УДК 512.7

С. А. Тихомиров, А. А. Кытманов, Н. Н. Осипов, Т. Л. Трошина, А. П. Ляпин

О многообразии модулей $M_{P^3}(2;0,15)$ стабильных 2-расслоений с классами Черна $c_1=0$ и $c_2=15$ на комплексном проективном пространстве

В данной статье мы альтернативным (аналитическим) методом находим точное число компонент Эйна в многообразии модулей $M_{P^3}(2;0,15)$, вычисляем их размерности и устанавливаем соответствия этих компонент спектрам стабильных расслоений.

Ключевые слова: векторное расслоение, стабильное расслоение, классы Черна, многообразие модулей.

S. A. Tikhomirov, A. A. Kytmanov, N. N. Osipov, T. L. Troshina, A. P. Lyapin

On variety of moduli $M_{P^3}(2;0,15)$ of stable 2-bundles with Chern classes $c_1=0$ and $c_2=15$ on complex projective space

In this article we find the exact number of Ein's components in varieties of moduli $M_{P^3}(2;0,15)$ by the alternative (analytical) method, calculate their dimensions and establish correspondences of this components to spectra of stable bundles.

Keywords: vector bundle, stable bundle, Chern classes, variety of moduli.

Программа исследований стабильных 2-расслоений с нулевым первым классом Черна на P^3 стартовала в конце 70-х гг. прошлого столетия, благодаря усилиям классика алгебраической геометрии Р. Хартсхорна, его коллег, учеников и последователей [1, 14−18, 20−22]. В течение нескольких предыдущих лет удалось достаточно далеко продвинуться в решении ряда сложных задач, связанных с изучением пространств модулей таких расслоений (и их разновидностей), разработкой новых методов исследования, получением новых существенных результатов качественного и количественного характера [2−13, 19]). Однако, бóльшая часть стоящих проблем, по-прежнему остается либо разработанной, но частично, либо полностью неразработанной. Среди первой категории таких проблем – вопросы, касающиеся «географии» и геометрии компонент упомянутых пространств модулей, в том числе – так называемых компонент Эйна. [8]. Благодаря новому программно-вычислительному методу, разработанному в [2], стало известно точное число компонент Эйна в пространствах модулей $M_{P^3}(2;0,n)$ стабильных 2-расслоений с $c_1=0$ и $c_2=n$ для n от 1 до 100 000 включительно.

В настоящей работе мы рассматриваем случай, где $c_2=15$, на предмет компонент Эйна. Он уникален тем, что впервые в соответствующем пространстве модулей располагается сразу 3 компоненты Эйна. В настоящей статье мы приводим альтернативное (аналитическое) доказательство данного факта, а также находим размерности всех трех компонент и их соответствие конкретным спектрам расслоений.

В исследовании проблем, связанных с компонентами Эйна (а также другими видами и классами компонент) важную роль играет понятие спектра расслоения. Напомним определение и свойства спектра для стабильного 2-расслоения E_2 с $c_1=0$.

Определение. Пусть l – общая прямая в P^3, $\sigma := bl_l : \tilde{P}^3 \to \mathrm{P}^3$ − раздутие вдоль l и $\pi : \tilde{P}^3 \to \mathrm{P}^1$ – морфизм, определенный пучком плоскостей, проходящих через l. Тогда расслоение $V := R^1\pi_*\sigma^* E_2(-1)$ – расслоение ранга n на P^1. По известной теореме Гротендика данное расслоение единственным образом расщепляется в прямую сумму линейных: $\mathrm{V} = \bigoplus_{i=1}^n \mathrm{O}_{\mathrm{P}^1}(a_i)$, где $a_1 \le a_2 \le ... \le a_n$. Тогда *спектр* $Spec(E_2) := \{a_1, ..., a_n\}$.

В случае произвольной характеристики понятие спектра было введено Р. Хартсхорном [21]. В реальности спектр такого расслоения представляет собой неубывающую последовательность n целых

© Тихомиров С. А., Кытманов А. А., Осипов Н. Н., Трошина Т. Л., Ляпин А. П., 2013

чисел, обладающую рядом важных свойств [21, 22]. А именно, пусть $Spec(E_2)=\{a_1, a_2,\ldots,a_n\}$, $a_i \in Z$ – спектр E_2. Тогда $Spec(E_2)$ удовлетворяет свойствам:

(1) симметричность $\{-a_i\}=\{a_i\}$;

(2) связность: для любых двух чисел в $Spec(E_2)$ каждое число, лежащее между ними, также лежит в $Spec(E_2)$;

(3) если число l_0, такое, что $1 \le l_0 \le \max\{a_i\}$ появляется только один раз в $Spec(E_2)$, то каждое число l, такое, что $l_0 \le l \le \max\{a_i\}$ появляется только один раз в $Spec(E_2)$.

Основной результат настоящей работы – следующая теорема.

Теорема. *В пространстве $M_{P^3}(2;0,15)$ имеются 3 компоненты Эйна: 1) компонента размерности 123, содержащая плотное открытое подмножество классов расслоений, имеющих спектр (*-3,-2,-2,-1,-1,-1,0,0,0,1,1,1,2,2,3*) и задаваемых монадой типа* $0 \to O_{P^3}(-4) \to O_{P^3}(-1) \oplus 2O_{P^3} \oplus O_{P^3}(1) \to O_{P^3}(4) \to 0$, *2) компонента размерности 225, содержащая классы расслоений, имеющих спектр (*-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7*) и задаваемых монадой типа* $0 \to O_{P^3}(-8) \to O_{P^3}(-7) \oplus 2O_{P^3} \oplus O_{P^3}(7) \to O_{P^3}(8) \to 0$ *и 3) компонента размерности 152, содержащая плотное открытое подмножество классов расслоений, имеющих спектр (*-4,-3,-3,-2,-2,-1,-1,0,1,1,2,2,3,3,4*) и задаваемых монадой типа* $0 \to O_{P^3}(-5) \to O_{P^3}(-3) \oplus O_{P^3}(-1) \oplus O_{P^3}(1) \oplus O_{P^3}(3) \to O_{P^3}(5) \to 0$.

Доказательство.

В случае c_2=15 имеется 54 реализуемых спектра (то есть, спектра, удовлетворяющих свойствам (1)–(3)). Перечислим эти спектры:

1) (0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0);
2) (-1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1);
3) (-1,-1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1);
4) (-2,-1,0,0,0,0,0,0.0,0,0,0,0,1,2);
5) (-1,-1,-1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1);
6) (-2,-1,-1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,2);
7) (-3,-2,-1,0,0,0,0,0,0.0,0,0,0,1,2,3);
8) (-1,-1,-1,-1,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,1);
9) (-2,-1,-1,-1,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,2);
10) (-2,-2,-1,-1,0,0,0,0,0,0,0,1,1,2,2);
11) (-3,-2,-1,-1,0,0,0,0,0,0,0,1,1,2,3);
12) (-4,-3,-2,-1,0,0,0,0,0,0,0,1,2,3,4);
13) (-1,-1,-1,-1,-1,0,0,0,0,0,1,1,1,1,1);
14) (-2,-1,-1,-1,-1,0,0,0,0,0,1,1,1,1,2);
15) (-2,-2,-1,-1,-1,0,0,0,0,0,1,1,1,2,2);
16) (-3,-2,-1,-1,-1,0,0,0,0,0,1,1,1,2,3);
17) (-2,-2,-2,-1,-1,0,0,0,0,0,1,1,2,2,2);
18) (-3,-2,-2,-1,-1,0,0,0,0,0,1,1,2,2,3);
19) (-4,-3,-2,-1,-1,0,0,0,0,0,1,1,2,3,4);
20) (-5,-4,-3,-2,-1,0,0,0,0,0,1,2,3,4,5);
21) (-1,-1,-1,-1,-1,-1,0,0,0,1,1,1,1,1,1);
22) (-2,-1,-1,-1,-1,-1,0,0,0,1,1,1,1,1,2);
23) (-2,-2,-1,-1,-1,-1,0,0,0,1,1,1,1,2,2);
24) (-3,-2,-1,-1,-1,-1,0,0,0,1,1,1,1,2,3);
25) (-2,-2,-2,-1,-1,-1,0,0,0,1,1,1,2,2,2);
26) (-3,-2,-2,-1,-1,-1,0,0,0,1,1,1,2,2,3);
27) (-4,-3,-2,-1,-1,-1,0,0,0,1,1,1,2,3,4);
28) (-2,-2,-2,-2,-1,-1,0,0,0,1,1,2,2,2,2);
29) (-3,-2,-2,-2,-1,-1,0,0,0,1,1,2,2,2,3);
30) (-3,-3,-2,-2,-1,-1,0,0,0,1,1,2,2,3,3);
31) (-4,-3,-2,-2,-1,-1,0,0,0,1,1,2,2,3,4);

32) (-5,-4,-3,-2,-1,-1,0,0,0,1,1,2,3,4,5);
33) (-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,0,0,1,2,3,4,5,6);
34) (-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,0,1,1,1,1,1,1,1);
35) (-2,-1,-1,-1,-1,-1,-1,0,1,1,1,1,1,1,2);
36) (-2,-2,-1,-1,-1,-1,-1,0,1,1,1,1,1,2,2);
37) (-3,-2,-1,-1,-1,-1,-1,0,1,1,1,1,1,2,3);
38) (-2,-2,-2,-1,-1,-1,-1,0,1,1,1,1,2,2,2);
39) (-3,-2,-2,-1,-1,-1,-1,0,1,1,1,1,2,2,3);
40) (-4,-3,-2,-1,-1,-1,-1,0,1,1,1,1,2,3,4);
41) (-2,-2,-2,-2,-1,-1,-1,0,1,1,1,2,2,2,2);
42) (-3,-2,-2,-2,-1,-1,-1,0,1,1,1,2,2,2,3);
43) (-3,-3,-2,-2,-1,-1,-1,0,1,1,1,2,2,3,3);
44) (-4,-3,-2,-2,-1,-1,-1,0,1,1,1,2,2,3,4);
45) (-5,-4,-3,-2,-1,-1,-1,0,1,1,1,2,3,4,5);
46) (-2-2,-2,-2,-2,-1,-1,0,1,1,2,2,2,2,2);
47) (-3,-2,-2,-2,-2,-1,-1,0,1,1,2,2,2,2,3);
48) (-3-3,-2,-2,-2,-1,-1,0,1,1,2,2,2,3,3);
49) (-4-3,-2,-2,-2,-1,-1,0,1,1,2,2,2,3,4);
50) (-3,-3,-3,-2,-2,-1,-1,0,1,1,2,2,3,3,3);
51) (-4,-3,-3,-2,-2,-1,-1,0,1,1,2,2,3,3,4);
52) (-5,-4,-3,-2,-2,-1,-1,0,1,1,2,2,3,4,5);
53) (-6,-5,-4,-3,-2,-1,-1,0,1,1,2,3,4,5,6);
54) (-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7).

Далее, рассмотрим монаду

$$0 \to O_{P^3}(-c) \to O_{P^3}(-b) \oplus O_{P^3}(-a) \oplus O_{P^{\#}}(a) \oplus O_{P^{\#}}(b) \to O_{P^3}(c) \to 0 \qquad (1)$$

с когомологическим пучком E_2, где $c > b \geq a \geq 0$, $c > a+b$ [8, формулы (1)−(3)]. Положим r=b-a, q=c-2a-r-1. Здесь r, $q \geq 0$ в силу предыдущих неравенств. Тогда $c_2(E_2)=(2a+r+1+q)^2-(a+r)^2-a^2=(2a+r)^2+(1+q)^2+2(2a+r)(1+q)-2a^2-2ar-r^2=4a^2+4ar+r^2+1+2q+q^2+4a+4aq+2r+2rq-2a^2-2ar-r^2=2a^2+2ar+4a+4aq+2r+2rq+1+2q+q^2$.

Поскольку a, r и q – неотрицательные целые числа, а $c_2(E_2)$ представляет собой сумму единицы и произведений этих трех переменных в неотрицательных степенях, то $c_2(E_2)$ является возрастающей функцией от трех переменных a, r и q, принимающей натуральные значения. (Фиксируя любые две из трех переменных a, r и q, легко проверяем, что $c_2(E_2)$ − возрастающая функция от оставшегося переменного). Анализируя $c_2(E_2)$ как функцию от a, r и q, мы элементарными вычислениями получаем, что равенство $c_2(E_2)=15$ возможно в трех случаях:

1) a=0, r=1, q=2 (тем самым, b=1, c=4);
2) a=0, r=7, q=0 (тем самым, b=7, c=8);
3) a=1, r=2, q=0 (тем самым, b=3, c=5).

Разберем теперь подробно каждый из этих трех случаев.

1) Согласно теореме [6] имеем:

$$h^0E_2(-1) = h^0V = h^0O_{P^3}(3) - h^0O_{P^3} - h^0O_{P^3}(-1) = 20 - 1 - 0 = 19\,,$$

$$h^0E_2(-2) = h^0V(-1) = h^0O_{P^3}(2) - h^0O_{P^3}(-1) - h^0O_{P^3}(-2) = 10 - 0 - 0 = 10.$$

Теперь рассмотрим спектр под номером 26) из вышеуказанного списка. Элементарным вычислением получаем, что последние два равенства верны для спектра Spec E_2= (-3,-2,-2,-1,-1,-1,0,0,0,1,1,1,2,2,3), входящего под номером 26) в наш список. Тем самым, в силу единственности спектра Spec E_2 расслоения E_2 получаем, что наша компонента Эйна соответствует именно спектру с порядковым номером 26).

В данном случае монада (1) имеет вид: $0 \to O_{P^3}(-4) \to O_{P^3}(-1) \oplus 2O_{P^3} \oplus O_{P^3}(1) \to O_{P^3}(4) \to 0$.

Применяя формулу (4) [8] к этой монаде, находим размерность d этой компоненты Эйна:

$d=d_1$-d_2-d_3-d_4, где d_1 = dim Hom $(O_{P^3}(-1)\oplus 2O_{P^3}\oplus O_{P^3}(1),\ O_{P^3}(4))$ = $h^0O_{P^3}(5)+h^0 2O_{P^3}(4)+h^0O_{P^3}(3)$ = 56+70+ 20=146;

d_2=dim Hom $(O_{P^3}(4), O_{P^3}(4)) = h^0O_{P^3}$ =1;

d_3= $h^0(\Lambda^2(O_{P^3}(4)))$=0;

d_4= $h^0(S^2(O_{P^3}(-1)\oplus 2O_{P^3}\oplus O_{P^3}(1))) = h^0(S^2(O_{P^3}(-1)\oplus 2O_{P^3})) + h^0O_{P^3}(2)+h^0O_{P^3} + h^0 2O_{P^3}(1)$ =

$h^0O_{P^3}(-2)+h^0 3O_{P^3}+h^0 2O_{P^3}(-1)$ +10+1+8=0+3+0+19=22.

Таким образом, d=146-1-0-22=123.

2) Согласно теореме [6] имеем:

$$h^0E_2(-1)=h^0V=h^0O_{P^3}(7)-h^0O_{P^3}(6)-h^0O_{P^3}(-1)=120-84-0=36,$$

$$h^0E_2(-2)=h^0V(-1)=h^0O_{P^3}(6)-h^0O_{P^3}(5)-h^0O_{P^3}(-2)=84-56-0=28.$$

Теперь рассмотрим спектр под номером 54) из вышеуказанного списка. Элементарным вычислением получаем, что последние два равенства верны для спектра Spec E_2 = (-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7), входящего под номером 54) в наш список. Тем самым, в силу единственности спектра Spec E_2 расслоения E_2 получаем, что наша компонента Эйна соответствует в точности спектру с порядковым номером 54) и, ввиду утверждения (a) теоремы 3.3 [17], содержит именно классы расслоений, имеющих такой спектр.

В данном случае монада (1) имеет вид:

$$0\to O_{P^3}(-8)\to O_{P^3}(-7)\oplus 2O_{P^3}\oplus O_{P^3}(7)\to O_{P^3}(8)\to 0.$$

Применяя формулу (4) [8] к этой монаде, находим размерность d этой компоненты Эйна:

$d=d_1$-d_2-d_3-d_4, где d_1=dim Hom $(O_{P^3}(-7)\oplus 2O_{P^3}\oplus O_{P^3}(7), O_{P^3}(8))$ = $h^0O_{P^3}(15)+h^0 2O_{P^3}(8)+h^0O_{P^3}(1)$ = 816+330 + 4=1150;

d_2=dim Hom $(O_{P^3}(8), O_{P^3}(8))$= $h^0O_{P^3}$ =1;

d_3= $h^0(\Lambda^2(O_{P^3}(8)))$=0;

d_4= $h^0(S^2(O_{P^3}(-7)\oplus 2O_{P^3}\oplus O_{P^3}(7))) = h^0(S^2(O_{P^3}(-7)\oplus 2O_{P^3})) + h^0O_{P^3}(14)+h^0O_{P^3} + h^0 2O_{P^3}(7)$ =

$h^0O_{P^3}(-14)+h^0 3O_{P^3}+h^0 2O_{P^3}(-7)$ +680+1+240=0+3+0+921=924.

Таким образом, d=1150-1-0-924=225.

3) Согласно теореме [6] имеем:

$$h^0E_2(-1)=h^0V=h^0O_{P^3}(4)-h^0O_{P^3}(2)-h^0O_{P^3}=35-10-1=24,$$

$$h^0E_2(-2)=h^0V(-1)=h^0O_{P^3}(3)-h^0O_{P^3}(1)-h^0O_{P^3}(-1)=20-4-0=16.$$

Теперь рассмотрим спектр под номером 51) из вышеуказанного списка. Элементарным вычислением получаем, что последние два равенства верны для спектра Spec E_2= (-4,-3,-3,-2,-2,-1,-1,0,1,1,2,2,3,3,4), входящего под номером 51) в наш список. Тем самым, в силу единственности спектра Spec E_2 расслоения E_2 получаем, что наша компонента Эйна соответствует именно спектру с порядковым номером 51).

В данном случае монада (1) имеет вид:

$$0\to O_{P^3}(-5)\to O_{P^3}(-3)\oplus O_{P^3}(-1)\oplus O_{P^3}(1)\oplus O_{P^3}(3)\to O_{P^3}(5)\to 0.$$

Применяя формулу (4) [8] к этой монаде, находим размерность d этой компоненты Эйна: $d=d_1$-d_2-d_3-d_4, где d_1=dim Hom $(O_{P^3}(-3)\oplus O_{P^3}(-1)\oplus O_{P^3}(1)\oplus O_{P^3}(3), O_{P^3}(5)) = h^0O_{P^3}(8)+h^0O_{P^3}(6)+h^0O_{P^3}(4)+h^0O_{P^3}(2)$ = 165+84+35+10=294;

d_2=dim Hom $(O_{P^3}(5), O_{P^3}(5)) = h^0O_{P^3}$ =1;

d_3= $h^0(\Lambda^2(O_{P^3}(5)))$=0;

d_4= $h^0(S^2(O_{P^3}(-3)\oplus O_{P^3}(-1)\oplus O_{P^3}(1)\oplus O_{P^3}(3)))$= $h^0O_{P^3}(-6)$ $+h^0(S^2(O_{P^3}(-1)\oplus O_{P^3}(1)\oplus O_{P^\#}(3)))$ +

$h^0O_{P^3}(-4)+h^0O_{P^3}(-2)$ $+h^0O_{P^3}$ =0+ $h^0O_{P^3}(-2)+h^0(S^2(O_{P^3}(1)\oplus h^0O_{P^3}(3)))$ $+h^0O_{P^3}(2)+h^0O_{P^3}$ +0+0+1=0+0

$+h^0O_{P^3}(2)+h^0O_{P^3}(6)+h^0O_{P^3}(4)$ +10+1+1=0+10+84+35+12=141.

Таким образом, d=294-1-0-141=152.

Библиографический список

1. Ведерников, В. К. Модули стабильных векторных расслоений ранга 2 на P^3 с фиксированным спектром [Текст] / В. К. Ведерников // Известия АН СССР. Серия математическая. – 1984. – № 48:5. – С. 986–998.
2. Кытманов, А. А. Пространства модулей стабильных 2-расслоений с c_1=0 на P^3: программа для нахождения новых компонент Эйна, экспериментальные данные, факты, гипотезы [Текст] / А. А. Кытманов, Н. Н. Осипов, С. А. Тихомиров, Т. Л. Трошина // Сибирский математический журнал. – 18 с. (в печати).
3. Тихомиров, А. С. Модули математических инстантонных векторных расслоений с нечетным c_2 на проективном пространстве [Текст] / А. С. Тихомиров // Известия РАН. Серия математическая. –2012. – № 76:5. – С. 143–224.
4. Тихомиров, А. С. Модули математических инстантонных векторных расслоений с четным c_2 на проективном пространстве [Текст] / А. С. Тихомиров // Известия РАН. Серия математическая. 2013. – № 77:5. – С. 139–168.
5. Тихомиров, С. А. Компоненты пространств модулей стабильных расслоений ранга 2 на P^3 с общим спектром (-1,0,…,0,1) [Текст] / С. А. Тихомиров // Сб. трудов международной летней школы по алгебраической геометрии и комплексному анализу, МИАН-ЯГПУ. – Москва–Ярославль : Изд-во МИАН, 2013. – С. 68–69.
6. Тихомиров, С. А. Инварианты стабильных 2-расслоений на комплексном проективном пространстве и адаптация вычислительной технологии Барта [Текст] / С. А. Тихомиров, А. П. Ляпин, О. А. Войлокова // Ярославский педагогический вестник. Т. III (Естественные науки). – Ярославль : Изд-во ЯГПУ, 2013. – № 2. – С. 33–38.
7. Тихомиров, С. А. Комбинированный вычислительный метод в сравнительном анализе компонент Хартсхорна и Ведерникова стабильных 2-расслоений на комплексном проективном пространстве [Текст] / С. А. Тихомиров, А. П. Ляпин, В. М. Ростов // Ярославский педагогический вестник. Т. III (Естественные науки). – Ярославль : Изд-во ЯГПУ, 2013. – № 1. – С. 12–19.
8. Тихомиров, С. А. О многообразиях модулей $M_{P^3}(2;0,10)$ и $M_{P^3}(2;0,11)$ стабильных 2-расслоений с классами Черна $c_1=0$, $c_2=10$ и 11 на комплексном проективном пространстве [Текст] / С. А. Тихомиров, А. П. Ляпин, Е. А. Рузанов // Ярославский педагогический вестник. Т. III (Естественные науки). – Ярославль : Изд-во ЯГПУ, 2012. – № 4. – С. 13–18.
9. Тихомиров, С. А. Стабильные расслоения ранга 2 с классами Черна c_1=0, c_2=2 на P^3 и гиперквадрики Понселе [Текст] / С. А. Тихомиров // Журнал СФУ, серия «Математика и физика». – 2011. – № 4(4). – С. 551–555.
10. Тихомиров, С. А. Спектры стабильных расслоений ранга 2 на P^3 с классами Черна $c_1=0$ и $1\le c_2\le 19$ [Текст] / С. А. Тихомиров, А. А. Смирнова // Ярославский педагогический вестник. Серия «Физико-математические науки и естественные науки». – 2010. – № 3. – С. 5–7.
11. Тихомиров, С. А. Метод двойных расширений в исследовании стабильных расслоений на P^3 [Текст] / С. А. Тихомиров // Труды Шестых Колмогоровских чтений. – Ярославль : Изд-во ЯГПУ, 2008. – С. 174–183.
12. Тихомиров, С. А. Замыкания Понселе и многообразие M(0,2) модулей стабильных векторных расслоений ранга 2 на пространстве P^3 [Текст] / С. А. Тихомиров // Ярославский педагогический вестник. – Ярославль : Изд-во ЯГПУ, 2007. – № 1. – С. 35–39.
13. Тихомиров, С. А. Замыкания Понселе и многообразие M(0,2) модулей стабильных векторных расслоений ранга 2 на пространстве P^3 [Текст] / С. А. Тихомиров // Ярославский педагогический вестник. – Ярославль : Изд-во ЯГПУ, 2007. – № 2. – С. 25–31.
14. Barth, W. Irreducibility of the space of mathematical instanton bundles with rank 2 and c_2=4 / W. Barth // Math. Ann., 258:1 (1981), 81–106.
15. Barth, W. Some experimental data / W. Barth // In: les equations de Yang-Mills. A. Douady, J.-L. Verdier, eds, seminaire E.N.S. 1977–1978, Asterisque, 71–72 (1980), 205–218.
16. Barth, W. Concernant la cohomologie des fibres algebriques sur P_n / W. Barth, G. Elenswajg // Springer Lecture Notes, 683 (1978), 1–24.
17. Ein, L. Generalized null correlation bundles / L. Ein // Nagoya Math. J. 111 (1988), 13–24.
18. Ellingsrud, G. Stable rank 2 vector bundles on P^3 with c_1 = 0 and c_2 = 3 / G. Ellingsrud, S. Strömme // Math. Ann., 255 (1981), 129–138.
19. Jardim, M. Instantons, generalized instantons and Buchsbaum bundles / M. Jardim, S. Marchesi // arXiv:1309.0447v1, [math.AG], 2 Sept. 2013, 11 p. (режим доступа: http://arxiv.org/pdf/1309.0447.pdf).
20. Hartshorne, R. Stable vector bundles of rank 2 on P^3 / R. Hartshorne // Math. Ann., 238 (1978), 229–280.
21. Hartshorne, R. Stable reflexive sheaves / R.Hartshorne // Math. Ann., 254 (1980), 121–176.
22. Hartshorne, R. Spectra and monads of stable bundles / R.Hartshorne, A.P.Rao // J. Math. Kyoto Univ., 31, № 3 (1991), 789–806.

Bibliograficheskij spisok

1. Vedernikov, V. K. Moduli stabil'nyh vektornyh rassloenij ranga 2 na P^3 c fiksirovannym spektrom [Tekst] / V. K. Vedernikov // Izvestija AN SSSR. Serija matematicheskaja. – 1984. – № 48:5. – S. 986–998.

2. Kytmanov, A. A. Prostranstva modulej stabil'nyh 2-rassloenij s c_1=0 na P^3: programma dlja nahozhdenija novyh komponent Jejna, jeksperimental'nye dannye, fakty, gipotezy [Tekst] / A. A. Kytmanov, N. N. Osipov, S. A. Tihomirov, T. L. Troshina // Sibirskij matematicheskij zhurnal. – 18 s. (v pechati).

3. Tihomirov, A. S. Moduli matematicheskih instantonnyh vektornyh rassloenij s nechetnym c_2 na proektivnom prostranstve [Tekst] / A. S. Tihomirov // Izvestija RAN. Serija matematicheskaja. –2012. – № 76:5. – S. 143–224.

4. Tihomirov, A. S. Moduli matematicheskih instantonnyh vektornyh rassloenij s chetnym c_2 na proektivnom prostranstve [Tekst] / A. S. Tihomirov // Izvestija RAN. Serija matematicheskaja. 2013. – № 77:5. – S. 139–168.

5. Tihomirov, S. A. Komponenty prostranstv modulej stabil'nyh rassloenij ranga 2 na P^3 c obshhim spektrom (-1,0,…,0,1) [Tekst] / S. A. Tihomirov // Sb. trudov mezhdunarodnoj letnej shkoly po algebraicheskoj geo-metrii i kompleksnomu analizu, MIAN-JaGPU. – Moskva-Jaroslavl' : Izd-vo MIAN, 2013. – S. 68–69.

6. Tihomirov, S. A. Invarianty stabil'nyh 2-rassloenij na kompleksnom proektivnom prostranstve i adaptacija vychislitel'noj tehnologii Barta [Tekst] / S. A. Tihomirov, A. P. Ljapin, O. A. Vojlokova // Jaroslavskij pedagogicheskij vestnik. T. III (Estestvennye nauki) – Jaroslavl' : Izd-vo JaGPU, 2013. – № 2. – S. 33–38.

7. Tihomirov, S. A. Kombinirovannyj vychislitel'nyj metod v sravnitel'nom analize komponent Hartshorna i Vedernikova stabil'nyh 2-rassloenij na kompleksnom proektivnom prostranstve [Tekst] / S. A. Tihomirov, A. P. Ljapin, V. M. Rostov // Jaroslavskij pedagogicheskij vestnik. T. III (Estestvennye nauki) – Jaroslavl' : Izd-vo JaGPU, 2013. – № 1. – S. 12–19.

8. Tihomirov, S. A. O mnogoobrazijah modulej $M_{P^3}(2;0,10)$ i $M_{P^3}(2;0,11)$ stabil'nyh 2-rassloenij s klassami Cherna $c_1=0$, $c_2=10$ i 11 na kompleksnom proektivnom prostranstve [Tekst] / S. A. Tihomirov, A. P. Ljapin, E. A. Ruzanov // Jaroslavskij pedagogicheskij vestnik. T. III (Estestvennye nauki) – Jaroslavl' : Izd-vo JaGPU, 2012. – № 4. – S. 13–18.

9. Tihomirov, S. A. Stabil'nye rassloenija ranga 2 s klassami Cherna c_1=0, c_2=2 na P^3 i giperkvadriki Ponsele [Tekst] / S. A. Tihomirov // Zhurnal SFU, serija «Matematika i fizika». – 2011. – № 4 (4). – S. 551–555.

10. Tihomirov, S. A. Spektry stabil'nyh rassloenij ranga 2 na P^3 s klassami Cherna $c_1=0$ i $1 \le c_2 \le 19$ [Tekst] / S. A. Tihomirov, A. A. Smirnova // Jaroslavskij pedagogicheskij vestnik. Serija «Fiziko-matematicheskie nauki i estestvennye nauki». – 2010. – № 3. – S. 5–7.

11. Tihomirov, S. A. Metod dvojnyh rasshirenij v issledovanii stabil'nyh rassloenij na P^3 [Tekst] / S. A. Tihomirov // Trudy Shestyh Kolmogorovskih chtenij. – Jaroslavl' : Izd-vo JaGPU, 2008. – S. 174–183.

12. Tihomirov, S. A. Zamykanija Ponsele i mnogoobrazie M(0,2) modulej stabil'nyh vektornyh rassloenij ranga 2 na prostranstve P^3 [Tekst] / S. A. Tihomirov // Jaroslavskij pedagogicheskij vestnik. – Jaroslavl' : Izd-vo JaGPU, 2007. – № 1. – S. 35–39.

13. Tihomirov, S. A. Zamykanija Ponsele i mnogoobrazie M(0,2) modulej stabil'nyh vektornyh rassloenij ranga 2 na prostranstve P^3 [Tekst] / S. A. Tihomirov // Jaroslavskij pedagogicheskij vestnik. – Jaroslavl' : Izd-vo JaGPU, 2007. – № 2. – S. 25–31.

14. Barth, W. Irreducibility of the space of mathematical instanton bundles with rank 2 and c_2=4 / W.Barth // Math. Ann., 258:1 (1981), 81–106.

15. Barth, W. Some experimental data / W. Barth // In: les equations de Yang-Mills. A. Douady, J.-L. Verdier, eds, seminaire E.N.S. 1977–1978, Asterisque, 71–72 (1980), 205–218.

16. Barth, W. Concernant la cohomologie des fibres algebriques sur P_n / W. Barth, G. Elenswajg // Springer Lecture Notes, 683 (1978), 1–24.

17. Ein, L. Generalized null correlation bundles / L. Ein // Nagoya Math. J, 111 (1988), 13–24.

18. Ellingsrud, G. Stable rank 2 vector bundles on P^3 with c_1 = 0 and c_2 = 3 / G. Ellingsrud, S. Strömme // Math. Ann., 255 (1981), 129–138.

19. Jardim, M. Instantons, generalized instantons and Buchsbaum bundles / M. Jardim, S. Marchesi // arXiv:1309.0447v1, [math.AG], 2 Sept. 2013, 11 r. (rezhim dostupa: http://arxiv.org/pdf/1309.0447.pdf).

20. Hartshorne, R. Stable vector bundles of rank 2 on P^3 / R. Hartshorne // Math. Ann., 238 (1978), 229–280.

21. Hartshorne, R. Stable reflexive sheaves / R.Hartshorne // Math. Ann., 254 (1980), 121–176.

22. Hartshorne, R. Spectra and monads of stable bundles / R. Hartshorne, A. P. Rao // J. Math. Kyoto Univ., 31, № 3 (1991), 789–806.