УДК 514; 373.5; 37.026

В. А. Гусев, И. С. Малинина

О нестандартной математической деятельности при изучении геометрии в школе

С нестандартными ситуациями, нестандартной деятельностью современный человек сталкивается практически ежедневно. В данной статье нестандартная деятельность проиллюстрирована нами на примерах доказательств из темы «Подобие и гомотетия».

Ключевые слова: нестандартная деятельность, лемма о подобных треугольниках.

V. A. Gusev, I. S. Malinina

About non-standard mathematical activity at studying geometry in school

The modern person is faced with non-standard situations, non-standard activity every day. In this article the non-standard activity is illustrated on the examples of proofs from the subject «Similarity and Homothety».

Keywords: non-standard activity, lemma about similar triangles.

При изучении математики чрезвычайно часто используются такие понятия как нестандартная задача, нестандартная ситуация, нестандартный подход, нестандартное решение, нестандартная математическая деятельность. Этими проблемами занимались такие известные математики и педагоги, как Ю. А. Колягин, Б. А. Кордемский, И. Ф. Шарыгин, Г. А. Балл, Л. М. Лоповок, А. А. Столяр, В. И. Рыжик и др.

В данной статье мы хотим обратить внимание на нестандартную математическую деятельность, которая очень часто сопровождает обучение геометрии в школе.

По этому поводу А. А. Столяр писал: «… если хотим обучать не только готовой математике, но и математической деятельности, мы должны учить не только «доказывать», но и «догадываться», а процесс обучения математике должен в какой-то мере имитировать процесс математического творчества». [2]

Проблема с обучением учащихся нестандартной математической деятельности при изучении геометрии состоит в том, что нестандартная деятельность начинается в школе не с решения каких-то нестандартных задач, а практически с доказательства любой теоремы курса геометрии. Так как подавляющая часть теории геометрии – это нестандартные задачи и нестандартная деятельность.

Мы исследуем эту проблему по отношению к изучению важной темы «Подобие и гомотетия». И нам понадобилось разобраться с довольно простой по внешнему виду леммой о подобных треугольниках, без которой невозможно представить себе изучение этой темы.

Лемма. Прямая, пересекающая две стороны треугольника и проведенная параллельно третьей стороне, отсекает треугольник, подобный данному.

Выяснилось, что доказательство этой леммы, с одной стороны, пример нестандартной математической деятельности, а с другой – это очень непростой для учащихся материал. Подтвердим это примерами.

Рассмотрим доказательство леммы в учебнике А. П. Киселева [3, 4].

В начале доказательства ясно формулируется что дано и что требуется доказать: равенство соответствующих углов ΔABC и ΔDBE, и пропорциональность соответствующих сторон: $\frac{BD}{BA}=\frac{BE}{BC}=\frac{DE}{AC}$. Но вот метод доказательства этой пропорциональности совершенно нестандартен для учащихся.

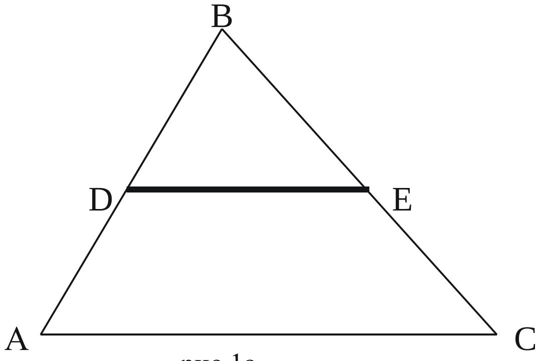

рис.1а

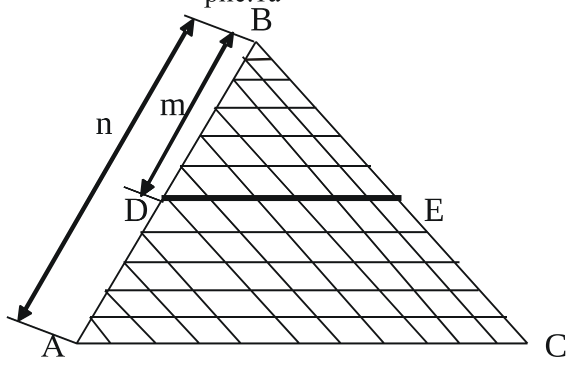

Рис. 1б

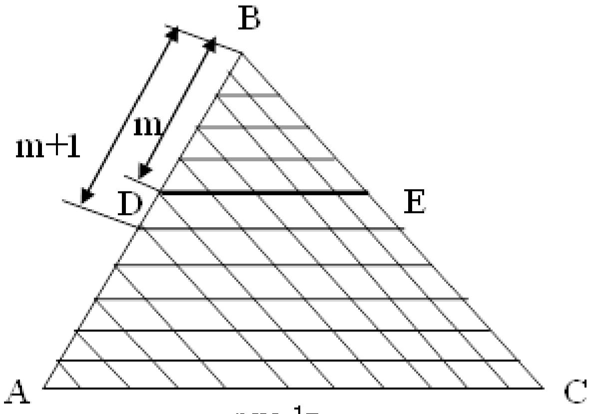

рис.1в

Доказательство:

1. Пусть в треугольнике ABC прямая DE параллельна стороне AC.

2. Требуется доказать, что треугольник DBE подобен треугольнику ABC.

Нам нужно доказать, во-первых, равенство углов в этих треугольниках и, во-вторых, пропорциональность сходственных сторон треугольников ABC и DBE.

3. Углы треугольников соответственно равны, так как угол B у них общий, а $\angle D = \angle A \; и \; \angle E = \angle C$, как соответственные углы при параллельных DE и AC и секущих AB и CB.

4. Докажем теперь, что стороны ΔDBE пропорциональны сходственным сторонам ΔABC, т. е. что $\dfrac{BD}{BA} = \dfrac{BE}{BC} = \dfrac{DE}{AC}$.

Для этого рассмотрим отдельно следующие два случая.

I. Стороны AB и DB имеют общую меру[1].

1) Разделим отрезок AB на части, равные этой общей мере (рис.1б).

2) Тогда BD разделится на целое число таких частей.

3) Пусть этих частей содержится m в отрезке BD и n в отрезке AB.

4) Проведем из точек деления ряд прямых, параллельных AC, и другой ряд прямых, параллельных BC.

5) Тогда отрезки BE и BC разделятся на равные части, которых будет m в отрезке BE и n в отрезке BA.

6) Точно так же отрезок DE разделится на m равных частей, а отрезок AC на n равных частей, причем части DE равны частям AC (как противоположные стороны параллелограммов).

7) Теперь очевидно, что $\frac{BD}{BA}=\frac{m}{n}$; $\frac{BE}{BC}=\frac{m}{n}$; $\frac{DE}{AC}=\frac{m}{n}$.

8) Следовательно, $\frac{BD}{BA}=\frac{BE}{BC}=\frac{DE}{AC}$.

Рассмотрим второй случай[2].

II. Стороны AB и DB не имеют общей меры.

1) Найдем приближенные значения каждого из отношений $\frac{BD}{BA}$ *и* $\frac{BE}{BC}$, сначала с точностью до $\frac{1}{10}$, затем до $\frac{1}{100}$, и далее будем последовательно повышать степень точности в 10 раз.

2) Для этого разделим сторону AB сначала на 10 равных частей и через точки деления проведем прямые, параллельные AC.

3) Тогда сторона BC разделится также на 10 равных частей.

4) Предположим, что $\frac{1}{10}$ доля AB укладывается в BD *m* раз, причем остается остаток, меньший $\frac{1}{10}$ AB (рис.1в).

5) Тогда, как видно из рис.1в, $\frac{1}{10}$ доля отрезка BC укладывается в BE также m раз и остается остаток, меньший $\frac{1}{10}$ BC.

6) Следовательно, с точностью до $\frac{1}{10}$ имеем: $\frac{BD}{AB}=\frac{m}{10}$; $\frac{BE}{BC}=\frac{m}{10}$.

7) Далее, разделим отрезок AB на 100 равных частей и предположим, что $\frac{1}{100}$ AB укладывается m_1 раз в отрезок BD.

8) Проводя опять через точки деления прямые, параллельные AC, убеждаемся, что $\frac{1}{100}$ BC укладывается в BE также m_1 раз.

9) Поэтому с точностью до $\frac{1}{100}$ имеем: $\frac{BD}{BA}=\frac{m_1}{100}$; $\frac{BE}{BC}=\frac{m_1}{100}$.

10) Повышая далее степень точности в 10, 100, … раз, убеждаемся, что приближенные значения соотношений $\frac{BD}{BA}$ *и* $\frac{BE}{BC}$, вычисленные с произвольной, но одинаковой десятичной точностью, равны.

11) Следовательно, значения этих отношений выражаются одной и той же бесконечной десятичной дробью; значит, $\frac{BD}{BA}=\frac{BE}{BC}$.

12) Точно также, проводя через точки деления стороны AB прямые, параллельные стороне BC, найдем, что $\frac{BD}{BA}=\frac{DE}{AC}$.

13) Таким образом, и в этом случае имеем: $\frac{BD}{BA}=\frac{BE}{BC}=\frac{DE}{AC}$. ■

Может быть, это доказательство и усваивается учащимися, но очевидно, что оно, во-первых, написано не на современном языке, и, во-вторых, достаточно трудное.

Рассмотрим доказательство этой леммы в учебнике И. Ф. Шарыгина [4]. Сразу посмотрим, как доказывается пропорциональность соответствующих сторон.

1. Пропорциональность сторон AB и AB_1, AC и AC_1 утверждается в теореме (Пусть стороны угла пересекаются двумя параллельными прямыми. Тогда отрезки, образовавшиеся на одной стороне угла, пропорциональны соответствующим отрезкам на другой его стороне).

2. Из этой теоремы следует равенство $\frac{BB_1}{AB}=\frac{CC_1}{AC}$.

3. Но если к обеим частям последнего равенства прибавить 1, то получим

$\frac{AB+BB_1}{AB}=\frac{AC+CC_1}{AC}$, $\frac{AB_1}{AB}=\frac{AC_1}{AC}$, что означает пропорциональность пар AB, AB_1 и AC, AC_1.

4. Для завершения доказательства осталось установить, что и оставшаяся пара сторон BC и B_1C_1 пропорциональна двум рассмотренным.

5. Для этого проведем через вершину B прямую, параллельную AC, и обозначим через K точку ее пересечения с B_1C_1.

6. Поскольку $CBKC_1$ – параллелограмм, KC_1=BC.

7. Теперь по теореме (о параллельности отрезков) получаем, что $\frac{B_1C_1}{KC_1}=\frac{AB_1}{AB}$ или $\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{AB_1}{AB}$. ■

Это доказательство более привычно, чем доказательство А.П. Киселева, но оно ссылается на теорию пропорциональности отрезков, которая в настоящее время в школе рассматривается очень мало. И поэтому это тоже пример нестандартной деятельности, но уже связанной с некой серьезной математической теорией.

Недавно мы опубликовали учебник «Геометрия. 7−9 классы» [1], где было представлено наше видение доказательства этой леммы.

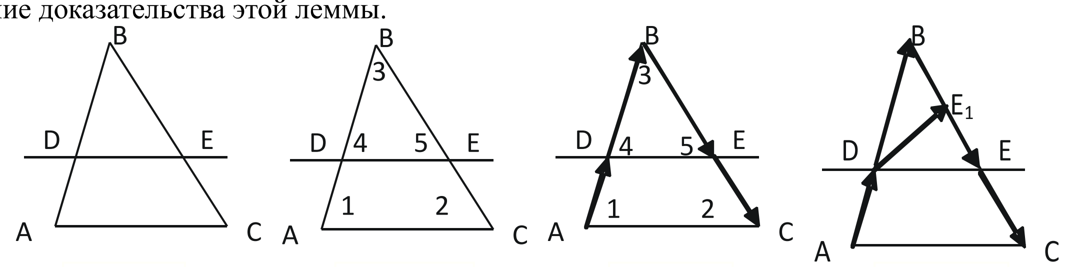

Рис. 2а **Рис. 2б** **Рис. 2в** **Рис. 2г**

Доказательство равенства соответствующих углов проводится, так же как и в других доказательствах. Для доказательства пропорциональности сходственных сторон используем векторный аппарат, так как тема «Векторы» изучается перед темой «Подобие треугольников».

1. Введем векторные обозначения (рис. 2в).

2. Векторы $\overline{DB}$ и $\overline{AB}$ коллинеарны (1, определение коллинеарных векторов).

3. Существует такое положительное число *x*, что $\overline{DB}=x\overline{AB}$ и $\frac{DB}{AB}=x$ (9, свойство коллинеарных векторов).

4. Векторы $\overline{BE}$ и $\overline{BC}$ коллинеарны, значит, существует такое положительное число *y*, что $\overline{BE}=y\overline{BC}$ и $\frac{BE}{BC}=y$ (дано, свойство коллинеарных векторов).

Из наглядных соображений можно предположить, что *x*=*y*.

5. *x*=*y* (требуется доказать).

Воспользуемся методом доказательства от противного.

6. Предположим, что $x\neq y$ (предположение).

7. Умножив вектор $\overline{BC}$ на *x*, получим $\overline{BE_1}=x\cdot\overline{BC}$ (рис. 2г) (дано,5).

8. $\overline{DE_1} = \overline{DB} + \overline{BE_1} = x \cdot \overline{AB} + x \cdot \overline{BC} = x \cdot \ \overline{AB} + \overline{BC} \ = x \cdot \overline{AC}$, т.е. $\overline{DE_1} = x \cdot \overline{AC}$ (дано, 7).

9. $DE_1 \| AC$ (8, свойство коллинеарных векторов).

Посмотрим на рис.2г.

10. $DE \| AC$ и $DE_1 \| AC$ (дано,9).

Пункт 10 противоречит аксиоме параллельности прямых, значит, предположение 6 неверно, а тогда
6. x=y.

11. DE_1 совпадает с DE и $DE = x \cdot AC$ (11, 17).

12. $DB = x \cdot AB, BE = x \cdot BC, DE = x \cdot AC$, значит, $\dfrac{DB}{AB} = \dfrac{BE}{BC} = \dfrac{DE}{AC} = x$ (10, 11, 18).

13. (3). $\Delta DBE \sim \Delta ABC$ (доказательство равенства соответствующих углов, 12, определение подобных треугольников). ■

Это доказательство дает современное представление о доказательствах в геометрии. Его нельзя назвать простым для учащихся. В тоже время оно является более удачным примером нестандартной математической деятельности.

В данной статье мы показали яркие примеры нестандартной математической деятельности. Нельзя сказать, что мы построили методику овладения этой деятельностью, но все сказанное приближает нас к построению этой методики.

Библиографический список

1. Гусев, В. А. и др. Геометрия. 7−9 кл. [Текст]: учеб. для общеобразоват. Учреждений / В. А. Гусев, С. А. Козлова, А. Г. Рубин. – М. : Баласс, 2013. – 320 с.
2. Каплан, Б.С. и др. Методы обучения математике: некоторые вопросы теории и практики [Текст] / Б. С. Каплан, Н. К. Рузин, А. А. Столяр; Под ред. А. А. Столяра. – Мн. : Нар. асвета, 1981. – 191 с.
3. Киселев, А.П. Элементарная геометрия для средних учебных заведений [Текст] / А. П. Киселев. − Изд. 23-е. – М. : Типография П. П. Рябушинского, 1914. – 393 с.
4. Киселев, А. П. Геометрия [Текст] / Под ред. Н. А. Глаголева. – М. : Физматлит, 2004. – 328с.
5. Шарыгин, И. Ф. Геометрия. 7−9 кл. [Текст] / И. Ф. Шарыгин. – М. : Дрофа, 1997. – 352с.

Bibliograficheskij spisok

1. Gusev, V. A. i dr. Geometrija. 7−9 kl. [Tekst]: ucheb. dlja obshheobrazovat. Uchrezhdenij / V. A. Gusev, S. A. Kozlova, A. G. Rubin. – M. : Balass, 2013. – 320 s.
2. Kaplan, B.S. i dr. Metody obuchenija matematike: nekotorye voprosy teorii i praktiki [Tekst] / B. S. Kaplan, N. K. Ruzin, A. A. Stoljar; Pod red. A. A. Stoljara. – Mn. : Nar. asveta, 1981. – 191 s.
3. Kiselev, A.P. Jelementarnaja geometrija dlja srednih uchebnyh zavedenij [Tekst] / A. P. Kiselev. − Izd. 23-e. – M. : Tipografija P. P. Rjabushinskogo, 1914. – 393 s.
4. Kiselev, A. P. Geometrija [Tekst] / Pod red. N. A. Glagoleva. – M. : Fizmatlit, 2004. – 328s.
5. Sharygin, I. F. Geometrija. 7−9 kl. [Tekst] / I. F. Sharygin. – M. : Drofa, 1997. – 352s.

---

[1] Это выражение, которое использовали в учебниках прошлого века.
[2] Введем новую нумерацию для известного доказательства.