УДК 530.12; 530.145

В. Г. Кречет, М. Н. Лоди

Астрофизические конфигурации с самогравитирующей экстремальной материей

В работе исследуется, в рамках ОТО, возможные астрофизические эффекты индуцируемые самогравитирующей экстремальной материей в виде идеальной жидкости с предельными и сверхпредельными уравнениями состояния или сильно нелинейных физических полей. Обращается внимание на возможность образования «кротовых нор».

Ключевые слова: гравитация, экстремальная материя, «кротовые норы», «горловина», астрофизика, идеальная жидкость, уравнение состояния, Вселенная, метрика, асимптотика, координатные условия, пространство-время.

V. G. Krechet, M. N. Lodi

Astrophysical configurations with the self-gravitating extreme matter

In the work, in the frames of OTO, are investigated possible astrophysical effects induced by the self-gravitating extreme matter in the form of the ideal liquid with the limit and superlimit equations of condition or strongly nonlinear physical fields. The attention is paid to the possibility of producing «the mole holes».

Keywords: gravitation, extreme matter, «the mole holes», «mouth», astrophysics, ideal liquid, a conditional equation, the Universe, metrics, asymptotics, coordinate conditions, space-time.

В работе рассматриваются, в рамках общей теории относительности (ОТО), стационарные распределения самогравитирующей экстремальной материи, к которой мы относим, например, идеальную жидкость с предельными или сверхпредельными уравнениями состояния, или же очень сильно нелинейные физические поля, например, с экспоненциальными нелинейностями.

Такое рассмотрение связано с тем, что в настоящее время в теоретической физике интенсивно обсуждается проблема существования «кротовых нор»,-туннелей в пространстве-времени, соединяющих удаленные области Вселенной, а может быть, и параллельные Вселенные [1, 2, 3]. Через такие «кротовые норы» за короткое время можно достигнуть отдаленных областей космоса.

Геометрия «кротовых нор» может быть теоретически получена как решения уравнений Эйнштейна ОТО для самогравитирующей материи особых видов. Одним из таких видов материи, вызывающих получение решений с геометрией «кротовых нор», является используемая до сих пор так называемая «фантомная материя», с отрицательной кинетической энергией, что с нашей точки зрения не очень физично, или же с нарушенным слабым условием энергодоминантности (p+ε>0), где p-давление, а ε-плотность энергии.

В данной работе мы пытаемся найти еще другие виды материи для получения «кротовых нор», в частности типы материи с экстремальными свойствами, о которых говорилось выше.

Сначала в качестве таковой рассмотрим баротропную самогравитационную жидкость с уравнением состояния ρ=wε, где w-коэффициент баротропности, в геометрии с цилиндрической симметрией, описываемой метрикой:

$$ds^2 = e^\lambda dx^2 + e^\mu d\varphi^2 + e^\alpha dz^2 - e^\nu dt^2 \qquad (1)$$

здесь x − радиальная координата, φ − азимутальный угол ($0 \le \varphi \le 2\pi$), e^λ, e^μ,e^α,e^ν − метрические координаты, зависящие лишь от x.

Угловой метрический коэффициент e^μ определяет пространственную бесконечность, при $e^\mu \to \infty$, а точка, где $e^\mu=0$, лежит на оси симметрии.

Гравитационные уравнения Эйнштейна в пространстве-времени(1) для баротропной жидкости (p=wε) в изотермических координатах (λ=α) будут иметь вид:

1) $\lambda'\mu' + \lambda'\nu' + \mu'\nu' = 4\chi p e^\lambda$;

2) $\mu'' + \frac{(\mu)^2}{2} + \frac{\mu'\nu'}{2} = \chi(p - \varepsilon)e^\lambda$;

---

3) $\nu'' + \frac{(\nu')^2}{2} + \frac{\mu'\nu'}{2} = \chi(3p+\varepsilon)e^{\lambda}$; (2)

4) $\lambda'' + \frac{\lambda'\nu'}{2} + \frac{\lambda'\mu'}{2} = \chi(p-\varepsilon)e^{\lambda}$

Здесь $\chi = \frac{8\pi G}{c^4}$ – гравитационная константа Эйнштейна, G – гравитационная константа Ньютона, ***c*** – скорость света в вакууме, а штрих ($'$) обозначает производную по x.

Следствием гравитационных уравнений (2) является локальный закон сохранения энергии

$$p' + \frac{\nu'}{2}(p+\varepsilon) = 0 \tag{3}$$

При заданном уравнении состояния p=p(ε) уравнение (3) легко интегрируется, что в дальнейшем помогает находить решения системы уравнений (2).

Второе уравнение системы (2) для углового метрического коэффициента e^{μ} определяет возможность существования «кротовой норы».

Так при p>ε, правая часть этого уравнения положительно определена, и в точке, где μ'=0 (в точке минимума e^{μ} , т. е. в горловине – самом узком месте «кротовой норы»), получается, что μ''>0; а это есть необходимое условие существования «кротовой норы»: μ''>0, при $\mu'>0$.

Является ли это условие достаточным, покажет дальнейший ход решения системы уравнений (2), потому что в области существования такого решения необходимо еще, чтобы $e^{\mu} \neq 0$. Условие положительной определенности правой части уравнения (2.2) обеспечивает уравнение состояния

$$p = (1+\kappa)\varepsilon;\ \kappa = \text{const} > 0 \tag{4}$$

При этом $p - \varepsilon = \kappa\varepsilon > 0$, при положительных значениях плотности энергии *ε*.

Такое уравнение состояния соответствует сверхгорячей материи, называемой также «экопиротической материей». Такое состояние материи могло быть на самых ранних этапах существования Вселенной, а возможно и в современную эпоху в горячих ядрах галактик или квазаров.

У материи с таким уравнением состояния ($p = (1+\kappa)\varepsilon$, $\kappa > 0$) скорость звука υ больше скорости света c (υ> c). В самом деле, скорость звука в сплошной среде, как известно, определяется формулой $\upsilon^2 = \frac{dp}{d\rho}$, где *ρ* – плотность массы. Но поскольку плотность энергии $\varepsilon=\rho c^2$, то для используемого уравнения состояния (4) имеем: $p = (1+\kappa)\varepsilon = (1+\kappa)\rho c^2$. Отсюда получаем: $\upsilon^2 = \frac{dp}{d\rho} = (1+\kappa)c^2, \upsilon = \sqrt{(1+\kappa)}c$; т. е. υ > c.

При таком уравнении состояния (4) решением уравнения сохранения энергии (3) является выражение:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{-\frac{(2+\kappa)}{2(1+\kappa)}\nu};\ \varepsilon_0 = const \tag{5}$$

В дальнейшем перейдем к новому координатному условию λ=μ+ν+α, при котором решения получаются легче, и проведем замену: χp→p; χε→ε.

Тогда уравнения системы (2) будут иметь вид (при учете выражения (5)

$$\begin{cases} 1)\ \mu'\nu' + \alpha\mu' + \alpha'\nu' = 4(1+\kappa)\varepsilon_0 e^{\alpha+\mu+\nu\times\frac{\kappa}{2(1+\kappa)}} \\ 2)\ \mu'' = \kappa\varepsilon_0 e^{\alpha+\mu+\frac{\kappa}{2(1+\kappa)}\nu} \\ 3)\ \nu'' = (4+3\kappa)\varepsilon_0 e^{\alpha+\mu+\frac{\nu}{2(1+\kappa)}\nu} \\ 4)\ \alpha'' = \kappa\varepsilon_0 e^{\alpha+\mu+\frac{\kappa}{2(1+\kappa)}\nu} \end{cases} \tag{6}$$

Сравнивая 2) и 4) имеем:

$$\alpha'' = \mu'';\quad \alpha' = \mu' + c;\quad \alpha = \mu + cx;\ (c = const) \tag{7}$$

Исключая с помощью (7) функцию α(x), систему (6) приведем к виду:

$$\begin{aligned} &1)\ \mu'\nu' + (\mu'+c)(\mu'+\nu') = 4(1+\kappa)\varepsilon_0 e^{2\mu+\frac{\kappa}{2(1+\kappa)}\nu+cx} \\ &2)\ \mu'' = \kappa\varepsilon_0 e^{2\mu+\frac{\kappa}{2(1+\kappa)}\nu+cx} \\ &3)\ \upsilon'' = (4+3k)\varepsilon_0 e^{2\mu+\frac{\kappa}{2(1+\kappa)}+cx} \end{aligned} \tag{8}$$

Сравнивая теперь уравнения (2) и (3) в системе (8) выражаем ν(x) через μ(x):

$$\nu'' = \frac{(4+3\kappa)}{\kappa}\mu'';\ \nu' = \frac{(4+3\kappa)}{\kappa}\mu' + C_1;\ \nu = \frac{(4+3\kappa)}{\kappa}\mu + C_1 x;\ (C_1 = const) \tag{9}$$

Наконец, исключая еще и функцию ν(x), с помощью (9), система (8) сведется к двум уравнениям для функции μ(x):

1) $\frac{8+7\kappa}{\kappa}(\mu')^2+\left[\frac{4(1+\kappa)}{\kappa}C+2C_1\right]\mu'-CC_1=4(1+\kappa)\varepsilon_0 e^{\frac{8+7\kappa}{2(1+\kappa)}\mu+\left(C+\frac{\kappa C_1}{2(1+k)}\right)x}$

2) $\mu''=\kappa\varepsilon_0 e^{\frac{8+7\kappa}{2(1+\kappa)}\mu+\left(C+\frac{\kappa C_1}{2(1+k)}\right)x}\qquad (C,C_1=const)$ (10)

Здесь уравнение (10.2) для функции μ(x) принадлежит к типу уравнения Лиувиля, решение которого известно:

$$\frac{(8+7\kappa)}{4(\kappa+1)}\mu'+\left(\frac{C}{2}+\frac{\kappa C_1}{4(\kappa+1)}\right)=-\sqrt{\frac{(8+7\kappa)\kappa\varepsilon_0}{4(\kappa+1)}e^{\frac{8+7\kappa}{2(\kappa+1)}\mu+\left(C+\frac{\kappa C_1}{2(k+1)}\right)x}+sign\,q\times q^2}\quad (q=const)\qquad (11)$$

$$e^{\frac{8+7\kappa}{4(\kappa+1)}\mu}=\begin{cases}\frac{q}{\alpha}\frac{e^{-\left(\frac{C}{2}+\frac{\kappa C_1}{4(\kappa+1)}\right)x}}{shqx};(q>0)\\ \frac{1}{\alpha x}\times e^{-\left(\frac{C}{2}+\frac{\kappa C_1}{4(\kappa+1)}\right)x};(q=0)\\ \frac{q}{\alpha\,sinqx}\times e^{-\left(\frac{C}{2}+\frac{\kappa C_1}{4(\kappa+1)}\right)x};(q<0)\end{cases};\quad \left(\alpha\equiv\sqrt{\frac{(8+7\kappa)\kappa\varepsilon_0}{4(\kappa+1)}}\right)\qquad (12)$$

Здесь формула (11) является первым интегралом уравнения (10.2), а (12) является его решением, sign q − знаковая функция:

Sign q=1 при q>0; Sign q=0 при q=0; Sign q= -1 при q<0;

Уравнение первого порядка (10.1) для функции μ(x) определяет ограничения на граничные условия задачи, определяющие константы интегрирования ε_0, C, C_1, q.

Подставляя решения (11), (12) в это уравнение, находим соотношение между константами интегрирования.

$$sign\,q\times q^2-\left[\frac{C}{2}+\frac{\kappa C_1}{4(1+\kappa)}\right]^2+\frac{\kappa(4+3\kappa)}{8(1+\kappa)^2}=0\qquad (13)$$

Далее, с помощью полученных ранее соотношений (7) и (9) выписываем решения для остальных метрических коэффициентов: e^{ν}, e^{α}, e^{λ}:

$$e^{\nu}=\begin{cases}\left[\frac{q}{\alpha}\frac{e^{-bx}}{shqx}\right]^{\frac{4(1+\kappa)(4+3\kappa)}{\kappa(8+7\kappa)}}\times e^{C_1x};(при\,q>0)\\ \left[\frac{e^{-bx}}{\alpha x}\right]^{\frac{4(1+\kappa)(4+3\kappa)}{\kappa(8+7\kappa)}}\times e^{C_1x};(при\,q=0)\\ \left[\frac{q}{\alpha}\frac{e^{-bx}}{sinqx}\right]^{\frac{4(1+\kappa)(4+3\kappa)}{\kappa(8+7\kappa)}}\times e^{C_1x};(при\,q<0)\end{cases}\qquad (14)$$

$$e^{\alpha}=\begin{cases}\left[\frac{q}{\alpha}\frac{e^{-bx}}{shqx}\right]^{\frac{4(1+\kappa)}{(8+7\kappa)}}\times e^{Cx};(при\,q>0)\\ \left[\frac{e^{-bx}}{\alpha x}\right]^{\frac{4(1+\kappa)}{(8+7\kappa)}}\times e^{Cx};(при\,q=0)\\ \left[\frac{q}{\alpha}\frac{e^{-bx}}{sinqx}\right]^{\frac{4(1+\kappa)}{(8+7\kappa)}}\times e^{Cx};(при\,q<0)\end{cases}\qquad (15)$$

$$e^{\lambda}=\begin{cases}\left[\frac{q}{\alpha}\frac{e^{-bx}}{shqx}\right]^{\frac{4(1+\kappa)(4+5\kappa)}{(8+7\kappa)\kappa}}\times e^{(C_1+C)x};(при\,q>0)\\ \left[\frac{e^{-bx}}{\alpha x}\right]^{\frac{4(1+\kappa)(4+5\kappa)}{(8+7\kappa)\kappa}}\times e^{(C_1+C)x};(при\,q=0)\\ \left[\frac{q}{\alpha}\frac{e^{-bx}}{sinqx}\right]^{\frac{4(1+\kappa)(4+5\kappa)}{(8+7\kappa)\kappa}}\times e^{(C_1+C)x};(при\,q<0)\end{cases}\qquad (16)$$

Здесь для краткости записи введены обозначения

$$\alpha\equiv\sqrt{\frac{(8+7\kappa)\kappa}{4(1+\kappa)}\times\varepsilon_0};\quad b=\frac{C}{2}+\frac{\kappa C_1}{4(1+\kappa)}$$

Как видно для каждого метрического коэффициента имеются 3 вида решения в зависимости от знака константы q (q>0, q=0, q<0)

Наша цель из полученных решений выбрать те, которые соответствуют геометрии «кротовых нор».

Как видно из формулы (12), для углового метрического коэффициента e^{μ}, для всех трех типов решений выбором констант интегрирования, не противоречащих условию совместности (13), можно найти интервалы изменения радиальной координаты x, на которых $e^{\mu} \neq 0$, а на их концах $e^{\mu} \to \infty$, что соответствует геометрии «кротовых нор».

Рассмотрим по порядку все три случая.

1) q > 0. «Кротовая нора» получается если $-\frac{C}{2} + \frac{\kappa C_1}{4(1+\kappa)} > q$, т. е. когда выражение $\frac{C}{2} + \frac{\kappa C_1}{4(1+\kappa)} < 0;$. В этом случае в интервале 0<x<∞ функция $e^{\mu} \neq 0$ и везде $e^{\mu} > 0$, а на концах этого интервала т. е. при x→0 и x→∞ функция $e^{\mu} \to \infty$,что соответствует геометрии «кротовой норы». Из вышеприведенного условия на константы C, C_1, q имеем: $\left(\frac{C}{2} + \frac{\kappa C_1}{4(1+\kappa)}\right)^2 > q^2$, что соответствует условию (13).Однако, исследования показывают, что при этом остальные метрические коэффициенты ($e^{\nu}, e^{\alpha}, e^{\lambda}$), с обеих концов получившейся «кротовой норы» (x=0; x→∞), нельзя сделать конечными никаким подбором констант C, C_1, κ, q. Это значит, что получившаяся «кротовая нора» не имеет плоской асимптотики.

2) q=0; Тогда «кротовая нора» получается, если выполняется условие $-\left(\frac{C}{2} + \frac{\kappa C_1}{4(1+\kappa)}\right) > 0; (0 < x < \infty)$. Что также не противоречит условию совместности (13), то здесь так же, как и в случае q > 0, никаким подбором констант (C, C_1, κ) нельзя получить плоской асимптотики.

3) q < 0. Тогда в интервале $(0 < |q|x < \pi)$ получается геометрия «кротовой норы», т. к. угловой метрический коэффициент $e^{\mu} \neq 0$ внутри этого интервала, а на его концах $e^{\mu} \to \infty$, что соответствует двум пространственным бесконечностям.

При этом все остальные метрические коэффициенты (e^{ν}, e^{α}, e^{λ}) на концах указанного интервала также стремятся к бесконечности, т. е. и в случае q < 0 получившаяся «кротовая нора» не имеет плоской асимптотики.

Однако, в рассматриваемом случае константы C_1 и C_2 качественно не влияют на поведение всех метрических коэффициентов, и их можно положить равными нулю. При этом решение сильно упростится вместе с условием совместности (13) и все формулы примут вид

$$
\begin{aligned}
&e^{\frac{8+7\kappa}{4(1+\kappa)}\mu} = \frac{q}{\alpha \sin qx} \quad (q<0);\\
&e^{\nu} = \left(\frac{q}{\alpha \sin qx}\right)^{\frac{4(1+\kappa)(4+3\kappa)}{\kappa(8+7\kappa)}};\\
&e^{\alpha} = \left(\frac{q}{\alpha \sin qx}\right)^{\frac{4(1+\kappa)}{(8+7\kappa)}};\\
&e^{\lambda} = \left(\frac{q}{\alpha \sin qx}\right)^{\frac{4(1+\kappa)(4+5\kappa)}{(8+7\kappa)\kappa}};\\
&\alpha \equiv \sqrt{\frac{(8+7\kappa)\kappa\varepsilon_0}{4(1+\kappa)}},
\end{aligned}
\qquad (17)
$$

При условии совместности $q^2 = \frac{\kappa(4+3\kappa)}{8(1+\kappa)^2}$.

В итоге можно сказать, что для сверхгорячей материи с уравнением состояния $p = (1+\kappa)\varepsilon, R > 0$, подбором констант интегрирования в решениях уравнений Эйнштейна во всех трех ключевых случаях (q>0, q=0, q<0) можно получить геометрию «кротовых нор», но при этом все они не имеют плоской асимптотики.

Потому, чтобы получившиеся «кротовые норы» сделать проходимыми, необходимо с обеих концов проводить их обрезание и сшивать решения с метрическими коэффициентами плоского пространства-времени Минковского.

Библиографический список

1. Кречет, В. Г. Топологические и физические эффекты вращения и спина в общерелятивистской теории гравитации [Текст] / В. Г. Кречет // Известия ВУЗов. Физика. – 2007 − №10 − с. 57−60

2. Bronnikov K. A., Krechet V. G., Lemos P. S. Rotating Cylindrical Warmholes, Physical Review D 87, 084060 (2013)

3. Morris M., Thorne K. S., and Yurtsever U., Phis. Ren Lett. V.61, 1446(1988)

Bibliograficheskij spisok

1. Krechet, V. G. Topologicheskie i fizicheskie jeffekty vrashhenija i spina v obshhereljativistskoj teorii gravitacii [Tekst] / V. G. Krechet // Izvestija VUZov. Fizika. – 2007 − №10 − s. 57−60

2. Bronnikov K. A., Krechet V. G., Lemos P. S. Rotating Cylindrical Warmholes, Physical Review D 87, 084060 (2013)

3. Morris M., Thorne K. S., and Yurtsever U., Phis. Ren Lett. V.61, 1446(1988)