-3-2-2-101123, -4-3-3-2-101223, -4-4-3-2-101233, -5-4-3-2-101234;

c_2=12 – имеется 32 спектра: -1-1-1-1-1-1000000, -2-1-1-1-1-1000001, -2-2-1-1-1-1000011, -2-2-2-1-1-1000111, -2-2-2-2-1-1001111, -2-2-2-2-2-1011111, -3-2-1-1-1-1000012, -3-2-2-1-1-1000112, -3-2-2-2-1-1001112, -3-2-2-2-2-1011112, -3-3-2-1-1-1000122, -3-3-2-2-1-1001122, -3-3-2-2-2-1011122, -3-3-3-2-1-1001222, -3-3-3-2-2-1011222, -3-3-3-3-2-1012222, -4-3-2-1-1-1000123, -4-3-2-2-1-1001123, -4-3-2-2-2-1011123, -4-3-3-2-1-1001223, -4-3-3-2-2-1011223, -4-3-3-3-2-1012223, -4-4-3-2-1-1001233, -4-4-3-2-2-1011233, -4-4-3-3-2-1012233, -4-4-4-3-2-1012333, -5-4-3-2-1-1001234, -5-4-3-2-2-1011234, -5-4-3-3-2-1012234, -5-4-4-3-2-1012334, -5-5-4-3-2-1012344, -6-5-4-3-2-1012345;

c_2=14 – имеется 64 спектра: -1-1-1-1-1-1-10000000, -2-1-1-1-1-1-10000001, -2-2-1-1-1-1-10000011, -2-2-2-1-1-1-10000111, -2-2-2-2-1-1-10001111, -2-2-2-2-2-1-10011111, -2-2-2-2-2-2-10111111, -3-2-1-1-1-1-10000012, -3-2-2-1-1-1-10000112, -3-2-2-2-1-1-10001112, -3-2-2-2-2-1-10011112, -3-2-2-2-2-2-10111112, -3-3-2-1-1-1-10000122, -3-3-2-2-1-1-10001122, -3-3-2-2-2-1-10011122, -3-3-2-2-2-2-10111122, -3-3-3-2-1-1-10001222, -3-3-3-2-2-1-10011222, -3-3-3-2-2-2-10111222, -3-3-3-3-2-1-10012222, -3-3-3-3-2-2-10112222, -3-3-3-3-3-2-10122222, -4-3-2-1-1-1-10000123, -4-3-2-2-1-1-10001123, -4-3-2-2-2-1-10011123, -4-3-2-2-2-2-10111123, -4-3-3-2-1-1-10001223, -4-3-3-2-2-1-10011223, -4-3-3-2-2-2-10111223, -4-3-3-3-2-1-10012223, -4-3-3-3-2-2-10112223, -4-3-3-3-3-2-10122223, -4-4-3-2-1-1-10001233, -4-4-3-2-2-1-10011233, -4-4-3-2-2-2-10111233, -4-4-3-3-2-1-10012233, -4-4-3-3-2-2-10112233, -4-4-3-3-3-2-10122233, -4-4-4-3-2-1-10012333, -4-4-4-3-2-2-10112333, -4-4-4-3-3-2-10122333, -4-4-4-4-3-2-10123333, -5-4-3-2-1-1-10001234, -5-4-3-2-2-1-10011234, -5-4-3-2-2-2-10111234, -5-4-3-3-2-1-10012234, -5-4-3-3-2-2-10112234, -5-4-3-3-3-2-10122234, -5-4-4-3-2-1-10012334, -5-4-4-3-2-2-10112334, -5-4-4-3-3-2-10122334, -5-4-4-4-3-2-10123334, -5-5-4-3-2-1-10012344, -5-5-4-3-2-2-10112344, -5-5-4-3-3-2-10122344, -5-5-4-4-3-2-10123344, -5-5-5-4-3-2-10123444, -6-5-4-3-2-1-10012345, -6-5-4-3-2-2-10112345, -6-5-4-3-3-2-10122345, -6-5-4-4-3-2-10123345, -6-5-5-4-3-2-10123445, -6-6-5-4-3-2-10123455, -7-6-5-4-3-2-10123456;

c_2=16 – имеется 128 спектров: -1-1-1-1-1-1-1-100000000, -2-1-1-1-1-1-1-100000001, -2-2-1-1-1-1-1-100000011, -2-2-2-1-1-1-1-100000111, -2-2-2-2-1-1-1-100001111, -2-2-2-2-2-1-1-100011111, -2-2-2-2-2-2-1-100111111, -2-2-2-2-2-2-2-101111111, -3-2-1-1-1-1-1-100000012, -3-2-2-1-1-1-1-100000112, -3-2-2-2-1-1-1-100001112, -3-2-2-2-2-1-1-100011112, -3-2-2-2-2-2-1-100111112, -3-2-2-2-2-2-2-101111112, -3-3-2-1-1-1-1-100000122, -3-3-2-2-1-1-1-100001122, -3-3-2-2-2-1-1-100011122, -3-3-2-2-2-2-1-100111122, -3-3-2-2-2-2-2-101111122, -3-3-3-2-1-1-1-100001222, -3-3-3-2-2-1-1-100011222, -3-3-3-2-2-2-1-100111222, -3-3-3-2-2-2-2-101111222, -3-3-3-3-2-1-1-100012222, -3-3-3-3-2-2-1-100112222, -3-3-3-3-2-2-2-101112222, -3-3-3-3-3-2-1-100122222, -3-3-3-3-3-2-2-101122222, -3-3-3-3-3-3-2-101222222, -4-3-2-1-1-1-1-100000123, -4-3-2-2-1-1-1-100001123, -4-3-2-2-2-1-1-100011123, -4-3-2-2-2-2-1-100111123, -4-3-2-2-2-2-2-101111123, -4-3-3-2-1-1-1-100001223, -4-3-3-2-2-1-1-100011223, -4-3-3-2-2-2-1-100111223, -4-3-3-2-2-2-2-101111223, -4-3-3-3-2-1-1-100012223, -4-3-3-3-2-2-1-100112223, -4-3-3-3-2-2-2-101112223, -4-3-3-3-3-2-1-100122223, -4-3-3-3-3-2-2-101122223, -4-3-3-3-3-3-2-101222223, -4-4-3-2-1-1-1-100001233, -4-4-3-2-2-1-1-100011233, -4-4-3-2-2-2-1-100111233, -4-4-3-2-2-2-2-101111233, -4-4-3-3-2-1-1-100012233, -4-4-3-3-2-2-1-100112233, -4-4-3-3-2-2-2-101112233, -4-4-3-3-3-2-1-100122233, -4-4-3-3-3-2-2-101122233, -4-4-3-3-3-3-2-101222233, -4-4-4-3-2-1-1-100012333, -4-4-4-3-2-2-1-100112333, -4-4-4-3-2-2-2-101112333, -4-4-4-3-3-2-1-100122333, -4-4-4-3-3-2-2-101122333, -4-4-4-3-3-3-2-101222333, -4-4-4-4-3-2-1-100123333, -4-4-4-4-3-2-2-101123333, -4-4-4-4-3-3-2-101223333, -4-4-4-4-4-3-2-101233333, -5-4-3-2-1-1-1-100001234, -5-4-3-2-2-1-1-100011234, -5-4-3-2-2-2-1-100111234, -5-4-3-2-2-2-2-101111234, -5-4-3-3-2-1-1-100012234, -5-4-3-3-2-2-1-100112234, -5-4-3-3-2-2-2-101112234, -5-4-3-3-3-2-1-100122234, -5-4-3-3-3-2-2-101122234, -5-4-3-3-3-3-2-101222234, -5-4-4-3-2-1-1-100012334, -5-4-4-3-2-2-1-100112334, -5-4-4-3-2-2-2-101112334, -5-4-4-3-3-2-1-100122333, -5-4-4-3-3-2-2-101122334, -5-4-4-3-3-3-2-101222334,

-5-4-4-4-3-2-1-100123334, -5-4-4-4-3-2-2-101123334, -5-4-4-4-3-3-2-101223334,
-5-4-4-4-4-3-2-101233334, -5-5-4-3-2-1-1-100012344, -5-5-4-3-2-2-1-100112344,
-5-5-4-3-3-2-1-100122344, -5-5-4-3-2-2-2-101112344, -5-5-4-3-3-2-2-101122344,
-5-5-4-3-3-3-2-101222344, -5-5-4-4-3-2-1-100123344, -5-5-4-4-3-2-2-101123344,
-5-5-4-4-3-3-2-101223344, -5-5-4-4-4-3-2-101233344, -5-5-5-4-3-2-1-100123444,
-5-5-5-4-3-2-2-101123444, -5-5-5-4-3-3-2-101223444, -5-5-5-4-4-3-2-101233444,
-5-5-5-5-4-3-2-101234444, -6-5-4-3-2-1-1-100012345, -6-5-4-3-2-2-1-100112345,
-6-5-4-3-2-2-2-101112345, -6-5-4-3-3-2-1-100122345, -6-5-4-3-3-2-2-101122345,
-6-5-4-3-3-3-2-101222345, -6-5-4-4-3-2-1-100123345, -6-5-4-4-3-2-2-101123345,
-6-5-4-4-3-3-2-101223345, -6-5-4-4-4-3-2-101233345, -6-5-5-4-3-2-1-100123445,
-6-5-5-4-3-2-2-101123445, -6-5-5-4-3-3-2-101223445, -6-5-5-4-4-3-2-101233445,
-6-5-5-5-4-3-2-101234445, -6-6-5-4-3-2-1-100123455, -6-6-5-4-3-2-2-101123455,
-6-6-5-4-3-3-2-101223455, -6-6-5-4-4-3-2-101233455, -6-6-5-5-4-3-2-101234455,
-6-6-6-5-4-3-2-101234555, -7-6-5-4-3-2-1-100123456, -7-6-5-4-3-2-2-101123456,
-7-6-5-4-3-3-2-101223456, -7-6-5-4-4-3-2-101233456, -7-6-5-5-4-3-2-101234456,
-7-6-6-5-4-3-2-101234556, -7-7-6-5-4-3-2-101234566, -8-7-6-5-4-3-2-101234567.

Анализ экспериментальных данных позволяет предположить, что $P(n)=2^{\frac{n}{2}-1}$. С учетом существования спектров только для четных c_2 докажем методом математической индукции, что данная формула для нахождения общего числа спектров действительно верна. Замечаем, что в силу связности спектра каждый спектр в предыдущем четном c_2 дает два спектра в следующем четном c_2. Далее, проверяем соотношение при n=2: $P(2)=2^{\frac{2}{2}-1}=2^0=1$ – верно; предполагаем, что при n=k у нас $P(k)=2^{\frac{k}{2}-1}$. Тогда при n=k+2 имеем: $P(k+2)=2\times P(k)=2\times 2^{\frac{k}{2}-1}=2^{\frac{k}{2}+1-1}=2^{\frac{k+2}{2}-1}$, что и требовалось доказать.

Замечания:

1) Тот факт, что спектры при c_1=-1 действительно имеют место только для четных c_2, может быть доказан по-другому. А именно, в силу замечания 4.2.0 (b) статьи [2] справедливо соотношение для классов Черна $c_3\equiv c_1c_2 \pmod 2$. С другой стороны, согласно теореме 3.2 (a) книги [1] для расслоений ранга 2 имеем c_3=0, следовательно, при c_1=-1 получаем $0\equiv -c_2 \pmod 2$, откуда c_2=2k – всегда четное число, то есть, попросту говоря, сами 2-расслоения могут иметь в данном случае только четный второй класс Черна;

2) можно ставить вопросы о реализуемости спектров – существовании «в природе» расслоений с такими спектрами, об описании многообразий модулей таких расслоения, тем самым работа имеет серьезную перспективу.

Библиографический список

1. Фултон, У. Теория пересечений [Текст]. − М.: Мир, 1989. – 583 с.
2. Hartshorne R. Stable reflexive sheaves // Math. Ann., 254, 1980, 121−176.

Bibliograficheskij spisok

1. Fulton, U. Teorija peresechenij [Tekst]. − M.: Mir, 1989. – 583 s.
2. Hartshorne R. Stable reflexive sheaves // Math. Ann., 254, 1980, 121−176.