УДК 372.851

В. С. Секованов, Е. М. Селезнева, В. А. Ивков

Фрактальные методы в физике и экономике на уроках математики

В данной статье рассмотрены приложения фрактальной геометрии в физике и экономике. Разработана методика исследования множества Жюлиа преобразования перенормировки $R_q(x) = \left(\frac{x^2 + q - 1}{2x + q - 2}\right)^2$ для $q = 0$, которое совпадает с множеством нулей Янга-Ли в термодинамическом пределе. Получено представление функции $R_0(x)$ в виде композиции двух линейных взаимно-обратных функций и одной нелинейной функции $p(x) = x^2 + \frac{1}{4}$. Установлена связь между периодическими точками функции $R_0(x)$ и периодическими точками функции $p(x) = x^2 + \frac{1}{4}$. Доказано равенство периодов точек x и $\varphi(x)$ для отображений $R_0(x)$ и $p(x)$ соответственно. Установлено взаимно-однозначное соответствие между замыканиями множеств неподвижных отталкивающих точек для функций $R_0(x)$ и $p(x)$. Приведены алгоритмы построения множества Жюлиа с помощью системы программирования и в среде MathCad. Указаны применения идей фрактальной геометрии в физике (в частности, гидроаэродинамика, гидрология, метеорология, а также теория турбулентности, связанная с именами А. Н. Колмогорова и У. Фриша) и экономике (моделирование динамики финансовых рынков, построение фрактальных структур времени изменения котировок акций на бирже). Отмечен вклад А. Н. Колмогорова в развитие идей самоподобия и каскадности энергетических структур в контексте теории турбулентности.

Ключевые слова: множество Жюлиа, перенормировка, неподвижные и критические точки, орбита точки, фазовый переход.

V. S. Sekovanov, E. M. Selezniova, V. A. Ivkov

Fractal Methods in Physics and Economics at Mathematics Lessons

This article describes the application of fractal geometry in Physics and Economics. It is developed a technique to study Julia set of the renormalization transformation $R_q(x) = \left(\frac{x^2 + q - 1}{2x + q - 2}\right)^2$ for which $q = 0$, coincides with the set of Yang-Lee zeros in the thermodynamic limit. Representation is obtained as a function $R_0(x)$ as the compositions of two linear mutually inverse functions and a nonlinear function $p(x) = x^2 + \frac{1}{4}$. The connection between the periodic points of the function $R_0(x)$ and periodic points of the function $p(x) = x^2 + \frac{1}{4}$. It is proved equal periods of points x and φ(x) for reflections R0(x) and p(x) respectively. It is established a one - to-one correspondence between the closure of the set of fixed points repelling functions $R_0(x)$ and p(x). The algorithms to construct Julia set by the system of software and environment MathCad. We apply the ideas of fractal geometry in Physics (in particular, Nuclear Power, hydrology, meteorology, and the theory of turbulence associated with the names of A.N.Kolmogorov and U.Frisch) and Economics (modeling the dynamics of financial markets, the construction of fractal structures of time change of stock quotes on the stock exchange. The contribution of A.N.Kolmogorov into the development of ideas of self-similarity and energy cascade structures in the context of the theory of turbulence.

Keywords: Julia set, renormalization, a fixed and critical point, the orbit of the phase transition.

До недавнего времени считалось, что фракталы – это красивые картинки и ничего более. Однако время и интенсивные исследования в различных областях науки развеяли данный взгляд на фракталы. Идеи фрактальной геометрии находят широкое применение в различных областях человеческих знаний. Данной науке посвящено много сайтов, написаны монографии, проводятся представительные научные конференции. Об интенсивности исследований в области фрактальной геометрии свидетельствуют работы [2 – 4], [6 – 15].

В данной работе мы остановимся на приложении фракталов в физике и экономике.

Деррида, Де Сезе и Ициксон впервые обнаружили тождественность нулей Янга–Ли в термодинамическом пределе с множеством Жюлиа преобразования перенормировки $R_q(x) = \left(\frac{x^2+q-1}{2x+q-2}\right)^2$. То есть фазовая граница Янга-Ли совпадает с фрактальным множеством Жюлиа преобразования $\mathrm{R_q}$ [6]. В монографии [6] рассмотрены в смысле перенормировок фазовые границы Янга-Ли, продолженные в комплексную плоскость. Однако подробных пояснений для построения множеств Жюлиа рациональной функции $R_q(x) = \left(\frac{x^2+q-1}{2x+q-2}\right)^2$ нет, что вызывает многочисленные вопросы у бакалавров, студентов, магистров и аспирантов, изучающих теорию фазовых переходов и алгоритмы построения множеств Жюлиа.

Как известно [2], [12], множество Жюлиа для рациональной функции комплексного переменного $f(x)$, обозначаемое $J(f)$, определяется как замыкание ее отталкивающих периодических точек. Причем, если f – полином, то $J(f) = \partial\left\{x \in C : \lim\limits_{n\to\infty} f^{(n)}(x) = \infty\right\}$, (то есть $J(f)$ является границей множества, орбиты каждой точки которого стремятся к бесконечности [2].

Исследуем подробно построение нулей Янга–Ли в термодинамическом пределе (множество Жюлиа для функции $R_q(x) = \left(\frac{x^2+q-1}{2x+q-2}\right)^2$ при $q = 0$).

Мы имеем: $R_0(x) = \left(\frac{x^2-1}{2\mathrm{x}-2}\right)^2 = \frac{(x+1)^2}{4}$.

Используя замену координат $\varphi(x) = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}$, получим равенство $R_0 = \varphi^{-1} \circ p \circ \varphi$ (*), где $p(x) = x^2 + \frac{1}{4}$, $\varphi^{-1}(x) = 4x - 1$ то есть $R_0(x) = \varphi^{-1}(p(\varphi(x)))$. Действительно:

1) $\varphi(x) = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}$;

2) $p(\varphi(x)) = \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} = \frac{x^2}{16} + \frac{x}{8} + \frac{5}{16}$;

3)

$$\varphi^{-1}(p(\varphi(x))) = 4\left(\frac{x^2}{16} + \frac{x}{8} + \frac{5}{16}\right) - 1 = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4} = R_0(x)$$

Поясним подробно вывод формулы (*). Найдем такую линейную замену $\varphi(x) = a \cdot x + b$ $(a \neq 0)$, что $\varphi^{-1} \circ p \circ \varphi = R_0$, где $p(x) = x^2 + c$, $R_0(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$.

Заметим, что $\varphi^{-1}(x) = \frac{x}{a} - \frac{b}{a}$. Далее имеем:

$$\varphi^{-1}(p(\varphi(x))) = \frac{(ax+b)^2 + c}{a} - \frac{b}{a} = ax^2 + 2bx + \frac{b^2}{a} + \frac{c}{a} - \frac{b}{a}.$$

Таким образом,

$$ax^2 + 2bx + \frac{b^2}{a} + \frac{c}{a} - \frac{b}{a} = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}.$$

Сравнивая коэффициенты многочленов $ax^2 + 2bx + \frac{b^2}{a} + \frac{c}{a} - \frac{b}{a}$ и $\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$, получаем простую систему уравнений:

$$\begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = \frac{1}{4} \\ \frac{b^2}{a} + \frac{c}{a} - \frac{b}{a} = \frac{1}{4} \end{cases} \qquad (**)$$

Из системы уравнений (**) находим: $a = \frac{1}{4}, b = \frac{1}{4}, c = \frac{1}{4}$. То есть $\varphi(x) = \frac{1}{4} \cdot x + \frac{1}{4}$, а $p(x) = x^2 + \frac{1}{4}$ и равенство $R_0 = \varphi^{-1} \circ p \circ \varphi$ (*) установлено.

Применив метод математической индукции, покажем, что $R_0^{(n)} = \varphi^{-1} \circ p^{(n)} \circ \varphi$ (***). Для $n = 1$ имеем: $R_0^{(1)} = \varphi^{-1} \circ p^{(1)} \circ \varphi$ – равенство справедливо.

Предположим, что равенство справедливо при $n > 1$. То есть $R_0^{(n)} = \varphi^{-1} \circ p^{(n)} \circ \varphi$. Далее имеем: $\varphi \circ R_0^{(n)} = p^{(n)} \circ \varphi$ и $p^{(n+1)} \circ \varphi = p \circ p^{(n)} \circ \varphi = p \circ \varphi \circ R_0^{(n)}$. Из последнего равенства получаем, что $\varphi^{-1} \circ p^{(n+1)} \circ \varphi = \varphi^{-1} \circ p \circ \varphi \circ R_0^{(n)} = R_0 \circ R_0^{(n)} = R_0^{(n+1)}$

, что доказывает наше утверждение, то есть $R_0^{(n)} = \varphi^{-1} \circ p^{(n)} \circ \varphi$ (***).

Установим связь между периодическими точками функции $R_0(x) = \frac{(x+1)^2}{4}$ и периодическими точками функции $p(x) = x^2 + \frac{1}{4}$. Неподвижной точкой отображения $R_0(x) = \frac{(x+1)^2}{4}$ является точка $x = 1$. Найдем $\varphi(x) = \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. Нетрудно проверить, что точка $\varphi(x) = \frac{1}{2}$ является неподвижной точкой функции $p(x) = x^2 + \frac{1}{4}$.

Найдем точки периода 2 для функции $p(x)$. Для точек периода 2 функции $p(x)$ имеет место уравнение: $\left(x^2 + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} = x$. Проведя соответствующие вычисления получим $\left(x^2 + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} - x = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \left(x^2 + x + \frac{5}{4}\right) = 0.$ Таким образом, точками периода 2 для функции $p(x)$ будут три точки $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2} + i$, $x_3 = -\frac{1}{2} - i.$

Найдем $\varphi^{-1}(x_2) = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2} + i\right) - 1 = 4i - 3.$

Далее имеем:

$$\left(\frac{\left(\frac{(4i-3+1)}{2}\right)^2 + 1}{2}\right)^2 = \left(\frac{(2i-1)^2 + 1}{2}\right)^2 = \left(\frac{-4-4i+1+1}{2}\right)^2 = (1+2i)^2 = 4i - 3.$$

Таким образом, мы получили, что периоды точек $x_2 = -\frac{1}{2} + i$ и $\varphi^{-1}(x_2) = 4i - 3$ равны 2 для функций $p(x) = x^2 + \frac{1}{4}$ и $R_0(x) = \frac{(x+1)^2}{4}$ соответственно. Аналогично можно проверить (студентам полезно провести необходимые выкладки), что периоды точек $x_2 = -\frac{1}{2} - i$ и $\varphi^{-1}(x_2) = -4i - 3$ также равны 2 для функций $p(x) = x^2 + \frac{1}{4}$ и $R_0(x) = \frac{(x+1)^2}{4}$ соответственно.

Докажем общее утверждение: точка x отображения $R_0 = \varphi^{-1} \circ p \circ \varphi$ будет иметь период n тогда и только тогда, когда точка $\varphi(x)$ будет иметь период n для отображения p.

Далее замечаем, что

Доказательство. Пусть точка x имеет период n для функции $R_0 = \varphi^{-1} \circ p \circ \varphi$. Тогда $R_0^{(n)}(x) = x$.

Согласно формуле (***) имеем $\varphi^{-1}\left(p^{(n)}(\varphi(x))\right) = x$. Из последнего равенства получаем, что $p^{(n)}(\varphi(x)) = \varphi(x)$. Таким образом, точка $\varphi(x)$. имеет период n для функции $p(x)$. Докажем обратное утверждение. Пусть точка y имеет период n для функции p. То есть $p^{(n)}(y) = y$. Существует такая точка $z \in X$, что $\varphi(z) = y$. Тогда имеем $p^{(n)}(\varphi(z)) = y$. Из последнего равенства находим, что $R_0^{(n)}(z) = \varphi^{-1}\left(p^{(n)}(\varphi(z))\right) = \varphi^{-1}(y) = z$. То есть точка $\varphi^{-1}(y) = z$ будет иметь период n для функции R_0.

$$\left(R_0{}^{(n)}(x)\right)' = \left(4\left(p^{(n)}\left(\frac{x}{4}+\frac{1}{4}\right)\right)-1\right)' = 4\left(p^{(n)}\left(\frac{x}{4}+\frac{1}{4}\right)-1\right)' = 4p^{(n)'}\left(\frac{x}{4}+\frac{1}{4}\right)\left(\frac{x}{4}+\frac{1}{4}\right)' =$$

$$= 4\cdot p^{(n)'}\left(\frac{x}{4}+\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{4} = p^{(n)'}(\varphi(x)).$$

Из последнего равенства заключаем, что неподвижная точка $x \in X$ функции $R_0{}^{(n)}$ будет отталкивающей тогда и только тогда, когда неподвижная точка $\varphi(x) \in X$ будет отталкивающей точкой для функции $p^{(n)}$.

Пусть теперь множество A есть множество всех неподвижных отталкивающих точек функции $R_0{}^{(n)}$, $n = 1, 2, \ldots$, а множество B – множество всех неподвижных отталкивающих точек $p^{(n)}$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда между множествами A и B функция φ устанавливает взаимно однозначное соответствие, то есть данные множества эквивалентны и мы имеем $\varphi^{-1}(B) = A$.

Нетрудно проверить, что функция φ будет устанавливать взаимно однозначное соответствие и между замыканиями $\overline{A}$ и $\overline{B}$ соответственно множеств A и B, и будет иметь место равенство $\varphi^{-1}(\overline{B}) = \overline{A}$. Действительно, пусть $y \in \overline{A}$. Тогда существует такая последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A = \varphi^{-1}(B)$, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. Тогда $y_n \in \varphi^{-1}(B)$.

Далее мы имеем $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(y_n) = \varphi(y)$, где $\{\varphi(y_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset B$. Следовательно, $\varphi(y) \in \overline{B}$ и $y \in \varphi^{-1}(\overline{B})$. Из последнего включения находим, что и $\overline{A} \subseteq \varphi^{-1}(\overline{B})$. Пусть теперь $x \in \varphi^{-1}(\overline{B})$. Тогда $\varphi(x) \in \overline{B}$. Существует такая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B = \varphi(A)$, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \varphi(x)$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi^{-1}(x_n) = x$, где $\varphi^{-1}\left(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\right) \subset A$. Таким образом, $x \in \overline{A}$, и мы имеем $\varphi^{-1}(\overline{B}) \subseteq \overline{A}$. Поскольку выше было установлено включение $\overline{A} \subseteq \varphi^{-1}(\overline{B})$, то справедливо равенство $\varphi^{-1}(\overline{B}) = \overline{A}$. В силу теоремы (см. [2, с. 227]) $J(R_0) = \overline{A}$ и $J(p) = \overline{B}$ где $J(R_0)$ – множество Жюлиа для функции R_0, а $J(p)$ – множество Жюлиа для функции p. Поскольку $\varphi(x) = \dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{4}$ – линейное отображение, то множество $J(p) = \overline{B}$ в нашем случае получается из множества $J(R_0) = \overline{A}$ с помощью гомотетии (см. [5, с. 46]).

Под заполняющим множеством Жюлиа мы будем понимать множество, орбиты каждой точки которого пойманы (см. [2, с. 218]). Множеством Жюлиа будет граница заполняющего множества Жюлиа (Рис. 3). Алгоритм построения заполняющего множества Жюлиа для функции $f(x) = x^2 + c$ хорошо изучен (см. рис.1 и [12, с. 79]). Построив заполняющее множество $J(p)$, мы без труда построим и заполняющее множество Жюлиа $J(R_0)$ (см. рис.1 и рис. 2).

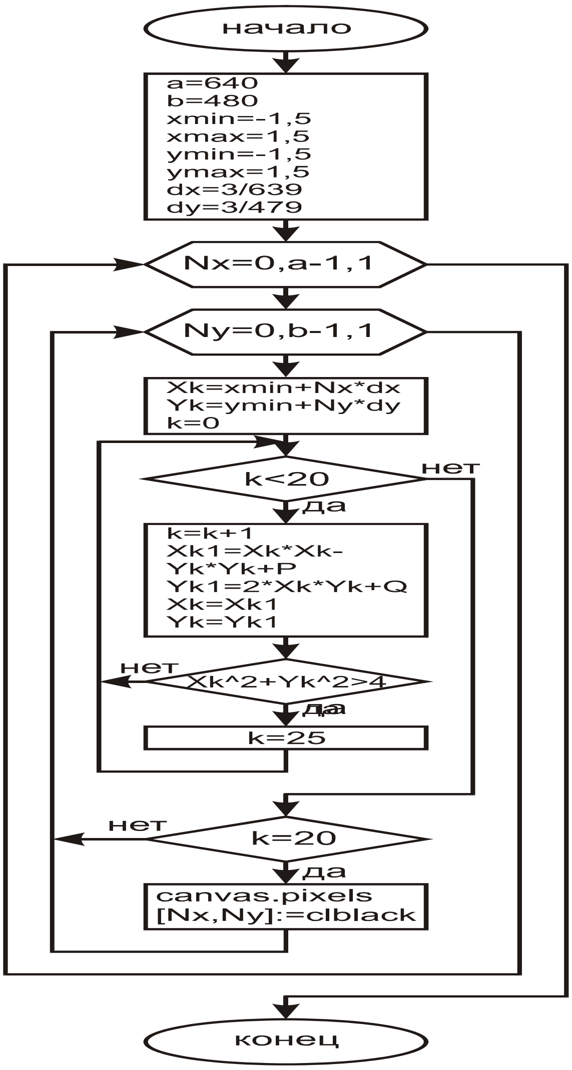

Рис. 1. Алгоритм построения заполняющего множества Жюлиа для функции $p(x) = x^2 + c$

Нетрудно проверить, что множеством Жюлиа для функции $f(x) = x^2$ будет окружность радиуса единица с центром в начале координат. Следует отметить, что множеством Жюлиа для функции $f(x) = x^2 - 2$ является отрезок $[-2;2]$ (см. [2, с. 246]). При бесконечно многих значениях параметра c множество Жюлиа функции $f(x) = x^2 + c$ имеет фрактальную структуру.

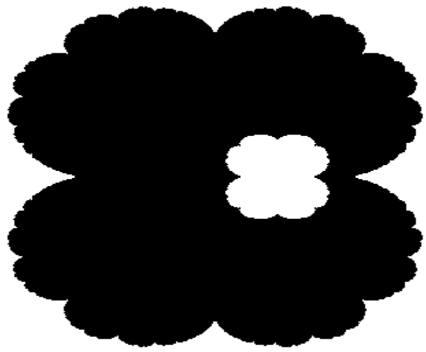

Рис.2. Заполняющие множества Жюлиа для функции $p(x) = x^2 + \frac{1}{4}$ (белый цвет) и функции $R_0(x) = \frac{(x+1)^2}{4}$ (черный цвет в объединении с заполняющим множеством Жюлиа для функции $p(x) = x^2 + \frac{1}{4}$.

Оставив границу заполняющего множества Жюлиа для функции R_0 (см. рис.3), мы получим множество Жюлиа этой функции, что согласовывается с [6, с. 116(с)].

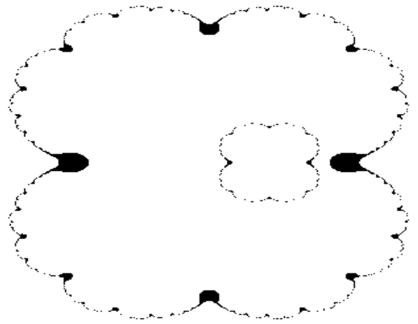

Рис. 3. Множества Жюлиа для функций $R_0(x) = \frac{(x+1)^2}{4}$ и $p(x) = x^2 + \frac{1}{4}$.

Замечание. Множество Жюлиа для функции $p(x) = x^2 + \frac{1}{4}$ можно построить и с помощью пакета MathCAD (рис. 4, см. [12, с. 86]).

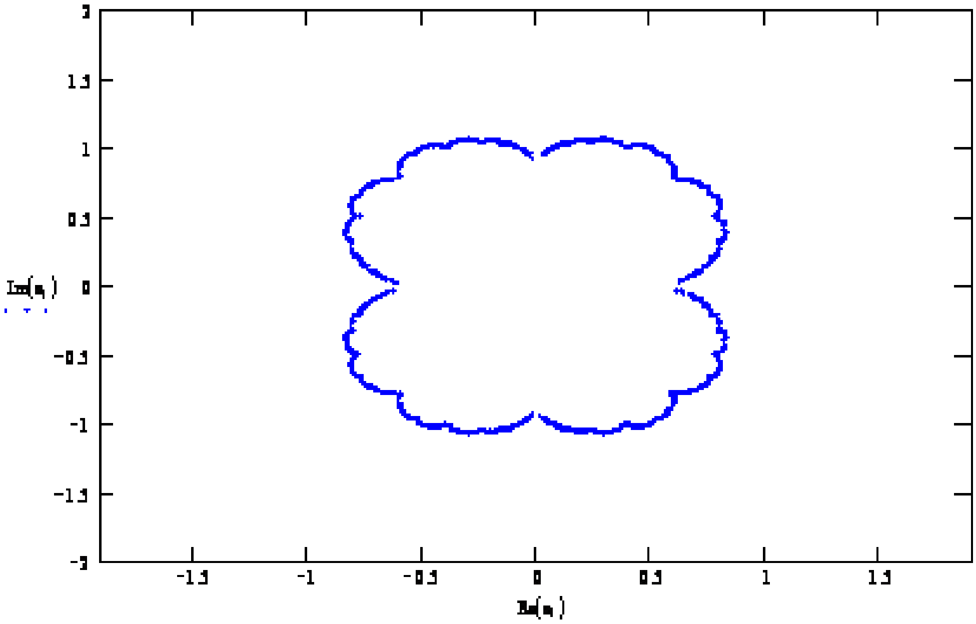

Рис. 4. Множество Жюлиа для функции $p(x) = x^2 + \frac{1}{4}$, построенное в среде MathCAD

Укажем применение идей фрактальной геометрии в других разделах физики и экономики.

Мандельброт отмечает, что метод фрактальной геометрии стал частью математического инструментария гидроаэродинамики, гидрологии и метеорологии. По словам Мандельброта, эффективность метода объясняется уникальной способностью выражать большое количество запутанных, неупорядоченных данных несколькими простыми формулами. Эта способность особенно ярко проявляется в случае мультифрактальности – фундаментального понятия при изучении турбулентности и полезного инструмента на финансовых рынках. Он и другие ученые на протяжении последних нескольких десятилетий использовали понятия фрактальной геометрии для изучения и создания моделей рынков.

Броуновское движение – случайное и хаотическое движение частичек пыли, взвешенных в воде - также является одним из аспектов фрактальной геометрии, имеющим практическое использование. Случайное броуновское движение имеет частотную характеристику, которая может быть использована для предсказания явлений, включающих большие количества данных и статистики. Идеи фрактальной геометрии применяются в теории турбулентности. В классической книге «Фрактальная геометрия природы» [3] основателя теории фракталов Бенуа Мандельброта, переведенной на многие языки и выдержавшей несколько изданий, говорится: «Кроме того, именно в контексте турбулентности теория каскадов и самоподобия достигла своих прогнозистских триумфов между 1941 и 1948 гг. Главными действующими лицами здесь были Колмогоров, Обухов, Онсагер и Фон Вайцзекер, однако традиция связывает достижения этого периода только с именем Колмогорова». Ученик А. Н. Колмогорова А. М. Яглом дает краткое описание турбулентности: «Турбулентность – явление, наблюдаемое в громадном большинстве течений жидкости и газов, встречающихся как в природе, так и в технических устройствах или лабораторных установках. Оно заключается в наличии беспорядочных пульсаций (т.е. хаотических изменений в пространстве и во времени) скорости U, давления P и других гидродинамических характеристик рассматриваемых течений, делающих соответствующие гидродинамические поля $U(x,t)$, $P(x,t)$ и др. резко изменчивыми и крайне нерегулярными» [5].

Уриэл Фриш, известный своими работами по фрактальным моделям однородной турбулентности, в книге «Турбулентность. Наследие А. Н. Колмогорова» отмечает: «Теория динамических систем не только оказалась полезной в ряде случаев при исследовании турбулентности, но и сама развивалась под влиянием этих исследований» [14].

В статье «Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса», опубликованной в 1941 году, Колмогоров пишет: «С энергетической точки зрения процесс турбулентного перемешивания естественно представлять себе так: пульсации первого порядка поглощают энергию осредненного движения и передают ее последовательно пульсации более высоких порядков; энергия же самых мелких пульсаций рассеивается в тепловую благодаря вязкости. В силу хаотического механизма передачи движения от пульсаций низших порядков к пульсациям более высоких порядков естественно допустить, что в пределах малых по сравнению с $l^{(1)}$ областей пространства мелкие пульсации высших порядков подчинены приближенно пространственно изотропному статистическому режиму» [1].

Примеры использования фракталов в экономических исследованиях наиболее ярко отражены в работах [4], [7]. Большая часть приложений методов фрактальной геометрии в экономической теории относится к финансовым рынкам. Оказывается, что поведение цен и курсов валют на товарных и фондовых рынках имеет самоподобную структуру, т.е. одна и та же фрактальная модель поведения цены на рынке будет работать одинаково вне зависимости от временного масштаба (ежедневный или ежемесячный график изменения цены будет представлять одинаковые структуры). Исследователю рынка (трейдеру) необходимо только знать основные модели движения цены и понимать характер этих моделей. Одной из популярных идей в анализе финансовых рынков является идея о фрактальной структуре времени изменения котировки акций на бирже [4]. Но эта идея требует дальнейшего развития специалистами в области прогнозирования.

Библиографический список

1. Колмогоров А. Н. Избранные труды. Математика и механика [Текст] / А. Н. Колмогоров. – М. : Наука, 1985. – 476 с.
2. Кроновер Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах [Текст] / Р. М. Кроновер; пер. с англ. под ред. Т. Э. Крэнкеля. – М. : Постмаркет, 2000. – 352 с.
3. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы [Текст] / Б. Мандельброт. – М. : Ин-т компьютерных исследований, 2002. – 656 с.
4. Мандельброт, Б. (Не)послушные рынки: фрактальная революция в финансах [Текст] / Б.Мандельброт, Р. Л. Хадсон ; пер. с англ. – М. : Издательский дом «Вильямс», 2006. – 400 с.
5. Маркушевич А. И. Введение в теорию аналитических функций [Текст] / А. И. Маркушевич, Л. А. Маркушевич. – М. : «Просвещение», 1977. – 320 с.
6. Пайтген Х.-О., Рихтер П. Х. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем [Текст]. – М. : Мир, 1993. – 176 с.
7. Петерс Э. Фрактальный анализ финансовых рынков. Применение теории хаоса в инвестициях и экономике. Хаос и порядок на рынках капитала [Текст] / Э. Петерс. – М. : Интернет-трейдинг, 2004. – 304 с.
8. Секованов В. С. Методическая система формирования креативности студента университета в процессе обучения фрактальной геометрии [Текст] / В. С. Секованов. – Кострома: КГУ им. Н. А. Некрасова, 2006. – 279 с.
9. Секованов В. С. О множествах Жюлиа некоторых рациональных функций [Текст] / В. С. Секованов. - Вестник КГУ им. Н. А. Некрасова. - Т. 18. - №2. - 2013.
10. Секованов В. С. Формирование креативной личности студента вуза при обучении математике на основе новых информационных технологий [Текст]. – Кострома: КГУ им. Н. А. Некрасова, 2004. – 231 с.
11. Секованов В. С. Элементы теории фрактальных множеств: учебное пособие с грифом УМО для студентов классических университетов специальности «Прикладная математика и информатика» [Текст] / В. С. Секованов. – Кострома: КГУ им. Н. А. Некрасова, 2005. – 135 с.
12. Секованов В. С. Элементы теории фрактальных множеств [Текст]: учебное пособие / В. С. Секованов. – 5-е издание, перераб. и доп. – М. : Книжный дом «ЛИБЕРКОМ», 2013. – 248 с.
13. Falconer K. Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications [Текст] / K. Falconer. – New York: John Wiley, 1990. – 367 p.
14. Фриш У. Турбулентность. Наследие Колмогорова [Текст] / У. Фриш. – М. : ФАЗИС, 1998. – 360 с.
15. Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы (миниатюры из бесконечного рая) [Текст] / М. Шредер. – Москва; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотичная динамика», 2001. – 528 с.

Bibliograficheskij spisok

1. Kolmogorov A. N. Izbrannye trudy. Matematika i mekhanika [Tekst] / A. N. Kolmogorov. – M. : Nauka, 1985. – 476 s.
2. Kronover R. M. Fraktaly i khaos v dinamicheskikh sistemakh [Tekst] / R. M. Kronover; per. s angl. pod red. T. EH. Krehnkelya. – M. : Postmarket, 2000. – 352 s.
3. Mandel'brot B. Fraktal'naya geometriya prirody [Tekst] / B. Mandel'brot. – M. : In-t komp'yuternykh issledovanij, 2002. – 656 s.

4. Mandel'brot, B. (Ne)poslushnye rynki: fraktal'naya revolyutsiya v finansakh [Tekst] / B.Mandel'brot, R. L. KHadson ; per. s angl. – M. : Izdatel'skij dom «Vil'yams», 2006. – 400 s.

5. Markushevich A. I. Vvedenie v teoriyu analiticheskikh funktsij [Tekst] / A. I. Markushevich, L. A. Markushevich. – M. : «Prosveshhenie», 1977. – 320 s.

6. Pajtgen KH.-O., Rikhter P. KH. Krasota fraktalov. Obrazy kompleksnykh dinamicheskikh sistem [Tekst]. – M. : Mir, 1993. – 176 s.

7. Peters EH. Fraktal'nyj analiz finansovykh rynkov. Primenenie teorii khaosa v investitsiyakh i ehkonomike. KHaos i poryadok na rynkakh kapitala [Tekst] / EH. Peters. – M. : Internet-trejding, 2004. – 304 s.

8. Sekovanov V. S. Metodicheskaya sistema formirovaniya kreativnosti studenta universiteta v protsesse obucheniya fraktal'noj geometrii [Tekst] / V. S. Sekovanov. – Kostroma: KGU im. N. A. Nekrasova, 2006. – 279 s.

9. Sekovanov V. S. O mnozhestvakh ZHyulia nekotorykh ratsional'nykh funktsij [Tekst] / V. S. Sekovanov. - Vestnik KGU im. N. A. Nekrasova. - T. 18. - №2. - 2013.

10. Sekovanov V. S. Formirovanie kreativnoj lichnosti studenta vuza pri obuchenii matematike na osnove novykh informatsionnykh tekhnologij [Tekst]. – Kostroma: KGU im. N. A. Nekrasova, 2004. – 231 s.

11. Sekovanov V. S. EHlementy teorii fraktal'nykh mnozhestv: uchebnoe posobie s grifom UMO dlya studentov klassicheskikh universitetov spetsial'nosti «Prikladnaya matematika i informatika» [Tekst] / V. S. Sekovanov. – Kostroma: KGU im. N. A. Nekrasova, 2005. – 135 s.

12. Sekovanov V. S. EHlementy teorii fraktal'nykh mnozhestv [Tekst]: uchebnoe posobie / V. S. Sekovanov. – 5-e izdanie, pererab. i dop. – M. : Knizhnyj dom «LIBERKOM», 2013. – 248 s.

13. Falconer K. Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications [Tekst] / K. Falconer. – New York: John Wiley, 1990. – 367 p.

14. Frish U. Turbulentnost'. Nasledie Kolmogorova [Tekst] / U. Frish. – M. : FAZIS, 1998. – 360 s.

15. SHreder M. Fraktaly, khaos, stepennye zakony (miniatyury iz beskonechnogo raya) [Tekst] / M. SHreder. – Moskva; Izhevsk: NITS «Regulyarnaya i khaotichnaya dinamika», 2001. – 528 s