УДК 371.32

С. Н. Кангина, А. В. Ястребов

Неформализуемые действия как характеристический признак исследовательской задачи

Важнейшей целью современного образования является воспитание ученика, который может учиться самостоятельно. Самостоятельные ученики эффективно планируют свое время и выполняют задания без напоминания. Они знают, как определить и эффективно использовать оптимальные ресурсы и средства. Они берут на себя риск самостоятельных действий и учатся на своих ошибках. Это особенно важно в XXI веке, когда производственные технологии быстро меняются, и человеку постоянно приходится учиться и переучиваться. Поэтому вопрос формирования универсальных учебных действий (УУД) у школьников становится приоритетным для учителя. Проводя анализ учебной деятельности, связанной с использованием исследовательских методов при решении задач, нами было отмечено, что учебная исследовательская деятельность способствует формированию весьма широкого спектра УУД. Связанно это с тем, что при решении исследовательских задач ребенок вынужден совершать не только алгоритмические действия, не только рассуждения по правилам формальной логики, но и так называемые неформализуемые действия, которые не укладываются в существующие классификации. На наш взгляд, именно неформализуемые действия являются основой для формирования УУД. В статье это положение демонстрируется на примерах из учебников Г. И. Дорофеева, Л. Г. Петерсон, а также на авторских примерах.

Ключевые слова: учебно-исследовательская задача, неформализуемое действие.

S. N. Kangina, A. V. Yastrebov

Non-Formalizable Actions as a Characteristic Sign of the Research Task

The most important purpose of modern education is education of the pupil who can study independently. Independent pupils effectively plan the time and perform tasks without reminder. They know how to define and effectively use optimum resources and means. They assume risk of independent actions and study on the mistakes. It is especially important in the XXI century when production technologies quickly change, and the person constantly should study and be retrained. Therefore the question of formation of the universal educational actions (UEA) at school students becomes priority for the teacher. Carrying out the analysis of the educational activity connected with use of research methods at the solution of tasks, we have noted that educational research activity promotes formation of a very wide range of UEA. It is connected with that at solution of research tasks the child is compelled to make not only algorithmic actions, not only reasonings by rules of formal logic, but also so-called non-formalizable actions which don't keep within existing classifications. In our opinion, non-formalizable actions are a basis for UEA formation. In the article this situation is shown on examples from G. I. Dorofeev, L. G. Peterson's textbooks, and also on the authors' examples.

Keywords: an educational and research task, a non-formalizable action.

1. Учебно-исследовательские задачи как средство формирования универсальных учебных действий

В Федеральном государственном образовательном стандарте общего образования отмечается, что «результаты общего образования должны быть прямо связаны с направлениями личностного развития и представлены в деятельностной форме» [8]. Анализ этих положений показывает, что учебная исследовательская деятельность учащихся в рамках урока математики позволяет решить поставленную задачу.

Цель данной статьи состоит в том, чтобы показать влияние учебно-исследовательской деятельности на формирование у ребенка умения совершать при решении задач *неформализуемые действия,* которые оказывают большое развивающее воздействие на личность ребенка.

Вопросом воспитания всесторонне развитой личности ребенка занимались многие дидакты, психологи и педагоги: М. С. Каган, И. Я. Лернер, П. М. Якобсон и другие. К примеру, И. Я. Лернер отождествляет понятия «всесторонне развитый человек» и «всестороннее воспитание» человека, отмечая, что «идеал всесторонне развитого человека нашего времени включает нравственное, умственное, трудовое, экономическое и физическое воспитание» [7]. Математическое образование в большей степени относительно других учебных дисциплин способствует личностному развитию ребенка. Связано это со спецификой изучаемого материала. При введении нового материала учитель знакомит учащихся с историей открытия понятия или теоремы. Нельзя обойти вниманием, например, драматическую судьбу нашего соотечественника Н.И. Лобачевского и его вклад в развитие неевклидовой геометрии. А знаменитая школа Пифагора, которой руководил «легендарный человек с легендарной жизнью и легендарным из нее уходом» [5]. Эти и многие другие примеры из жизни великих математиков способствуют становлению нравственных качеств ребенка. Усилия, которые прилагает школьник (независимо от его математических способностей) к изучению теории и решению задач, развивают его мышление и приучают к систематическому труду. Задачи прикладного характера помогают учителю формировать широкий спектр различных интересов учащихся.

Отметим, что само понятие «воспитание всесторонне развитой личности» вызывает неоднозначное отношение, поскольку «цель воспитания не может состоять в развитии личности, ибо процесс развития бесконечен» [1]. Следовательно, необходимо выделить такие характерные качества, которые может формировать и воспитывать учитель на уроке математики, а учащийся – впоследствии их развивать и совершенствовать. В. А. Гусев выделяет следующие качества, формируемые математическим образованием: системность, структурность, устойчивость, обобщенность и самостоятельность.

Эти качества развиваются в результате активной мыслительной деятельности учащихся при обучении математике, когда учитель на уроке систематически использует основные приемы мыслительной деятельности: анализ и синтез, сравнение, обобщение, абстрагирование и конкретизацию. Умения анализировать, систематизировать, сравнивать, обобщать, абстрагироваться и конкретизировать являются универсальными учебными действиями (УУД), которые приобретает ребенок за время обучения математике в школе, поскольку «факты улетучиваются, а развитие остается. Такова судьба значительной части выпускников школы» [6]. Эта мысль, высказанная А. И. Маркушевичем более 30 лет назад, отражает суть последних Образовательных стандартов общего образования.

Формировать УУД у школьников возможно лишь при активном включении учащихся в образовательный процесс, используя деятельностный подход в обучении. Естественно, что в рамках учебного предмета «математика» понятие деятельности ассоциируется с научной деятельностью или деятельностью близкой к ней, когда человек исследует проблему и пытается ее решить. Так же и учащийся, погружаясь в проблему, например, при изучении нового материала, может выходить из нее пассивно (слушает объяснения учителя) или действуя активно, используя различные приемы мыслительной деятельности. Поэтому не случайно, что группа преподавателей математических дисциплин отмечает необходимость введения исследовательских задач не только в практику вуза (например, А. А. Столяр, А. В. Ястребов), но и школы (Н. И. Зильберберг, Н. А. Меньшикова). Реализация этой идеи привела к тому, что в современных учебниках стали появляться исследовательские задачи.

Надо отметить, что часто исследовательская деятельность рассматривается как индивидуальная внеурочная работа с одним учеником или группой учащихся, интересующихся математикой, но не реализовавших себя в рамках олимпиадного движения. Осознавая всю значимость влияния исследовательской деятельности на всестороннее развитие ребенка, считаем необходимым приобщать к этому виду деятельности как можно больше школьников. Сделать это можно в рамках урока, вовлекая в процесс исследования проблемы учащихся всего класса. Организовать этот процесс можно лишь при наличии соответствующей учебной литературы.

Ряд учебников, входящих в федеральный перечень и рекомендованных к использованию в образовательных учреждениях, содержат в явном виде исследовательские задачи уже на ранних этапах обучения математике. Такое внимание к исследовательским задачам вызвано как раз тем, что процесс их решения формирует у учащихся широкий спектр УУД. При решении исследовательских задач обучение носит *личностно-ориентированый* характер, поскольку каждый ученик делает для себя маленькое математическое открытие и чувствует себя причастным к этому открытию. В начале работы над задачей учащийся ставит цель и планирует процесс ее реализации, что способствует формированию *регулятивных* УУД. В ходе работы над задачей учащийся формулирует проблему, анализирует и синтезирует полученные знания, устанавливает причинно-следственные связи, доказывает свои суждения, структурирует полученные знания. А это есть составляющие компоненты *познавательных* УУД. Умение вести диалог с одноклассниками и учителем способствует формированию *коммуникативных* УУД.

2. Исследовательские задачи в учебниках для основной школы как источник неформализуемых действий учащихся

Продемонстрируем формирование УУД на примере исследовательских задач, предложенных в учебниках Г. И. Дорофеева, Л. Г. Петерсон [2–4] при работе со всеми учащимися класса в рамках урока математики. В этих учебниках авторы фактически приводят три типа исследовательских задач. Прежде всего, в некоторых случаях задача явно объявляется математическим исследованием. Кроме того, часть задач содержит вопросы, благодаря которым дети проводят математический эксперимент, по результатам которого им предлагают выдвинуть гипотезу. Естественно, что она может служить предметом обсуждения в классе. Наконец, в учебнике есть серии задач, решения которых естественным образом приводят к обобщенному результату.

Выявим те неформализуемые действия, которые выполняет учащийся при решении учебно-исследовательских задач всех трех типов.

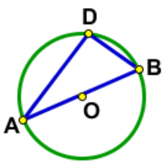
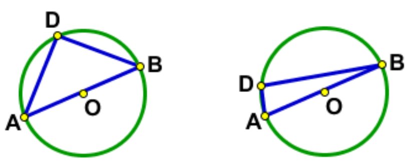
Задача 1 [3, № 91]. Математическое исследование.

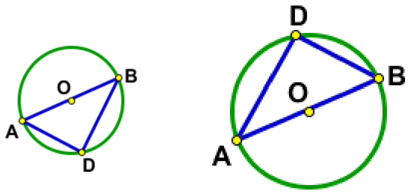
1) Начерти окружность радиусом 3 см и проведи ее диаметр. Соедини концы диаметра с произвольной точкой окружности и измерь угол, образованный хордами. Проведи те же самые построения и измерения еще для двух точек окружности. Что ты замечаешь?

2) Повтори эксперимент для окружности произвольного радиуса и сформулируй гипотезу. Можно ли считать ее доказанной на основании проведенных тобой измерений? Почему?

Работу над задачей будем проводить с помощью программы «1С: Математический конструктор», установленной на индивидуальные компьютеры учащихся. Все построения, действия и результат учащихся приведены в таблице 1. Отметим, что построенная система (окружность и точка *D* на окружности) является динамической. Учащийся может изменять положение точки *D*, перемещая ее по окружности, и преобразовывать окружность, используя растяжение, вследствие чего математический эксперимент становится наиболее интересным.

Таблица 1

№ п/п	Построения	Действия и результат учащегося
1	 $\angle ADB = 90^0$	Строит окружность радиусом 3 см; проводит диаметр; выбирает произвольно точку на окружности; соединяет концы диаметра с точкой на окружности; измеряет угол между хордами.
2	 $\angle ADB = 90^0$	Повторяет построения и измерение угла между хордами при другом выборе точек на окружности.
3	*Анализ, синтез, сравнение*: построили три различных треугольника, и углы в них «кажутся» различными, но измерения показывают, что угол, противолежащий диаметру, равен 90^0. *Обобщение (гипотеза)*: все углы для окружности радиуса 3 см, опирающиеся на диаметр, равны 90^0. *Возникают дополнительные вопросы*: а) Что произойдет с величиной угла, если построить другие диаметры в этой окружности? б) Чему будет равен угол, если выбранная точка совпадет с концами диаметра?	

4	 $\angle ADB = 90^0$	Строит окружности произвольного радиуса (больше и меньше 3 см); выбирает точку на окружности; измеряет угол между хордами.
5	*Абстрагирование (гипотеза)*: для любой окружности углы, опирающиеся на диаметр, равны 90^0. *Конкретизация (дополнительные вопросы)*: Как изменится угол, если радиус окружности увеличить в 2, в 3, в *n* раз?	

При работе над этой задачей у ребенка непроизвольно включаются все основные приемы мыслительной деятельности. При этом каждый ученик делает для себя маленькое математическое открытие, что способствует поддержанию интереса к изучению математики. «Интерес считают важнейшим побудителем любой деятельности» [1]. Математический эксперимент, благодаря которому ребенок вовлекается в исследовательскую деятельность по данной проблеме, пробуждает сначала любопытство, а затем и устойчивый интерес.

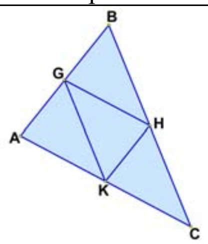
В этот момент становится актуальным вопрос: «Можно ли считать гипотезу о величине угла между хордами, опирающегося на диаметр, доказанной на основании проведенных тобой измерений? Почему?» При ответе на вопрос учащиеся дают отрицательный ответ. Согласно учебной программе, соответствующей данному учебнику, к середине пятого класса учащиеся понимают, что для доказательства утверждения необходимо привести серию аргументов. Задача авторов учебника, которые ставят вопрос о доказательстве, заключается в том, чтобы к началу изучения систематического курса геометрии школьник научился выявлять утверждения, требующие доказательства. Как показывает личный опыт авторов, при такой подготовке на начальных этапах изучения геометрии не более 10% учащихся делают ссылки на чертеж при доказательстве.

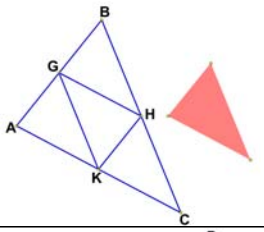
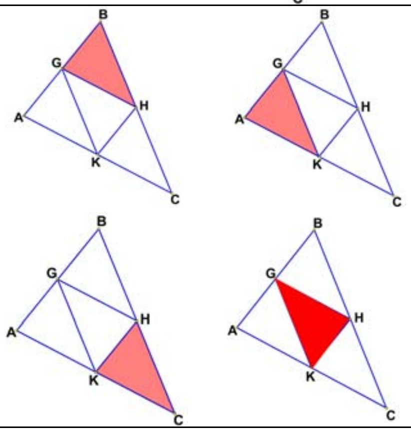
В результате решения поставленной исследовательской задачи ученик вынужден совершить несколько *неформализуемых действий:* проанализировать полученный материал, выдвинуть гипотезу и построить группу вопросов, позволяющих изучить проблему более широко. Именно такие действия учащихся при решении задачи, которые не являются стереотипными, алгоритмическими, характерны для исследовательских задач. Наличие в задаче условий, которые могут привести к неформализованным действиям, является характеристическим признаком исследовательской задачи. Именно неформализуемые действия побуждают ребенка к активной мыслительной деятельности, в результате которой у него формируются УУД, что в свою очередь способствует всестороннему развитию личности школьника.

Следующую задачу авторы не объявляют «математическим исследованием», но предлагают сформулировать гипотезу после проведения математического эксперимента. Выясним, какие неформализуемые действия совершает учащийся при решении этой задачи.

Задача 2 [4, № 91]. На сколько треугольников разбивают данный треугольник все его средние линии? Что можно сказать об образовавшихся треугольниках? Сформулируй *гипотезу* и проверь ее, разрезав модель треугольника по средним линиям. Можно ли на основании проведенного исследования считать твою гипотезу доказанной?

Таблица 2

№ п/п	Построения	Действия и результат учащегося
1	 	Строит разносторонний треугольник; проводит средние линии (использует функцию «Разделить отрезок пополам»).

2	*Анализ и синтез*: средние линии разбивают треугольник на четыре треугольника. *Абстрагирование (дополнительные вопросы)*: Любой ли треугольник можно разбить средними линиями на четыре треугольника?	
3		Строит треугольник-мерку (использует функцию «Внутренность треугольника»).
4		Выполняет наложение треугольника-мерки на треугольники, образованные средними линиями.
5	*Сравнение*: каждый из четырех треугольников, образованных средними линиями, совпадает с треугольником-меркой. *Обобщение (гипотеза)*: все треугольники, образованные средними линиями, между собой равны.	

Ресурсы программы «1С: Математический конструктор» предоставляют возможность проводить математический эксперимент, не прибегая к подручным материалам – бумаге и ножницам. Заложенная в программу функция «Деление отрезка пополам» помогает учащимся быстро и точно выполнить построение средних линий, что влечет за собой точность при наложении треугольника-мерки. Кроме того, эта функция дает возможность учащимся сосредоточиться не на построении средних линий, а заострить внимание на сравнении треугольников. Однако, программа содержит ряд недочетов, например, фигуру нельзя произвольно поворачивать. Для решения этой проблемы были задействованы ресурсы интерактивной доски ActivBoard. Использование различных программ помогает разнообразить деятельность учащихся при решении задачи, что увеличивает мотивацию учения.

Итак, при решении данной задачи учащийся не только совершает неформализуемые действия, которые способствуют формированию широкого спектра УУД, но также учится проводить математический эксперимент, используя различное программное обеспечение. Такой подход к обучению влияет на формирование информационной культуры учащихся.

Исследовательские задачи в учебниках Г. И. Дорофеева, Л. Г. Петерсон построены не только на геометрическом материале, но и на алгебраическом.

Задача 3 [2, № 625]. Переведите с русского языка на математический: сумма кубов n последовательных натуральных чисел равна квадрату их суммы. Проверь истинность данного высказывания для $n = 2,3,4,5,6$. Можно ли на основании проведенного исследования утверждать, что данное высказывание верно ***для всех*** натуральных n?

Составим формулу: $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + 3 + ... + n)^2$.

Таблица 3

n	1	2	3	4	5	6
n^3	1	8	27	64	125	216
$\sum_{i=1}^{n} i^3$	1	9	36	100	225	441

$\sum_{i=1}^{n} i$	1	3	6	10	15	21
$\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2$	1	9	36	10	225	441

Учащиеся сравнивают результаты, полученные в третьей и пятой строке «Таблицы 3» и делают вывод об истинности формулы для первых шести чисел.

Эту задачу также можно отнести к исследовательским, поскольку при ее решении учащиеся используют и анализ, и сравнение, и конкретизацию. Однако, вычислительные операции преобладают над логическими умозаключениями, поэтому задачу можно отнести к тем задачам, которые в большей степени способствуют развитию вычислительного навыка, а не мышления ребенка. Это одна из причин, из-за которой алгебраическую задачу бывает сложно объявить исследовательской.

При неоднократном использовании учебников Г. И. Дорофеева, Л. Г. Петерсон [2–3] как источника учебно-исследовательских задач обращает на себя внимание тот факт, что исследовательских задач по алгебре практически нет, а большинство исследований касается геометрического материала. Скорее всего, это связано со стереотипом мышления при построении курса арифметики и алгебры, необходимостью «выработки умений выполнять устно и письменно арифметические действия над числами, переводить практические задачи на язык математики». И в этом заключается другая причина малого количества учебно-исследовательских задач в учебниках и огромная доля задач, направленных исключительно на отработку вычислительного навыка учащегося.

Еще одна, чисто психологическая причина такого положения состоит в том, что учителю, использующему в своей практике алгоритмические задачи, готовиться к уроку сравнительно легко. Задачи исследовательского характера более трудоемки. Времени на подготовку, да и проведение самого урока, на котором учитель вовлекает учащихся в исследовательскую деятельность, требуется много. Вопрос о пользе и эффективности исследовательских задач остается бесспорным, а вот вопрос о соотношении алгоритмических и исследовательских задач учитель решает в рамках данного класса.

Сделанные выше наблюдения об исследовательских задачах и влиянии их на всестороннее развитие учащихся позволяют сформулировать две педагогические проблемы: 1) увеличить долю алгебраических исследовательских задач в общем числе тех исследовательских задач, которые предлагаются в учебниках [2-4]; 2) ввести исследовательские задачи на более ранних этапах изучения математики в 5 классе.

Для решения этих проблем необходимо построить банк исследовательских задач. Разумеется, количество задач в нем должно быть избыточно по отношению к потребностям реального учебного процесса. Другими словами, далеко не все из сконструированных задач следует решать. Для нас важно, чтобы у учителя появилась возможность систематически и целенаправленно вводить исследовательские задачи в процесс изучения математики, причем с самого начала 5 класса.

3. О построении банка учебно-исследовательских задач

Покажем, что данная программа реализуема. С этой целью приведем фрагмент авторской коллекции исследовательских задач. Приведенная серия задач связана с изучением темы «Нахождение наибольшего общего делителя (НОД) через разложения на простые множители». В результате решения задачи №4 учащиеся открывают новый способ нахождения НОД, отличный от метода перебора. В следующих задачах учащиеся получают рациональные способы вычисления НОД в частных случаях.

Задача 4. Математическое исследование.

1) Найди НОД чисел 12 и 18 методом перебора.

2) Разложи 12, 18 и НОД на простые множители. Подчеркни общие множители в разложении чисел 12 и 18. Найди произведение общих множителей, входящих в разложение одного из чисел. Что ты замечаешь?

3) Повтори эксперимент для пар чисел 20 и 24, 30 и 45 и сформулируй правило. Можно ли на основании проведенного исследования утверждать, что данное правило верно ***для любых*** пар натуральных чисел?

Решение:

Эксперимент 1	Эксперимент 2	Эксперимент 3
$Д(12) = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$ $Д(18) = \{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 9,\ 18\}$ $НОД(12,\ 18) = \{6\}$	$Д(20) = \{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 10,\ 20\}$ $Д(24) = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 24\}$ $НОД(20,\ 24) = \{4\}$	$Д(30) = \{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 10,\ 15,\ 30\}$ $Д(45) = \{1,\ 3,\ 5,\ 9,\ 15,\ 45\}$ $НОД(30,\ 45) = \{15\}$
$12 = \underline{2} \cdot 2 \cdot \underline{3}$ $18 = \underline{2} \cdot \underline{3} \cdot 3$ $6 = 2 \cdot 3$	$20 = \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot 5$ $24 = \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot 2 \cdot 3$ $4 = 2 \cdot 2$	$30 = 2 \cdot \underline{3} \cdot \underline{5}$ $45 = \underline{3} \cdot 3 \cdot \underline{5}$ $15 = 3 \cdot 5$
Произведение общих множителей: $2 \cdot 3 = 6$.	Произведение общих множителей: $2 \cdot 2 = 4$.	Произведение общих множителей: $3 \cdot 5 = 15$.

Анализ и синтез: все данные числа, включая НОД, раскладываются на простые множители.

Сравнение: общие множители данных чисел совпадают с простыми множителями, на которые разложено НОД.

Обобщение (гипотеза): НОД двух чисел, разложенных на простые множители, равен произведению общих простых множителей, входящих в разложение одного из чисел.

Конкретизация (дополнительные вопросы):

1) Всегда ли разложения двух составных чисел на простые множители содержат общие множители? Как в этом случае находить НОД?

2) Можно ли, используя полученное правило, найти НОД для двух чисел, из которых одно или оба являются простыми?

3) Можно ли, используя полученное правило, найти НОД для двух, трех и более натуральных чисел?

Абстрагирование: правило верно для любого количества составных натуральных чисел, в разложении которых на простые множители есть общие множители. Поскольку НОД – наибольшее натуральное число, на которое данные числа делятся без остатка, следовательно, в разложение каждого числа на простые множители входит разложение НОД. Простые множители, входящие в разложение НОД, являются общими множителями данных чисел. Если хотя бы одно из данных чисел является простым, то воспользоваться полученным правилом не представляется возможным, поскольку простое число разложить на простые множители нельзя.

Задача 5. Математическое исследование.

Найди НОД пар чисел 10 и 11, 14 и 15, 24 и 25. Как связаны числа в парах? Сформулируй гипотезу о нахождении НОД для этих пар чисел. Можно ли на основании проведенного исследования утверждать, что данная гипотеза верна ***для любых*** подобных пар натуральных чисел?

В результате решения и последующего анализа учащиеся приходят к выводу, что НОД двух последовательных натуральных чисел равен единице.

Задача 6. Математическое исследование.

Найди НОД пар чисел 7 и 11, 29 и 71, 13 и 53. Что ты замечаешь? Сформулируй гипотезу о нахождении НОД для этих пар чисел. Можно ли на основании проведенного исследования утверждать, что данная гипотеза верна ***для любых*** подобных пар натуральных чисел?

Учащиеся могут обобщить полученный результат для любых пар простых чисел, объясняя тем, что оба числа одновременно делятся только на единицу, поэтому НОД двух простых чисел равно одному.

Задача 7. Математическое исследование.

Найди НОД пар чисел 5 и 25, 14 и 84, 45 и 180. Как связаны числа в парах? Сформулируй гипотезу о нахождении НОД для этих пар чисел. Можно ли на основании проведенного исследования утверждать, что данная гипотеза верна ***для любых*** подобных пар натуральных чисел?

Искать НОД для данных пар чисел учащиеся могут как методом перебора, так и разложением чисел на простые множители. Но в обоих случаях школьники замечают, что либо одно число содержится в разложении другого, либо одно разложение содержится в другом. Из этого можно сделать вывод, что когда одно число делится на другое, то НОД этих чисел равен меньшему числу.

Библиографический список

1. Гусев, В.А. Теория и методика обучения математике: психолого-педагогические основы [Текст] / В. А. Гусев. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014.

2. Дорофеев, Г. В. Математика. 5 класс [Текст]: часть 2 / Г. В. Дорофеев, Л. Г. Петерсон. – М.: Ювента, 2013.

3. Дорофеев, Г. В. Математика. 6 класс [Текст]: часть 1 / Г. В. Дорофеев, Л. Г. Петерсон. – М.: Ювента, 2013.
4. Дорофеев, Г. В. Математика. 6 класс [Текст]: часть 2 / Г. В. Дорофеев, Л. Г. Петерсон. – М.: Ювента, 2013.
5. Клайн, М. Математика. Утрата определенности [Текст] / М. Клайн. - М.: РИМИС, 2007.
6. Маркушевич, А. И. Об очередных задачах преподавания математики в школе [Текст] / А. И. Маркушевич // На путях обновления школьного курса математики. – М.: Просвещение, 1978.
7. Теоретические основы содержания общего среднего образования [Текст] / под ред. В.В. Криевского, И.Я. Лернера. – М.: Педагогика, 1983.
8. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования [Электронный ресурс]: http://standart.edu.ru/attachment.aspx?id=370

Bibliograficheskij spisok

1. Gusev, V.A. Teoriya i metodika obucheniya matematike: psikhologo-pedagogicheskie osnovy [Tekst] / V. A. Gusev. – M.: BINOM. Laboratoriya znanij, 2014.
2. Dorofeev, G. V. Matematika. 5 klass [Tekst]: chast' 2 / G. V. Dorofeev, L. G. Peterson. – M.: YUven-ta, 2013.
3. Dorofeev, G. V. Matematika. 6 klass [Tekst]: chast' 1 / G. V. Dorofeev, L. G. Peterson. – M.: YUven-ta, 2013.
4. Dorofeev, G. V. Matematika. 6 klass [Tekst]: chast' 2 / G. V. Dorofeev, L. G. Peterson. – M.: YUven-ta, 2013.
5. Klajn, M. Matematika. Utrata opredelennosti [Tekst] / M. Klajn. - M.: RIMIS, 2007.
6. Markushevich, A. I. Ob ocherednykh zadachakh pre-podavaniya matematiki v shkole [Tekst] / A. I. Markushevich // Na putyakh obnovleniya shkol'nogo kursa matematiki. – M.: Prosveshhenie, 1978.
7. Teoreticheskie osnovy soderzhaniya obshhego srednego obrazovaniya [Tekst] / pod red. V.V. Krievskogo, I.YA. Lernera. – M.: Pedagogika, 1983.
8. Federal'nyj gosudarstvennyj obrazovatel'-nyj standart osnovnogo obshhego obrazovaniya [EHlektronnyj resurs]: http://standart.edu.ru/attachment.aspx?id=370