ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ И ВОСПИТАНИЯ

УДК 372.851+511.6

В. В. Афанасьев

Моему Учителю,
Профессору Лопшицу Абраму Мироновичу
посвящается

Геометрия на автобусных маршрутах

В работе предлагаются построения и рассмотрение свойств конечных геометрий на языке районов (точек) и автобусных маршрутов (прямых) с накладываемыми на них требованиями (аксиомами). С использованием матрицы инцидентности доказывается утверждение о соотношение числа маршрутов и районов.

Ключевые слова: геометрия, аксиомы, матрицы инцидентности, конечные проективные плоскости, табличные представления, поля Галуа, проективная плоскость над полями Галуа.

V. V. Afanasiev

Geometry on Bus Routes

In the work constructions and considerations of properties of final geometries in the language of areas (points) and bus routes (straight lines) with the requirements (axioms) imposed on them are offered. Using an incidence matrix, the statement about a ratio of the number of routes and areas is proved.

Keywords: Geometry, axioms, incidence matrixes, final projective planes, tabular representations, Galois's fields, the projective plane over Galois's fields.

1. Задача о районах и маршрутах

Автор вместе с читателями отправляется на экскурсию в один из городов, в котором, как обычно, имеется несколько районов $P_1, P_2, \dots, P_n$, соединенных автобусными маршрутами $m_1, m_2, \dots, m_l$. Причем мэрия этого города установила достаточно разумное правило.

Правило 1. Любые два района соединены одним и, в целях экономии, только одним автобусным маршрутом.

Узнав это, один из любознательных путешественников заинтересовался вопросом о возможной зависимости количества n районов и l маршрутов в таком городе. Рассмотрим вместе с ним несколько простых примеров.

Пример 1. В городе имеется единственный автобусный маршрут, который проходит через все районы. Это неудобно для жителей, особенно для достаточно больших городов, но возможно для автотранспортного чиновника.

Пример 2. Соединим, скажем, центральный район города своим маршрутом с каждым из остальных районов, которые находятся тоже на одном маршруте (рис. 1).

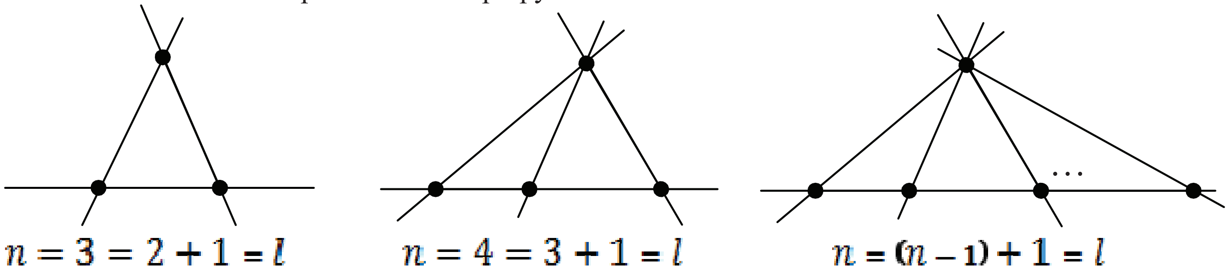

Рис. 1

Рассмотрев и другие способы прокладывания маршрутов в городе с учетом требования о прохождении единственного маршрута через любые два района, убеждаемся, что во всех случаях количество районов не больше количества маршрутов. Из этих частных случаев возможно предположить достоверность утверждения о том, что $n \le l$.

Утверждение 1. Доказать, что если в городе больше одного маршрута, то число маршрутов не меньше числа районов.

Доказательство. Для установления истинности неравенства $n \le l$ составим матрицу инцидентности $I = (a_{ij})$ из нулей и единиц, показывающую прохождение через район P_i маршрута m_j:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если район} P_i \text{ лежит на маршруте } m_j, \\ 0, \text{если район } P_i \text{ не лежит на маршруте } m_j. \end{cases}$$

Найдем произведение матрицы инцидентности *I* на транспонированную матрицу I^T, которая получается заменой в *I* строк на столбцы. Тогда в искомой матрице по диагонали будут располагаться числа $r_k (k = 1, 2, \dots, n)$, означающие число маршрутов, проходящих через район P_k, а на других местах матрицы – единицы, показывающие единственность маршрутов, проходящих через два различных района. Таким образом,

$$I \cdot I^T = \begin{pmatrix} r_1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & r_2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & r_3 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & r_n \end{pmatrix}.$$

Поскольку по условию в городе больше одного маршрута, то все $r_k > 1$.

Докажем методом математической индукции, что

$$\det(I \cdot I^T) = (r_1 - 1)(r_2 - 1)\dots(r_n - 1)\left[1 + \frac{1}{r_1 - 1} + \frac{1}{r_2 - 1} + \dots + \frac{1}{r_n - 1}\right].$$

Для $n = 2$

$$\det(I \cdot I^T) = \begin{vmatrix} r_1 & 1 \\ 1 & r_2 \end{vmatrix} = r_1 r_2 - 1 = (r_1 - 1)(r_2 - 1) + r_1 + r_2 - 2 =$$

$$= (r_1 - 1)(r_2 - 1) + (r_1 - 1) + (r_2 - 1) = (r_1 - 1)(r_2 - 1)\left[1 + \frac{1}{r_1 - 1} + \frac{1}{r_2 - 1}\right].$$

Предположим, что утверждение истинно для $n = k$.

Тогда для $n = k + 1$

$$\det(I \cdot I^T) = \begin{vmatrix} r_1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & r_2 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & r_k & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & r_{k+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r_1 & 1 & \dots & 1 & 1 - r_1 \\ 1 & r_2 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & r_k & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & r_{k+1} - 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+(k+1)}(1 - r_1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & r_2 - 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & r_3 - 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & r_k - 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{(k+1)+(k+1)} \cdot (r_{k+1} - 1)(r_1 - 1)(r_2 - 1)\cdots(r_k - 1)\left[1 + \frac{1}{r_1 - 1} + \frac{1}{r_2 - 1} + \dots + \frac{1}{r_k - 1}\right] =$$

$$= (-1)^{k+2} \cdot (1 - r_1)(-1)^{1+k} \cdot 1 \cdot (r_2 - 1)\cdots(r_k - 1)(r_{k+1} - 1) + (r_1 - 1)(r_2 - 1)\cdots(r_k - 1) \cdot$$

$$\cdot \left[1 + \frac{1}{r_1 - 1} + \frac{1}{r_2 - 1} + \dots + \frac{1}{r_k - 1}\right] =$$

$$= (r_1 - 1)(r_2 - 1)\cdots(r_k - 1)(r_{k+1} - 1) \cdot \left[1 + \frac{1}{r_1 - 1} + \frac{1}{r_2 - 1} + \dots + \frac{1}{r_k - 1} + \frac{1}{2_{k+1} - 1}\right],$$

что и требовалось доказать. Поскольку все $r_k > 1$, то $\det(I \cdot I^T) > 0$.

Далее предположим, что $l < m$, и построим новую матрицу I_1 размера $m \times m$, добавив $(m - l)$ столбцов из нулей к матрице *I*.
Тогда $I_1 \cdot I_1^T = I \cdot I^T$, но $0 = \det(I_1 \cdot I_1^T) = \det(I \cdot I^T) > 0$. Следовательно, предположение неверно, и получаем, что $l \geq m$ (число маршрутов не менее числа районов). Заметим, что число районов равняется числу маршрутов в двух случаях:

а) существует маршрут, на котором находятся все районы, кроме одного (см. пример 2);

б) множество районов (точек) и маршрутов (прямых) образуют конечную проективную плоскость. Этот случай, наиболее интересный для математиков, рассмотрим в следующем разделе.

2. Конечные проективные плоскости на автобусных маршрутах

Добавим к единственному требованию прокладывания маршрутов из предыдущего раздела еще одно условие и исключим неэффективный случай из примера 2.

Правило 2. Любые два маршрута обязательно пересекаются в одном из районов.

Предположим, что мы находимся в относительно небольшом городе, в котором один из маршрутов проходит ровно через три района. Используя эти два условия, получаем, что каждый маршрут проходит через три района и через каждый район проходят три маршрута, а всего в таком городе 7 районов (почти как в городе Ярославле) и 7 автобусных маршрутов (рис. 2).

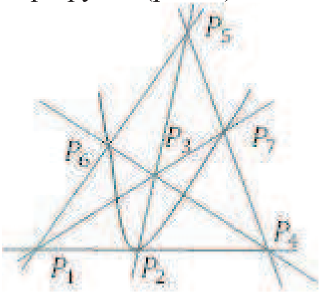

Рис. 2

Получили простейшую из конечных проективных плоскостей – плоскость Фано, которая состоит из семи (районов) точек $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7$ и семи прямых (маршрутов) $l_1 = \{P_1, P_2, P_4\}$, $l_2 = \{P_2, P_3, P_5\}$, $l_3 = \{P_3, P_4, P_6\}$, $l_4 = \{P_4, P_5, P_7\}$, $l_5 = \{P_5, P_6, P_1\}$, $l_6 = \{P_6, P_7, P_2\}$, $l_7 = \{P_7, P_1, P_3\}$. Районы можно пронумеровать числами (индексами названных районов) от 1 до 7, а расположение районов на маршрутах (но не их порядок) записать в столбцах таблицы:

Табл. 1

1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	1
4	5	6	7	1	2	3

По этой циклической таблице легко убедиться, что через любые два района проходит единственный маршрут и что любые два маршрута пересекаются в единственном районе.

Заметим, что плоскость Фано допускает и другую интерпретацию.

Пример 3. Хлебосольный хозяин, имеющий семь самых близких друзей, решил в каждый день недели принимать друзей так, чтобы любые два его друга встретились на неделе друг с другом один и только один раз. Возможно ли это? [3, с. 70].

Рассмотрим теперь город, в котором есть маршрут, проходящий через $(n+1)$ район, и в котором мэрия установила два правила для автобусных маршрутов:

1) через любые два района проходит один и только один маршрут;

2) любые два маршрута пересекаются в одном из районов.

Исключив из рассмотрения наличие в городе особенного района из примера 2, получаем следующие комбинаторные правила для этого города.

Утверждение 2. Каждый маршрут проходит через $(n+1)$ район, и через каждый район проходит ровно $(n+1)$ маршрут.

Доказательство. Поскольку существует маршрут, который проходит через $(n+1)$ район, то и через любой район, не лежащий на выбранном маршруте, проходят $(n+1)$ маршрутов, которые пересекают другой маршрут также в $(n+1)$ районе.

Утверждение 3. В таком городе располагается (n^2+n+1) районов, которые соединены таким же количеством (n^2+n+1) автобусных маршрутов.

Доказательство. В выбранном городе существует район и маршрут, который проходит через $(n+1)$ других районов. Следовательно, в таком городе имеется $(n+1) \cdot n + 1 = n^2 + n + 1$ районов. Поскольку через любые два района проходит единственный маршрут, который соединяет между собой $(n+1)$ район, то в городе всего проложено $C^2_{n^2+n+1} / C^2_{n+1} = n^2 + n + 1$ автобусных маршрутов.

Из этих двух утверждений следует определенная зависимость между количеством районов и маршрутов в городе, а также между количеством районов, через которые проходит один автобусный маршрут, и количеством маршрутов, проходящих через один район.

Возникает и вопрос о возможных значениях *n* для того, чтобы принятые условия (которые задают конечную проективную плоскость $P(2,n)$ порядка *n*) выполнялись.

Остается невыясненным вопрос: для каких значений *n* существует проективная плоскость $P(2,n)$. Доказано существование конечной проективной плоскости, порядок которой есть степень простого числа [4]. Доказано также [5] отсутствие проективных плоскостей $P(2,n)$ для широкого класса чисел: если *n* сравнимо с 1 или 2 по модулю 4, и если в разложении этого числа на простые множители встречается в нечетной степени хотя бы одно простое число, сравнимое с 3 по модулю 4, то $P(2,n)$ не существует; таковы, например, $n = 6, 14, 21, 22, ...$ Сравнительно недавно (1989 г.) был получен отрицательный ответ для $n = 10$ [7]. Вопрос относительно $n = 12, 15, 18, ...$ остается открытым.

Наиболее вероятным является предположение о том, что каждая конечная проективная плоскость имеет порядок, равный степени простого числа.

Проективная плоскость характеризуется своими подплоскостями, о которых известно, что если $P(2,m)$ является собственной под плоскостью конечной проективной плоскости $P(2,n)$, то $m^2 + m \leq n$ или $m^2 = n$ [6]. Характеристикой плоскости является порядок минимальной подплоскости, построенной для всех четырехвершинников. Существуют проективные плоскости, не имеющие характеристики, а все плоскости простого порядка имеют характеристики, совпадающие с его порядком.

3. Геометрии Галуа

Проективные плоскости $PG(2,n)$ над полями Галуа $GF(n)$ – наиболее изученные конечные плоскости.

Впервые термин «конечные геометрии» появился в начале XX века в статьях Гессенберга, в которых проективная геометрия строилась над полем Галуа $GF(p)$ вычетов по модулю простого числа *p*. Например, конечная арифметика $GF(3)$ состоит из символов 0, 1, 2, а операции сложения и умножения задаются следующими таблицами:

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Табл. 2.

×	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Табл. 3.

Пример 4. Найти координаты точек и уравнения прямых плоскости $PG(2,3)$.

Выпишем множество всех координатных троек, разбив его на классы:

$P_1 = \{(1,0,0);\ (2,0,0) = 2 \times (1,0,0)\};$
$P_2 = \{(0,1,0);\ (0,2,0)\}; P_3 = \{(0,0,1);\ (0,0,2)\};$
$P_4 = \{(1,1,0);\ (2,2,0)\}; P_5 = \{(1,0,1);\ (2,0,2)\};$
$P_6 = \{(0,1,1);\ (0,2,2)\}; P_7 = \{(1,1,1);\ (2,2,2)\};$
$P_8 = \{(2,1,0);\ (1,2,0) = 2 \times (2,1,0)\};$
$P_9 = \{(2,0,1);\ (1,0,2)\}; P_{10} = \{(0,2,1);\ (0,1,2)\};$
$P_{11} = \{(2,1,1);\ (1,2,2)\}; P_{12} = \{(1,2,1);\ (2,1,2)\};$
$P_{13} = \{(2,2,1);\ (1,1,2) = 2 \times (2,2,1)\}.$

Каждый класс состоит из двух троек (x_1, x_2, x_3) и $(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$ и задает одну точку $PG(2,3)$.

Аналогично однородными тройками $[a_1, a_2, a_3]$ задается и каждая прямая, а прохождение прямой через точки задается соотношением $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0.$

Так, на прямой лежат точки $P_4(1,1,0), P_6(0,1,1), P_9(2,0,1)$ и $P_{12}(1,2,1)$, так как $2 \times 1 + 2 + 2 \times 1 = 2 + 2 + 2 = 1 + 2 = 0.$

Таким образом, получаем все 13 прямых, на каждой из которых лежат по 4 точки.

В проективной плоскости Галуа $PG(2,n)$ справедливы теоремы Дезарга и Паппа. Имеет место и обратное утверждение: дезаргова конечная проективная плоскость порядка *n* изоморфна плоскости $PG(2,n)$ над полем Галуа $GF(n)$.

Отличительной особенностью дезарговой плоскости $PG(2,n)$ является то, что по теореме Зингера она обладает коллинеацией порядка $n^2 + n + 1$, циклической на точках и прямых (см.[6]). Этот результат дает возможность представить $PG(2,n)$ на евклидовой плоскости: точками конечной проективной плоскости $PG(2,n)$ являются вершины правильного $(n^2 + n + 1)$-угольника, вписанного в окружность, а прямыми – множество $(n + 1)$-вершинников, полученных вращением вокруг центра окружности одного, все длины сторон и диагоналей которого различны, на углы $\varphi_i = \frac{360^{\circ}}{n^2+n+1} \cdot i$, где $i = 1, 2, ..., n^2 + n$ (см. [4]). Например, $PG(2,3)$ допускает следующее представление, изображенное на рис. 3.

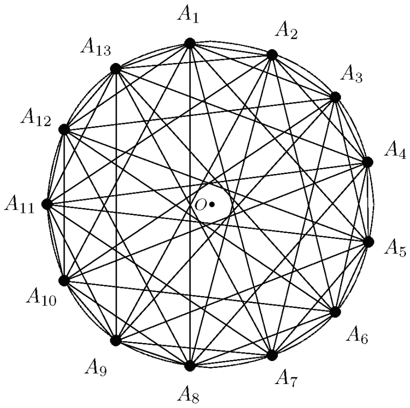

Рис. 3.

Здесь множество прямых $PG(2,3)$ – 13 четырехвершинников, полученных вращением $A_1A_2A_4A_{10}$ вокруг центра окружности на углы $\varphi_i = \frac{360^\circ}{13} \cdot i$, где $i = 1, 2, \ldots, 12$.

Индексы вершин полученного четырехвершинника могут быть ключом к построению, как и плоскости Фано, циклической таблицы:

Табл. 4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	1
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	1	2	3
10	11	12	13	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Легко представить плоскость $PG(2,3)$ в виде расписания автобусных маршрутов $l_1, l_2, \ldots, l_{13}$ и районов $A_1, A_2, \ldots, A_{13}$, через которые они проходят:

Табл. 5.

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}	A_{12}	A_{13}
l_1	*	*		*						*			
l_2		*	*		*						*		
l_3			*	*		*						*	
l_4				*	*		*						*
l_5	*				*	*		*					
l_6		*				*	*		*				
l_7			*				*	*		*			
l_8				*				*	*		*		
l_9					*				*	*		*	
l_{10}						*				*	*		*
l_{11}	*						*				*	*	
l_{12}		*						*				*	*
l_{13}	*		*						*				*

В 1943 году М. Холлом [5] был предложен алгебраический метод исследования проективных плоскостей. Он показал, что над каждым тернаром можно построить проективную плоскость и что задание в проективной плоскости упорядоченной четверки точек общего положения определяет тернар, координатизирующий данную плоскость.

Библиографический список

1. Афанасьев, В. В. Конечные геометрии [Текст] / В. В. Афанасьев // Современная математика. Фундаментальные направления. – М., 2007. – Т. 22. – С. 127–138.
2. Афанасьев, В. В. Проективная плоскость [Текст] / В. В. Афанасьев // Математическая энциклопедия. – М., 1984. – Т. 4. – С. 668–670.
3. Афанасьев, В. В. Конечные геометрии [Текст] / В. В. Афанасьев // Задачи по объединенному курсу геометрии. – Ярославль, 1992. – Ч. VI. – С. 65–87.
4. Картеси, Ф. Введение в конечные геометрии [Текст] / Ф. Картеси. – М., 1980. – 320 с.
5. Холл, М. Теория групп [Текст] / М. Холл. – М., 1962. – 467 с.
6. Dembowski, P. Finite geometries. – N.Y., 1968. – 375 p.
7. Lam,C.W.H., Thiel,L.H., Swiercz,S. The nonexistence of finite projective planes of order 10 // Canad. J. Math. – 1989. – 41. – P. 1117–1123.
8. Segre, B. Lectures on modern geometry. – Roma, 1961. – 479 p.

Bibliograficheskij spisok

1. Afanas'ev, V. V. Konechnye geometrii [Tekst] / V. V. Afanas'ev // Sovremennaja matematika. Fundamen-tal'nye napravlenija. – M., 2007. – T. 22. – S. 127–138.
2. Afanas'ev, V. V. Proektivnaja ploskost' [Tekst] / V. V. Afanas'ev // Matematicheskaja jenciklopedija. – M., 1984. – T. 4. – S. 668–670.
3. Afanas'ev, V. V. Konechnye geometrii [Tekst] / V. V. Afanas'ev // Zadachi po ob"edinennomu kursu geometrii. – Jaroslavl', 1992. – Ch. VI. – S. 65–87.
4. Kartesi, F. Vvedenie v konechnye geometrii [Tekst] / F. Kartesi. – M., 1980. – 320 s.
5. Holl, M. Teorija grupp [Tekst] / M. Holl. – M., 1962. – 467 s.
6. Dembowski, P. Finite geometries. – N.Y., 1968. – 375 p.
7. Lam, C.W.H., Thiel, L.H., Swiercz, S. The nonexistence of finite projective planes of order 10 // Canad. J. Math. – 1989. – 41. – P. 1117–1123.
8. Segre, B. Lectures on modern geometry. – Roma, 1961. – 479 p.