УДК 512.7

М. А. Заводчиков

О геометрии пространства модулей $\mathrm{M}_{\mathbb{P}^3}(2;-1;2;0)$

В настоящей статье рассматривается схема модулей Гизекера−Маруямы $\mathrm{M}_{\mathrm{P}^3}(2;-1,2,0)$ стабильных когерентных пучков без кручения ранга 2 с классами Черна $c_1=-1$, $c_2=2$, $c_3=0$ на трехмерном проективном пространстве P^3. Доказывается, что множество пучков $\mathcal{M}_4$ из $\mathbf{M}$ лежит в неприводимой компоненте $\overline{\mathcal{M}_1}$.

Ключевые слова: компактификация, схема модулей, когерентный пучок ранга 2 без кручения, трехмерное проективное пространство.

M. A. Zavodchikov

About geometry of space of moduli $\mathrm{M}_{\mathbb{P}^3}(2;-1;2;0)$

In this paper we consider the Giseker-Maruyama moduli scheme $\mathrm{M}_{\mathrm{P}^3}(2;-1,2,0)$ of stable coherent rank 2 torsion free sheaves with Chern's classes $c_1=-1$, $c_2=2$, $c_3=0$ on 3-dimensional projective space P^3. We prove that set $\mathcal{M}_4$ in $\mathbf{M}$ lies in the irreducible component $\overline{\mathcal{M}_1}$.

Keywords: compactification, a scheme of moduli, a coherent torsion free rank 2 sheave, 3-dimensional projective space.

Рассматривается схема модулей Гизекера-Маруямы $\mathbf{M}=\mathrm{M}_{\mathbb{P}^3}(2;-1;2;0)$ стабильных когерентных пучков ранга 2 без кручения на трехмерном проективном пространстве $\mathbb{P}^3$. В диссертации автора доказывается, что схема $\mathbf{M}$ есть объединение множеств пучков $\mathrm{M}_{\mathbb{P}^3}(-1,2)\cup\mathcal{M}_1\cup\mathcal{M}_2\cup\mathcal{M}_3\cup\mathcal{M}_4\cup\mathcal{M}_5$, где $\mathrm{M}_{\mathbb{P}^3}(-1,2)$ − множество локально свободных пучков из $\mathbf{M}$, а множества $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$, $\mathcal{M}_3$, $\mathcal{M}_4$ и $\mathcal{M}_5$ определяются следующим образом:

$\mathcal{M}_1=\{[\mathcal{E}]\in\mathbf{M}\,|\,\mathcal{E}^{\vee\vee}/\mathcal{E}\simeq\mathbf{k}_x,$ *где x − некоторая точка в* $\mathbb{P}^3\}$;

$\mathcal{M}_2=\{[\mathcal{E}]\in\mathbf{M}\,|\,\mathcal{E}^{\vee\vee}/\mathcal{E}\simeq\mathbf{k}_x\oplus\mathbf{k}_y,$ *x и y − различные точки в* $\mathbb{P}^3\}$;

$\mathcal{M}_3=\{[\mathcal{E}]\in\mathbf{M}\,|\,\mathcal{E}^{\vee\vee}/\mathcal{E}\simeq\mathcal{O}_m(1),$ *где m − некоторая прямая в* $\mathbb{P}^3\}$;

$\mathcal{M}_4=\{[\mathcal{E}]\in\mathbf{M}\,|\,\mathcal{E}^{\vee\vee}/\mathcal{E}\simeq\mathcal{Q},$ где пучок $\mathcal{Q}$ *включается в тройку*: $0\to\mathbf{k}_x\to\mathcal{Q}\to\mathcal{O}_m\to 0,$
в которой x − некоторая точка в $\mathbb{P}^3$, *а m − некоторая прямая в* $\mathbb{P}^3\}$;

$\mathcal{M}_5=\{[\mathcal{E}]\in\mathbf{M}\,|\,\mathcal{E}^{\vee\vee}/\mathcal{E}\simeq\mathcal{Q},$ *где $\mathcal{Q}$ − пучок из точной тройки*: $0\to\mathcal{Q}_0\to\mathcal{Q}\to\mathcal{O}_m(-1)\to 0,$
где $\mathcal{Q}_0$ - артинов пучок длины 2, а m - некоторая прямая в $\mathbb{P}^3\}$.

Автором найдены все неприводимые компоненты схемы модулей $\mathbf{M}$. Эти компоненты суть многообразия $\overline{\mathrm{M}_{\mathbb{P}^3}(-1,2)}$, $\overline{\mathcal{M}_1}$, $\overline{\mathcal{M}_2}$, $\overline{\mathcal{M}_3}$, − замыкания множеств $\mathrm{M}_{\mathbb{P}^3}(-1,2)$, $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ и $\mathcal{M}_3$ в схеме $\mathbf{M}$.

В диссертации автора [3] доказывалось, что множество $\mathcal{M}_4$ лежит в компоненте $\overline{\mathcal{M}_1}$. Приведенное там доказательство было довольно сложным и громоздким. В настоящей статье дается более простое доказательство указанного факта.

Через $\mathcal{E}_1$ будем обозначать пучок из множества $\overline{\mathcal{M}_1}$, а через $\mathcal{E}_4$ − пучок из множества $\mathcal{M}_4$. Построим семейство, накрывающее множество пучков $\mathcal{M}_1$. Рассмотрим рефлексивный пучок $\mathcal{E}_1^{\vee\vee}$. Нетрудно увидеть, что $c_1(\mathcal{E}_1^{\vee\vee})=-1$, $c_2(\mathcal{E}_1^{\vee\vee})=2$, $c_3(\mathcal{E}_1^{\vee\vee})=4$. Тем самым, согласно [2] $\mathcal{E}_1^{\vee\vee}$ включается в тройку:

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \to \mathcal{E}^{\vee\vee} \to \mathcal{J}_{l_1 \cup l_2} \to 0, \tag{1}$$

где l_1 и l_2 − скрещивающиеся прямые в $\mathbb{P}^3$. Эта тройка глобализуется в семейство троек следующим образом.

Пусть $G = G(1,3)$ − грассманиан прямых пространства $\mathbb{P}^3$. Рассмотрим произведение $\mathbb{P}^3 \times G \times G$. Обозначим через Γ график инциденции в $\mathbb{P}^3 \times G$. Пусть $p_{12} : \mathbb{P}^3 \times G \times G \to \mathbb{P}^3 \times G$, $p_{13} : \mathbb{P}^3 \times G \times G \to \mathbb{P}^3 \times G$ и $p_{23} : \mathbb{P}^3 \times G \times G \to G \times G$ − проекции, а $\Gamma_1 := p_{12}^{-1}(\Gamma)$ и $\Gamma_2 := p_{13}^{-1}(\Gamma)$. Пусть $\sigma_\Delta : G \times G \to G \times G$ − раздутие $G \times G$ вдоль диагонали $\Delta \subset G \times G$. Рассмотрим расслоенные произведения $\tilde{\Gamma}_i = \Gamma_i \times_{G \times G} G \times G, i = 1, 2$, их объединение $\tilde{\Gamma} = \tilde{\Gamma}_1 \cup \tilde{\Gamma}_2$ как приведенную схему с естественной проекцией $q : \tilde{\Gamma} \to G \times G$, и их пересечение $\mathcal{D} = \tilde{\Gamma}_1 \cap \tilde{\Gamma}_2$.

Так как $\mathcal{D}$ − дивизор Картье в $\tilde{\Gamma}_2$, то точна тройка: $0 \to \mathcal{O}_{\tilde{\Gamma}_2}(-\mathcal{D}) \to \mathcal{O}_{\tilde{\Gamma}} \to \mathcal{O}_{\tilde{\Gamma}_1} \to 0$.

Применяя функтор $\mathcal{E}xt_q(*, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \boxtimes \mathcal{O}_{G \times G})$ к этой тройке, получаем точную тройку $\mathcal{O}_{G \times G}$-пучков $0 \to \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A} \to \mathcal{A}_2 \to 0$, где $\mathcal{A}_1 = \mathcal{E}xt_q^2(\mathcal{O}_{\Gamma_1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \boxtimes \mathcal{O}_{G \times G})$, $\mathcal{A} = \mathcal{E}xt_q^2(\mathcal{O}_{\tilde{\Gamma}}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \boxtimes \mathcal{O}_{G \times G})$, а $\mathcal{A}_2 = \mathcal{E}xt_q^2(\mathcal{O}_{\tilde{\Gamma}_2}(-\mathcal{D}), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \boxtimes \mathcal{O}_{G \times G})$. Легко проверить, что $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ − локально свободные $\mathcal{O}_{G \times G}$-пучки ранга 2, коммутирующие с заменой базы. Тем самым, пучок $\mathcal{A}$ также локально свободен и коммутирует с заменой базы. Пусть $\mathbf{T} = \mathrm{Proj}(\mathcal{A}^\vee)$, $\mathbf{T}_i = \mathrm{Proj}(\mathcal{A}_i^\vee), i = 1, 2,$ и $\mathbf{\Gamma} = \tilde{\Gamma} \times_{G \times G} \mathbf{T}$. По построению $\mathbf{T}_1 \cup \mathbf{T}_2 \subset \mathbf{T}$.

Так как $\mathcal{A}$ коммутирует с заменой базы, то согласно [3, Corollary 4.5] тройка (1) глобализуется в тройку на $\mathbb{P}^3 \times \mathbf{T}$

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbf{T}}(1) \to \mathbb{F} \to \mathcal{J}_{\mathbf{\Gamma}, \mathbb{P}^3 \times \mathbf{T}} \to 0. \tag{2}$$

По построению $\mathbf{T}$ есть база семейства $\mathbb{F} = \{F_t\}_{t \in \mathbf{T}}$ пучков на $\mathbb{P}^3$ такого, что для $t \in \mathbf{T} \setminus (\mathbf{T}_1 \cup \mathbf{T}_2)$ пучок F_t есть рефлексивный пучок из ранга 2 с классами Черна $c_1 = -1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 4$, входящий в точную тройку (1), а для $t \in \mathbf{T}_1 \cup \mathbf{T}_2$ пучок F_t имеет особенность вдоль прямой $l_t = \mathbf{\Gamma} \cap (\mathbb{P}^3 \times \{t\})$ и $\dim \mathrm{Sing}(F_t|_{\mathbb{P}^3 \setminus l_t}) \le 0$.

Пусть Z − образ $\mathrm{Sing}\mathbb{F}$ при изоморфизме $\mathbb{P}^3 \times \mathbf{T} \simeq \mathbf{T} \times \mathbb{P}^3$ и $U = \mathbf{T} \times \mathbb{P}^3 \setminus Z$. Рассмотрим схему $\tilde{\Sigma} = \mathbb{P}^3 \times \mathbf{T} \times \mathbb{P}^3$ с проекциями $pr_{12} : \tilde{\Sigma} \to \mathbb{P}^3 \times \mathbf{T}$, $pr_{13} : \tilde{\Sigma} \to \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3$, $pr_{23} : \tilde{\Sigma} \to \mathbf{T} \times \mathbb{P}^3$, диагональ Δ в $\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3$, и пусть $\Sigma = \mathbb{P}^3 \times U$, $\Delta_\Sigma = pr_{13}^{-1}(\Delta) \cap \Sigma$, $\mathbb{F}_\Sigma = pr_{12}^* \mathbb{F}|_\Sigma$ и $q = pr_{23}|_\Sigma : \Sigma \to U$. По построению пучок $\mathcal{N} := q_* \mathcal{H}om(\mathbb{F}_\Sigma, \mathcal{O}_{\Delta_\Sigma})$ − локально свободный пучок ранга 2 на U. На Σ имеем сюръективную композицию морфизмов $e : q^* \mathcal{N} \otimes \mathbb{F}_\Sigma = q^* q_* \mathcal{H}om(\mathbb{F}_\Sigma, \mathcal{O}_{\Delta_\Sigma}) \otimes \mathbb{F}_\Sigma \xrightarrow{can} \mathcal{H}om(\mathbb{F}_\Sigma, \mathcal{O}_{\Delta_\Sigma}) \otimes \mathbb{F}_\Sigma \xrightarrow{ev} \mathcal{O}_{\Delta_\Sigma}$.

Рассмотрим схему $\mathbf{B} = \mathrm{Proj}(\mathcal{N}^\vee)$, и пусть $p : \mathbf{B} \to U$ − структурный морфизм, $\tilde{p} = \mathrm{id}_{\mathbb{P}^3} \times p : \mathbb{P}^3 \times \mathbf{B} \to \Sigma$ и $\tilde{q} = pr_2 : \mathbb{P}^3 \times \mathbf{B} \to \mathbf{B}$ − проекции и $\Delta_{\mathbf{B}} := \tilde{p}^{-1}(\Delta_\Sigma)$. Положим $\tilde{\mathbf{B}}_i := p^{-1}(\mathbf{T}_i \times \mathbb{P}^3 \cap U)$, $\mathbf{B}_i := \tilde{\mathbf{B}}_i \setminus \mathbf{B}_1 \cap \mathbf{B}_2$, $i = 1, 2$ и пусть $\mathbf{B}' := \mathbf{B}_1 \sqcup \mathbf{B}_2$. На $\mathbf{B}$ имеем канонический морфизм подрасслоения $\tau : \mathcal{O}_{\mathbf{B}}(-1) \rightarrowtail p^* \mathcal{N}$. С учетом равенства $q \circ \tilde{p} = p \circ \tilde{q}$ имеем композицию морфизмов $\varepsilon : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbf{B}}(-1) \otimes \tilde{p}^* \mathbb{F}_\Sigma \xrightarrow{\tilde{q}^* \tau} \tilde{q}^* p^* \mathcal{N} \otimes \tilde{p}^* \mathbb{F}_\Sigma = \tilde{p}^*(q^* \mathcal{N} \otimes \mathbb{F}_\Sigma) \xrightarrow{\tilde{p}^* e} \mathcal{O}_{\Delta_{\mathbf{B}}}$, где $\mathcal{O}_{\Delta_{\mathbf{B}}} = \tilde{p}^* \mathcal{O}_{\Delta_\Sigma}$. Так как $\mathbb{F}_\Sigma|_{\Delta_\Sigma}$ − локально свободный пучок ранга 2, то ε − эпиморфизм. Определим $\mathbb{E}$ из условия точности тройки:

$$0 \to \mathbb{E} \to \tilde{p}^{*}\mathbb{F}_{\Sigma} \xrightarrow{\mathcal{E}} \mathcal{O}_{\Delta_{\mathbf{B}}} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbf{B}}(-1) \to 0. \qquad (3)$$

По построению ограничение $\mathbb{E}|_{\mathbb{P}^3 \times b}$ пучка $\mathbb{E}$ на $\mathbb{P}^3 \times b$, где $b \in \mathbf{B}$ − произвольная точка в $\mathbf{B}$, есть пучок $\mathcal{E} = \mathbb{E}|_{\mathbb{P}^3 \times b}$ из множества $\overline{\mathcal{M}_1}$. Другими словами имеем модулярный морфизм $\varphi : \mathbf{B} \to \overline{\mathcal{M}_1} \mid b \mapsto [\mathbb{E}|_{\mathbb{P}^3 \times b}]$. Рассмотрим множество пучков $\mathcal{M}_4^* = \{[\mathcal{E}] \in \mathcal{M}_4 \mid 0 \to \mathbf{k}_x \to \mathcal{E}^{\vee\vee} / \mathcal{E} \to \mathcal{O}_m \to 0$, где m − некоторая прямая в $\mathbb{P}^3$, а $x \notin m \cup \mathrm{Sing}(\mathcal{E}^{\vee\vee})\}$. Для каждого пучка $[\mathcal{E}] \in \mathcal{M}_4^*$ точна тройка:

$$0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{F} \to \mathbf{k}_x \to 0, \qquad (4)$$

где $\mathcal{F}^{\vee\vee} / \mathcal{F} = \mathcal{O}_m$ для некоторой прямой в $\mathbb{P}^3$, а $x \in \mathbb{P}^3 \setminus \mathrm{Sing}(\mathcal{F})$. Тогда для $i = 1, 2$ однозначно определена точка $b_i \in \mathbf{B}_i$ такая, что тройка (4) получается ограничением тройки (3) на $\mathbb{P}^3 \times b_i$. Тем самым, $\varphi(\mathbf{B}') = \mathcal{M}_4^*$. Так как $\mathcal{M}_4^*$ − плотное открытое множество в $\mathcal{M}_4$,то отсюда следует, что $\mathcal{M}_4 \subset \overline{\mathcal{M}_1}$.

Библиографический список

1. Заводчиков, М. А. Модули стабильных пучков ранга два с классами Черна $c_1 = -1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 0$ на проективном пространтстве [Текст] : Дис. … канд. физ.-мат. наук: 01.01.06 / Михаил Александрович Заводчиков. − Ярославль, 2012. – 86 с.
2. Hartshorne, R. Stable reflexive sheaves. Math. Ann. 254, 1980, С. 121−176.
3. Lange, H. Universal families of extentions. Journal of algebra 83, 1983, С. 101−112.

Bibliograficheskij spisok

1. Zavodchikov, M. A. Moduli stabil'nyh puchkov ranga dva s klassami Cherna $c_1 = -1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 0$ na proektivnom prostrantstve [Tekst] : Dis. … kand. fiz.-mat. nauk: 01.01.06 / Mihail Aleksandrovich Zavodchikov. − Jaroslavl', 2012. – 86 s.
2. Hartshorne, R. Stable reflexive sheaves. Math. Ann. 254, 1980, S. 121−176.
3. Lange, H. Universal families of extentions. Journal of algebra 83, 1983, S. 101−112.