УДК 512.7

А. Д. Уваров

Геометрия схемы модулей стабильных пучков ранга 2 с малыми классами Черна на трехмерной квадрике

В этой статье изучается геометрия схемы модулей Гизекера-Маруямы полустабильных пучков ранга 2 с классами Черна $c_1 = -1, c_2 = 2, c_3 = 0$ на гладкой трехмерной проективной квадрике Q. Мы приводим геометрическое описание компонент этой схемы.

Ключевые слова: трехмерная квадрика, стабильный когерентный пучок, монада, схема модулей.

A. D. Uvarov

Geometry of the scheme of moduli of stable rank 2 sheaves with small Chern's classes on a three-dimensional quadric

In this article we study the geometry of the Gieseker-Maruyama moduli scheme of semistable sheaves of the rank 2 with Chern classes $c_1 = -1, c_2 = 2, c_3 = 0$ on a smooth three-dimensional projective quadric. We give a geometric description of the components of this scheme.

Keywords: a three-dimensional quadric, a stable coherent sheaf, monad, a moduli scheme.

В настоящей статье дается геометрическое описание многообразия $M_Q(2;-1,2,0)$ модулей полустабильных не локально свободных пучков ранга 2 с малыми классами Черна $c_1 = -1, c_2 = 2, c_3 = 0$ на гладкой трехмерной проективной квадрике Q над алгебраически замкнутым полем $\mathbf{k}$ характеристики 0.

В статье [1] автором было показано, что:

(i) $M_Q(2;-1,2,0) = \overline{M_Q(-1,2)} \cup M'$, где $\overline{M_Q(-1,2)}$ − замыкание в $M_Q(2;-1,2,0)$ многообразия $M_Q(-1,2)$ модулей расслоений ранга 2, а M' − многообразие модулей не локально свободных пучков из $M_Q(2;-1,2,0)$;

(ii) всякий пучок $[\mathcal{E}] \in \overline{M_Q(-1,2)}$ является когомологией монады

$$0 \to \mathcal{O}_Q(-1) \to \mathbf{k}^2 \otimes \mathcal{S} \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{O}_Q \to 0, \tag{1}$$

где $\mathcal{S}$ − спинорное расслоение на Q;

(iii) всякий пучок $[\mathcal{E}] \in M' \setminus (M' \cap \overline{M_Q(1,2)})$ является когомологией монады

$$0 \to \mathcal{O}_Q(-2) \xrightarrow{\alpha} 3\mathcal{O}_Q(-1) \xrightarrow{\beta} \mathcal{O}_y \to 0 \tag{2}$$

где y − точка на Q.

Пусть $W = H^0(Q, \mathcal{S}^\vee)^\vee$, $G = Gr(2, W)$, и $\mathcal{U} \to W^\vee \otimes \mathcal{O}_G$ − тавтологическое расслоение на грассманиане G, $V = H^0(\mathcal{O}_Q(1))^\vee$, $\dim V = 5$, $F(1,4,V)$ и $F(2,4,V)$ − многообразие флагов.

Как известно, $P(W)$ отождествляется с базой семейства прямых на Q. Поэтому определено отображение нуль-корреляции $\omega: P(W) \to P(W^\vee)$ следующим образом: всякой прямой $l \subset Q$ как точке в $P(W)$ ставится в соответствие плоскость $\mathbb{P}_2 \subset P(W)$, точкам которой отвечают прямые в Q, пересекающие l. Нуль-корреляция ω определяет однозначно с точностью до пропорциональности симплектическую форму $\tilde{\omega} \in \Lambda^2 W^\vee$ и, тем самым, гиперплоскость $H_\omega \subset P(\Lambda^2 W)$, пересекающую грассманиан G по квадрике изотропных прямых нуль-корреляции. Эта квадрика естественным образом отождествляется с Q: каждой изотропной прямой нуль-корреляции ω отвечает точка в Q пересечения прямых, соответствующих точкам данной изотропной прямой. Таким образом, имеем каноническое вложение $Q \to Gr(2,W)$, и нетрудно видеть, что ограничение $\mathcal{U}$ на Q изоморфно $\mathcal{S}$.

Основным результатом статьи является следующая **теорема:**

(i) $M' \overset{\text{sets}}{=} Q \times_{P(V)} F(1,4,V) \times_{P(V^\vee)} F(2,4,V)$;

(ii) имеет место изоморфизм приведенных схем: $\overline{M_Q(-1,2)} \simeq \mathbf{P}(S^2\mathcal{U})$;

(iii) $\overline{M_Q(-1,2)} \setminus M_Q(-1,2) \simeq \mathbf{P}(S^2\mathcal{S})$.

Доказательство:

Докажем утверждение (i) теоремы.

Морфизм α в монаде (2) задается двумерным подпространством $A_2 \subset V$ как композиция морфизмов $\mathcal{O}_Q(-2) \to V \otimes \mathcal{O}_Q(-1) \to (V / A_2) \otimes \mathcal{O}_Q(-1)$.

Морфизм β задается сюръекцией $\beta_y : V / A_2 \to \mathbf{k}$. Композиция сюръекций $V \twoheadrightarrow V_5 / A_2 \overset{\beta_y}{\twoheadrightarrow} \mathbf{k}$ вместе с тройкой $0 \to A_2 \to V \to V / A_2 \to 0$ показывает, что ядро композиции $V \to V / A_2 \to \mathbf{k}$ есть четырехмерное пространство V_4, содержащее A_2. Таким образом, пара (A_2, V_4) является точкой многообразия флагов $Fl(2,4,V)$. Теперь запишем условие того, что композиция $\beta^\circ\alpha$ в монаде (2) равна 0. Ограничение морфизма α на точку $y \in Q$ есть композиция $\alpha_y : \mathbf{k} \to V \to V / A_2$, и условие $\beta^\circ\alpha = 0$ равносильно условию $\beta_y{}^\circ\alpha_y = 0$, из которого следует, что $\alpha_y(\mathbf{k}) \subset V_4$. Другими словами, пару $(\mathbf{k}, V_4)$ можно рассматривать как точку многообразия флагов $F(1,4,V)$. Тем самым, данные $(\mathbf{k}_y \subset V_4 \supset V_2)$, где $y \in Q$, можно рассматривать как точку из расслоенного произведения $Q \times_{P(V)} F(1,4,V) \times_{P(V^\vee)} F(2,4,V)$.

Теперь докажем утверждение (ii) теоремы. Сначала покажем, что сюръективные морфизмы ε параметризуются схемой $G \setminus Q$. Пусть Q − гиперплоское сечение грассманиана G, задаваемое симплектической формой $\tilde{\omega} \in \Lambda^2 W^\vee$. По посторению, спинорное расслоение $\mathcal{S}$ на Q есть ограничение $\mathcal{U}$ на Q. Рассмотрим морфизм подрасслоения $\varepsilon^\vee : \mathcal{O}_Q \to (\mathbf{k}^2)^\vee \otimes \mathcal{S}^\vee$, двойственный к морфизму ε из монады (1). Морфизм $\varepsilon^\vee$ можно рассматривать как сечение $^\sharp\varepsilon \in H^0((\mathbf{k}^2)^\vee \otimes \mathcal{S}^\vee) = (\mathbf{k}^2)^\vee \otimes W^\vee$. Рассмотрим универсальную тройку на грассманиане $G : 0 \to \mathcal{U} \to W^\vee \otimes \mathcal{O}_G \to \mathcal{Q} \to 0$, ее ограничение на Q:

$$0 \to \mathcal{S} \overset{\gamma}{\to} W \otimes \mathcal{O}_Q \overset{\tilde{\omega}}{\simeq} W^\vee \otimes \mathcal{O}_Q \overset{\gamma^\vee}{\to} \mathcal{S}^\vee \to 0,$$

и индуцированный эпиморфизм

$$\tilde{\gamma} : (\mathbf{k}^2)^\vee \otimes W^\vee \otimes \mathcal{O}_Q \twoheadrightarrow (\mathbf{k}^2)^\vee \otimes \mathcal{S}^\vee.$$

По построению

$$\varepsilon^\vee = \tilde{\gamma}(^\sharp\varepsilon \otimes \mathcal{O}_Q). \qquad (3)$$

Рассмотрим ограничение морфизма $\tilde{\gamma}$ на точку $y \in Q$: $\tilde{\gamma}_y : \mathrm{Hom}(\mathbf{k}^2, W^\vee) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbf{k}^2, \mathcal{S}_y^\vee)$.

Пусть $^\sharp\varepsilon : \mathbf{k}^2 \to W^\vee$ − вложение. Покажем, что условие $\tilde{\gamma}_y(^\sharp\varepsilon) = 0$ равносильно изотропности подпространства $\tilde{\omega}^{-1}(^\sharp\varepsilon(\mathbf{k}^2)) \subset W$ относительно симплектической формы $\tilde{\omega}$. Действительно, пусть $^\sharp\varepsilon(\mathbf{k}^2) = \tilde{\omega}(i_y(\mathcal{S}_y))$, где $i_y(\mathcal{S}_y)$ − изотропное подпространство в W, а $i_y : \mathcal{S}_y \to W$ − тавтологическое вложение. Тогда $\tilde{\gamma}_y(^\sharp\varepsilon(\mathbf{k}^2)) = i_y^\vee(^\sharp\varepsilon(\mathbf{k}^2)) = i_y^\vee(\tilde{\omega}(i_y(\mathcal{S}_y))) = 0$, то есть $^\sharp\varepsilon(\mathbf{k}^2) \subset \ker i_y^\vee$. Тем самым, $\tilde{\omega}^{-1}(^\sharp\varepsilon(\mathbf{k}^2))$ − двумерное изотропное подпространство в W, по построению равное $i_y(\mathcal{S}_y)$. Поэтому сюръективные морфизмы ε в монаде (1) параметризуются схемой $G \setminus Q$. Кроме того, для $y \in Q$

$$\mathrm{coker}\,\varepsilon = \mathbf{k}_y. \qquad (4)$$

Покажем, что монада (1) имеет вид:

$$0 \to \mathcal{O}_Q(-1) \xrightarrow{\delta} \mathbf{k}^2 \otimes \mathcal{S} \overset{q}{\simeq} (\mathbf{k}^2)^\vee \otimes \mathcal{S}^\vee(-1) \xrightarrow{\delta^\vee} \mathcal{O}_Q \to 0, \tag{5}$$

где

$$q \in H^0(\wedge^2(\mathbf{k}^2 \otimes \mathcal{S})^\vee(-1)), \tag{6}$$

и $\varepsilon = \delta^\vee \circ q$.

Запишем дисплей монады (1):

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 & 0 & \\
 & & \mathcal{O}_Q \arrow[u] \arrow[r, equal] & \mathcal{O}_Q \arrow[u] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_Q(-1) \arrow[r, "\delta"] & \mathbf{k}^2 \otimes \mathcal{S} \arrow[u, "\varepsilon"] \arrow[r] & \mathcal{C} \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_Q(-1) \arrow[u, equal] \arrow[r] & \mathcal{K} \arrow[u] \arrow[r] & \mathcal{E} \arrow[u] \arrow[r] & 0, \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd} \tag{7}$$

где $\mathcal{K}$ и $\mathcal{C}$ − некоторые локально свободные пучки.

Нижнее расширение в диаграмме (7) задается ненулевым элементом $\xi \in H^1(\mathcal{E})$, т. к. $Ext^1(\mathcal{E}, \mathcal{O}_Q(-1)) = H^1(\mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{O}_Q(-1))) = H^1(\mathcal{E})$. Из тройки $0 \to \mathcal{O}_Q(-1) \to \mathcal{E} \to \mathcal{I}_{l_1 \sqcup l_2} \to 0$, где l_1 и l_2 − некоторые скрещивающиеся прямые в Q, следует, что $h^1(\mathcal{E}) = 1$. Тем самым, пучок $\mathcal{E}$ полностью определяет нижнюю тройку в диаграмме (7) однозначно с точностью до изоморфизма. Кроме того, из этой тройки получаем: $h^1(\mathcal{K}) = h^1(\mathcal{E}) = 1$. Далее, средняя вертикальная тройка в (7) задается ненулевым элементом ζ в группе $Ext^1(\mathcal{K}, \mathcal{O}_Q(-1)) = H^1(\mathcal{H}om(\mathcal{K}, \mathcal{O}_Q(-1))) = H^1(\mathcal{K}) = \mathbf{k}$. Таким образом, дисплей монады (1) однозначно определяется (с точностью до изоморфизма) расслоением $\mathcal{E}$.

Двойственная к (7) диаграмма, тензорно умноженная на $\mathcal{O}_Q(-1)$, изоморфна исходному дисплею в силу канонического кососимметрического изоморфизма $\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}^\vee(-1)$. В частности, изоморфизм $q = q(\mathcal{E}) : \mathbf{k}^2 \otimes \mathcal{S} \xrightarrow{\sim} (\mathbf{k}^2 \otimes \mathcal{S})^\vee(-1)$, также является кососимметрическим, то есть верны равенство (6) и соотношение $\varepsilon = \varepsilon(\mathcal{E}) = \delta^\vee \circ q.$ Тем самым, доказано (5).

Теперь покажем что

$$q = q(\mathcal{E}) = \psi(\mathcal{E}) \otimes \varphi, \tag{8}$$

где $\varphi : \mathcal{S} \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}^\vee(-1)$ − стандартный кососимметрический изоморфизм, а $\psi(\mathcal{E}) \in S^2(\mathbf{k}^2)^\vee$.

Как известно [2. с. 191], $\mathcal{S}$ является стабильным расслоением, а, следовательно, простым: $\dim Hom(\mathcal{S}, \mathcal{S}) = 1$. Пользуясь последним равенством и тем, что

$Hom(\mathcal{S}, \mathcal{S}) = H^0(\mathcal{H}om(\mathcal{S}, \mathcal{S})) = H^0((S^\vee \otimes \mathcal{S})^\vee(-1)) = H^0(S^2\mathcal{S}^\vee(-1)) \oplus H^0(\wedge^2\mathcal{S}^\vee(-1)) = H^0(S^2\mathcal{S}^\vee(-1)) \oplus H^0(\mathcal{O}_Q)$

получаем, что $h^0(S^2\mathcal{S}^\vee(-1)) = 0$, поскольку $h^0(\mathcal{O}_Q) = 1$. Из равенства (6) следует, что $q \in H^0((S^2(\mathbf{k}^2)^\vee \otimes \wedge^2\mathcal{S}^\vee \oplus \wedge^2(\mathbf{k}^2)^\vee \otimes S^2(\mathcal{S}^\vee))(-1)) = S^2(\mathbf{k}^2)^\vee \otimes H^0(\wedge^2(\mathcal{S}^\vee)(-1)) \oplus \wedge^2(\mathbf{k}^2)^\vee \otimes H^0(S^2(\mathcal{S}^\vee)(-1)) = S^2(\mathbf{k}^2)^\vee \otimes H^0(\mathcal{O}_Q)$. Тем самым, верна формула (8).

Далее, построим изоморфизм

$$f : M_Q(-1,2) \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}(S^2\mathcal{U}|_{G\smallsetminus Q}). \tag{9}$$

В самом деле, $\mathbf{P}(S^2\mathcal{U}|_{G\smallsetminus Q}) = \{(\mathbf{k}^2 \subset W^\vee, [\psi]) \mid (\mathbf{k}^2 \subset W^\vee) \in G \smallsetminus Q, \psi \in S^2\mathbf{k}^2\}$.

Зададим морфизм f формулой:

$$f([\mathcal{E}]) = ({}^\sharp\varepsilon(\mathcal{E}) : \mathbf{k}^2 \to W^\vee, \psi(\mathcal{E})). \tag{10}$$

Обратный морфизм f^{-1} сопоставляет паре $({}^\sharp\varepsilon : \mathbf{k}^2 \to W^\vee, [\psi]) \in \mathbf{P}(S^2\mathcal{U}|_{G\smallsetminus Q})$ класс $[\mathcal{E}]$ когомологического пучка монады (5), в которой $q = \psi \otimes \varphi$, а $\delta = q^{-1} \circ \varepsilon^\vee$.

Теперь продолжим изоморфизм (9) до изоморфизма

$$\overline{M_Q(-1,2)} \simeq \mathbf{P}(S^2\mathcal{U}). \tag{11}$$

Пусть $M := \mathbf{P}(S^2\mathcal{U})$ и $g : M \to G$ − структурный морфизм. Согласно (9) имеем изоморфизм $f : M_Q(-1,2) \xrightarrow{\sim} M \smallsetminus g^{-1}(Q)$. Релятивизируем монаду (1) на $Q \times M$:

$$0 \to \mathcal{O}_Q(-1) \boxtimes \mathcal{L} \xrightarrow{\tilde{\varepsilon}^\vee} \mathcal{S} \boxtimes \mathcal{U} \xrightarrow{\tilde{\varepsilon}} \mathcal{O}_Q \boxtimes \mathcal{M} \to \mathcal{C} \to 0, \tag{12}$$

где $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ − некоторые обратимые пучки на M. По конструкции, $\mathrm{Supp}(\mathcal{C})$ есть сечение проекции $pr_2 : Q \times g^{-1}(Q) \to g^{-1}(Q)$. Заметим, что для любой точки $t \in g^{-1}(Q)$ имеет место равенство $\mathrm{Supp}(\mathcal{C}) \cap Q \times \{t\} = \{(y,t)\}$, где y − некоторая точка на квадрике Q. Кроме того, из (4) следует, что $\mathcal{C}|_{Q\times\{t\}} = \mathbf{k}_{(y,t)}$. Таким образом, $\mathrm{Supp}(\mathcal{C})$ − гладкая схема, изоморфная $g^{-1}(Q)$, а $\mathcal{C}$ − обратимый пучок на $\mathrm{Supp}(\mathcal{C})$. Тем самым, обозначая $Q_t := Q \times \{t\}, t \in M$, простым локальным вычислением находим

$$\mathcal{T}or_i(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{Q_t}) = 0, i > 0. \tag{13}$$

Теперь покажем, что когомологический пучок $\mathbb{E}$ комплекса (12) является плоским над M пучок. Для этого докажем, что $\mathcal{T}or_1(\mathbb{E}, \mathcal{O}_{Q_t}) = 0$ для любого $t \in M$.

Введем следующие обозначения: $\mathcal{A} = \mathcal{O}_Q(-1) \boxtimes \mathcal{L}, \mathcal{B} = \mathcal{S} \boxtimes \mathcal{U},$ \$\mathcal{H} = \mathcal{O}_Q \boxtimes \mathcal{M}, \mathcal{F} = \mathrm{coker}\,\tilde{\varepsilon}^\vee$. Из (12) вытекают точные последовательности: $0 \to \mathbb{E} \to \mathcal{F} \to \mathcal{H} \to \mathcal{C} \to 0, 0 \to \mathcal{A} \to \mathcal{B} \to \mathcal{F} \to 0.$ Так как пучок $\mathcal{A}|_{Q_t}$ локально свободен на Q_t, а морфизм $\tilde{\varepsilon}^\vee|_{Q_t} : \mathcal{A}|_{Q_t} \to \mathcal{B}|_{Q_t}$ инъективен на $Q_t \smallsetminus \{(y,t)\}$, мы получаем, что морфизм $\tilde{\varepsilon}^\vee|_{Q_t}$ инъективен. Отсюда и из последней тройки с учетом локальной свободы пучка $\mathcal{B}$ на $Q \times M$ следует, что $\mathcal{T}or_1(\mathcal{F}, \mathcal{O}_{Q_t}) = 0$. Для краткости ниже воспользуемся следующим обозначением: $\mathcal{T}or_i(\cdot, \mathcal{O}_{Q_t}) = \mathcal{T}or_i(\cdot)$.

В силу локальной свободы пучков $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ и $\mathcal{H}$ верны следующие равенства

$$\mathcal{T}or_i(\mathcal{A}) = \mathcal{T}or_i(\mathcal{B}) = \mathcal{T}or_i(\mathcal{H}) = 0, i > 0. \tag{14}$$

Разрежем последовательность $0 \to \mathbb{E} \to \mathcal{F} \to \mathcal{H} \to \mathcal{C} \to 0$ на две коротких точных тройки: $0 \to \mathbb{E} \to \mathcal{F} \to \mathcal{D} \to 0$ и $0 \to \mathcal{D} \to \mathcal{H} \to \mathcal{C} \to 0$. Применим функтор $\mathcal{T}or_i(\cdot)$ к последней тройке и выпишем кусок длинной точной последовательности $\mathcal{T}or$-ов: $\mathcal{T}or_3(\mathcal{C}) \to \mathcal{T}or_2(\mathcal{D}) \to \mathcal{T}or_2(\mathcal{H})$. Отсюда с учетом равенства $\mathcal{T}or_3(\mathcal{C}) = \mathcal{T}or_2(\mathcal{H}) = 0$ (см. (13) и (14)) получим, что $\mathcal{T}or_2(\mathcal{D}) = 0$. Применим функтор $\mathcal{T}or_i(\cdot)$ к тройке $0 \to \mathbb{E} \to \mathcal{F} \to \mathcal{D} \to 0$ и запишем кусок длинной точной последовательности $\mathcal{T}or$-ов: $\mathcal{T}or_2(\mathcal{D}) \to \mathcal{T}or_1(\mathbb{E}) \to \mathcal{T}or_1(\mathcal{F})$. Из этой тройки в силу доказанных выше равенств $\mathcal{T}or_2(\mathcal{D}) = \mathcal{T}or_1(\mathcal{F}) = 0$ следует, что $\mathcal{T}or_1(\mathbb{E}) = 0$. Тем самым, $\mathbb{E}$ − плоский пучок над M.

Рассмотрим модулярный морфизм $\Phi : M \to M_Q(2;-1,2,0), t \mapsto [\mathbb{E}|_{Q_t}]$.

По определению $\Phi|_{\mathbf{P}(S^2\mathcal{U}|_{G\smallsetminus Q})}$ совпадает с описанным ранее морфизмом $f^{-1} : \mathbf{P}(S^2\mathcal{U}|_{G\smallsetminus Q}) \to M_Q(-1,2)$. Из описания морфизма f^{-1} следует, что он определен на всем $\mathbf{P}(S^2\mathcal{U})$, при этом монада (5) видоизменяется при $t \in g^{-1}(Q)$ в комплекс (12), ограниченный на Q_t. Соответственно, морфизм f, определенный формулой (10), продолжается до морфизма $\Phi^{-1} : \overline{M_Q(-1,2)} \to \mathbf{P}(S^2\mathcal{U})$, задаваемого той же формулой (10). (Здесь $\overline{M_Q(-1,2)}$ понимается как приведенная схема.) Следовательно, Φ − замкнутое вложение и $\Phi(\mathbf{P}(S^2\mathcal{U})) = \overline{M_Q(-1,2)}$. Отсюда вытекает утверждение (ii).

Утверждение (iii) следует из (9) и (11).

Замечание. Можно показать, что биекция в утверждении (i) является изоморфизмом гладких схем.

Библиографический список

1. Уваров, А. Д. Модули стабильных пучков ранга 2 с классами Черна $c_1 = -1, c_2 = 2, c_3 = 0$ на трехмерной квадрике [Текст] / А. Д. Уваров // Моделирование и анализ информационных систем, т. 19. − 2012. – №2. − С. 19−40.

2. Ottaviani J., Szurek M. On moduli of stable 2-bundles with small chern classes on Q_3 [Текст] : Annali di Matematica Pura ed Applicata. − 1994.− CLXVII − с.191−241.

Bibliograficheskij spisok

1. Uvarov, A. D. Moduli stabil'nyh puchkov ranga 2 s klassami Cherna $c_1 = -1, c_2 = 2, c_3 = 0$ na trehmernoj kvadrike [Tekst] / A. D. Uvarov // Modelirovanie i analiz informacionnyh sistem, t. 19. − 2012. – №2. − S. 19−40.

2. Ottaviani J., Szurek M. On moduli of stable 2-bundles with small chern classes on Q_3 [Tekst] : Annali di Matematica Pura ed Applicata. − 1994.− CLXVII − c.191−241.