УДК 372.851+511.6

Г. Г. Хамов, Л. Н. Тимофеева

Использование теории многочленов для составления и решения диофантовых уравнений

Статья посвящена проблеме формирования содержания обучения в педагогическом вузе, при котором будущий учитель будет подготовлен к работе различного профиля, в том числе в классах с углубленным изучением предмета. В курсе математики классов с ее углубленным изучением важной является арифметическая линия, базирующаяся на целых и натуральных числах, которая включает в себя элементы теории диофантовых уравнений. В статье рассмотрены методы решения и составления диофантовых уравнений, использующие некоторые свойства многочленов, формулы разложения многочлена на множители. Приведены примеры решения и конструирования уравнений, содержащих взаимно простые многочлены. Метод разложения на множители применяется в решении заданий математических олимпиад. В работе показана возможность использования ряда формул, содержащих многочлены и их разложение на множители, в теории диофантовых уравнений. На конкретных примерах подробно описан процесс применения этих формул, как для решения, так и для составления уравнений.

Рассмотрены вопросы применения теории симметрических многочленов к исследованию диофантовых уравнений. Приведены примеры решения и составления уравнений с использованием формул, в которых некоторые симметрические многочлены выражены через элементарные симметрические многочлены.

Ключевые слова: диофантово уравнение, взаимно простые многочлены, разложение многочлена на множители, линейное уравнение, симметрический многочлен, основные симметрические многочлены.

G. G. Khamov, L. N. Timofeeva

Use of the Theory of Polynomials to Drawing up and Solve Diophantine Equations

The article is devoted to the problem of the formation of the content of training in the pedagogical higher education institution where a future teacher will be trained for the work of the various profile, including work in classes with profound studying of the subject. During Mathematics lessons in classes with its profound studying the arithmetic line which is based on the whole and natural numbers which includes the elements of the theory of the diophantine equations is important. In the article the methods of solution and drawing up the diophantine equations using some properties of polynomials, formulas of the decomposition of polynomials on multipliers are considered. The examples of the solution and designing of the equations containing mutually simple polynomials are given. The decomposition method on multipliers is applied in solution of problems of the mathematical competitions. The possibility to use a number of formulas containing polynomials and their decomposition on multipliers in the theory of the diophantine equations is shown in the article. The process of the use of these formulas, both for solution, and for drawing up the equations is in detail described with certain examples.

The questions of the use of the theory of symmetric polynomials to research the diophantine equations are considered. The examples of solution and drawing up the equations with the use of formulas where some symmetric polynomials are expressed through elementary symmetric polynomials are given.

Keywords: a diophantine equation, mutually simple polynomials, polynomial decomposition on multipliers, a linear equation, a symmetric polynomial, main symmetric polynomials.

Возможности использования диофантовых уравнений в контексте учебной математической деятельности студентов и их профессионального роста определяются тем, что теория диофантовых уравнений тесно связана с вузовским курсом теории чисел, ее элементы включены в программу классов с углубленным изучением математики и в задания единого государственного экзамена по математике. Для использования указанных возможностей достаточно к содержанию некоторых теоретико-числовых тем привлечь примеры, содержащие диофантовы уравнения, задачи, приводящие к решению таких уравнений, а также задачи на составление самих уравнений.

В современных условиях основным направлением совершенствования учебного процесса в средней школе и высших учебных заведениях является развитие активных методов обучения, которые позволяют не только глубже проникнуть в суть изучаемых фактов, но и повысить интерес к обучению вследствие личного участия в получении новых знаний [2–5]. Диофантовы уравнения являются одним из средств, способствующих развитию этого направления.

Имеется немало диофантовых уравнений, для решения и составления которых могут быть использованы некоторые свойства содержащихся в них многочленов.

Рассмотрим уравнение: $(2x^2+1)(y^3+330)=2014(3x^2+2)$. Многочлены $2x^2+1$, $3x^2+2$ взаимно просты. Это следует из равенства $3x^2+2=2(2x^2+1)-x^2$, так как любой общий целый делитель чисел вида $2x^2+1$ и $3x^2+2$ будет делителем числа x^2, то есть общим делителем чисел $2x^2+1$ и x^2, а, следовательно, делителем 1. Поэтому из уравнения следует, что числа вида $2x^2+1$ должны быть делителем числа 2014. Это возможно при $x=0$, $x=\pm3$. Подставляем в уравнение и находим решения: $x=\pm3$, $y=14$.

Примеры:

$(2x^2+1)(y^3+118)=2014x^3$. Ответ: $x=3$, $y=14$.

$(3x^2-1)(y^3+7)=2014x^{2015}$. Ответ: $x=1$, $y=10$.

Составление такого вида уравнений надо начинать с подбора двух взаимно простых многочленов, например, $4x^2+1$, x и коэффициента (берем число 2015). Искомое уравнение

$$(4x^2+1)f(y)=2015x \qquad (1)$$

$$f(y)=y^2+ay+b.$$

Так как число вида $4x^2+1$ является делителем числа 2015, то непосредственной проверкой находим возможные значения для переменной x: 0, ±1, ±4. Для составления разрешимого уравнения (1) выбираем одно из них, например, $x=4$. Тогда многочлен $f(y)=y^2+ay+b$ надо выбрать так, чтобы уравнение $y^2+ay+b-124=0$ имело целочисленный корень. Если взять, например, $a=6$, то число b должно быть таким, чтобы $133-b$ было полным квадратом, т. е. $t^2=133-b$. Ближайшие квадраты к числу 133 это $11^2=121$ и $12^2=144$; в первом случае $b=12$, во втором $b=-11$.

Получаем уравнения:

$(4x^2+1)(y^2+6y-11)=2015x$.

Ответ: $\{(4;9),(4;-15)\}$.

$(4x^4+1)(y^2+6y+12)=2015x^2$.

Ответ: $\{(2;8),(-2;8),(2;-14),(-2;-14)\}$.

Проверкой убеждаемся, что при других возможных значениях x целых решений составленные уравнения не имеют.

Выбираем взаимно простые многочлены $6x^2-1$ и x^n. Исследуем возможности составления уравнения вида $(6x^2-1)f(y)=2015x^n$.

Находим возможные значения x, при которых число $6x^2-1$ является делителем числа 2015: $x=0$, $x=\pm1$. Для составления уравнения выбираем $x=1$. Получим уравнение относительно переменной y: $f(y)=403$. Рассмотрим кубическое уравнение $ay^3+by^2+c=403$. Задаем корень этого уравнения $y=5$ и подбираем числа a, b, c, чтобы выполнялось равенство $125a+25b+c=403$.

Получили уравнение первой степени с тремя переменными a, b, c, которое решается с помощью сравнений. Одно из решений: $a=3$, $b=1$, $c=3$.

Легко установить, что уравнение $3y^3+y^2-400=0$, кроме $y=5$, других целых корней не имеет. Для этого достаточно разделить многочлен $3y^3+y^2-400$ на $y-5$ и получим квадратный трехчлен, не имеющий целочисленных корней. Получаем уравнения: $(6x^2-1)(3y^3+y^2+3)=2015x^n$, при n – четном (например, 2014) два решения: $(1;5)$, $(-1;5)$; при n – нечетном (например, 2015) одно решение: $(1;5)$.

Примеры:

$(x^2+4x+1)(y^2+4y-1)=2015x^2$.

Ответ: $\{(2;23),(2;-27)\}$.

$(x^2-5x+7)(y^2+6y+10)=2015(x-3)$.

Ответ: $\{(8;15),(8;-21)\}$.

При решении этого уравнения убеждаемся, что многочлены x^2-5x+7 и $x-3$ взаимно просты. Это следует из равенства $x^2-5x+7=(x-3)^2+(x-3)+1$.

$(3x^2-1)(y^3+7)=2014x^{2014}$.

Ответ: $\{(1;10),(-1;10)\}$.

$(2x^2+1)(y^3-118)=2014x^3$.

Ответ: $x=-3$, $y=-14$.

Один из методов решения диофантовых уравнений предполагает возможность разложения многочлена, содержащего все входящие в уравнение переменные, на множители, которые затем приравниваются возможным делителям числа, стоящего в другой части уравнения, и таким путем находят целые решения данного уравнения. Процесс составления таких уравнений осуществляется в обратном порядке. Например, берем формулу $(x-a)(y-b)=xy-bx-ay+ab$. Составляемое уравнение $xy-bx-ay=2015$. Числа a, b подбираем так, чтобы после разложения на множители получилось уравнение $(x-b)(y-a)=2$. Тогда $ab=-2013$. Один из вариантов $a=-183$, $b=11$:

$(x-11)(y+183)=2 \Leftrightarrow xy+183x-11y=2015$.

Множество решений: $\{(12;-181),(13;-182),(10;-185),(9;-184)\}$.

Заменим в полученном уравнении переменную x на x^2:

$x^2y+183x^2-11y=2015$.

Ответ: $\{(3;-184),(-3;-184)\}$.

Берем другой вариант: $a=671$, $b=-3$ и переменную y заменяем на y^3:

$xy^3-671y^3+3x=2015$.

Ответ: $x=672$, $y=-1$.

Рассмотрим процесс составления уравнения с использованием формулы:

$(ax+b)(cy+d)=e \Leftrightarrow acxy+adx+bcy=e-bd$.

Вначале задаем числа e и $e-bd$. Например, $e-bd=2015$, $e=1$, $bd=-2014$, $b=-19$, $d=106$. Получаем уравнение $(ax-19)(cy+106)=1$. Возможны два варианта:

$\begin{cases} ax=20 \\ cy=-105 \end{cases}$ или $\begin{cases} ax=18 \\ cy=-107 \end{cases}$,

то есть уравнение разрешимо, если a – делитель 20, c – делитель -105 или a – делитель 18, c – делитель -107. Например, при $a=5$, $c=7$ получаем уравнение: $35xy+530x-133y=2015$. Решение: $x=4$, $y=-15$.

Уравнение можно усложнить, заменив переменную x на x^2:

$35x^2y+530x^2-133y=2015$.

Решения: $(2;-15)$, $(-2;-15)$.

С помощью формулы $(x+ay)(x+by)=x^2+(a+b)xy+aby^2$ можно составить разрешимые уравнения вида

$x^2+(a+b)xy+aby^2=k$, (2)

для которых выбирается конкретное число k или ab. Например, при $k=2014$ получим $(x+ay)(x+by)=2014$, при этом

$\begin{cases} x+ay=m \\ x+by=n \end{cases}$, $m\cdot n=2014$.

Чтобы уравнение имело целые решения число $a-b$ должно быть делителем числа $m-n$. Один из возможных вариантов $m=106$, $n=19$, $a=31$, $b=2$. Получаем уравнение:

$x^2+33xy+62y^2=2014$.

Ответ: $\{(13;3),(-13;-3),(112;-3),(-112;3)\}$.

Если выбрать $m=53$, $n=38$, $a=8$, $b=-7$ и переменную y заменить на y^{1007}, то получим уравнение:

$x^2+xy^{1007}-56y^{2014}=2014$.

Ответ: $\{(45;1),(-46;1),(-45;-1),(46;-1)\}$.

В уравнении (2) выбираем число $ab=2015$, один из вариантов $a=65$, $b=31$. Тогда

$\begin{cases} x+65y=m \\ x+31y=n \end{cases}$, $m\cdot n=k$,

и $34y=m-n$, то есть $m-n$ должно делиться на 34. Один из вариантов: $m=37$, $n=3$, получаем уравнение:

$x^2+96xy+2015y^2=111$.

Ответ: $\{(-28;1),(28;-1),(68;-1),(-68;1)\}$.

Это же множество решений будут иметь уравнения:

$x^2+96xy^3+2015y^6=111$,

$x^2+96xy^{2015}+2015y^{4030}=111$.

Формулу

$(ax+by)(cx+dy)=acx^2+(ad+bc)xy+bdy^2$ используем для составления уравнения вида:

$acx^2+(ad+bc)xy+bdy^2=2015$ (3)

Один из вариантов:

$\begin{cases} ax+by=65 \\ cx+dy=31 \end{cases}$.

Числа a, c выбираем произвольно, например, $a=3$, $c=2$.

Из системы

$\begin{cases} 3x+by=65 \\ 2x+dy=31 \end{cases}$

получаем, что уравнение (3) может иметь решения, если число $2b-3d$ делит 37, то есть числа b, d можно выбрать среди решений линейного уравнения с двумя переменными $2b-3d=37$. Например, $b=5$, $d=-9$. Искомое уравнение

$6x^2-17xy-45y^2=2015$.

Ответ: $\{(20;1),(-20;-1)\}$.

Те же решения имеют уравнения

$$6x^2 - 17xy^3 - 45y^6 = 2015;$$

$$6x^2 - 17xy^{2015} - 45y^{4030} = 2015.$$

В формуле

$$(x-a)(y-b)(z-c) = xyz - ayz - bxz - cxy + abz + acy + bcx - abc$$

берем числа $a = 2$, $b = 19$, $c = 53$, произведение которых равно 2014. Составляем уравнение $xyz - 2yz - 19xz - 53xy + 38z + 106y + 1007x = 2015$, которое с помощью рассматриваемой формулы преобразуется к уравнению $(x-2)(y-19)(z-53) = 1$, множество решений которого $\{(3;20;54), (3;18;52), (1;20;52), (1;18;54)\}$.

Для решения и составления некоторых диофантовых уравнений, содержащих симметрические многочлены могут быть использованы формулы выражающие их через элементарные симметрические многочлены от переменных x, y, z: $\sigma_1 = x + y + z$, $\sigma_2 = xy + xz + yz$, $\sigma_3 = xyz$ (см. [1]):

$$x^2 + y^2 + z^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2,$$

$$x^3 + y^3 + z^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3,$$

$$x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2 = \sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3,$$

$$x^4 + y^4 + z^4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3,$$

$$x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 = \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3,$$

$$x^3y + xy^3 + x^3z + xz^3 + y^3z + yz^3 = \sigma_1^2\sigma_2 - 2\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_3.$$

$$x^3y^2 + x^2y^3 + x^3z^2 + x^2z^3 + y^3z^2 + y^2z^3 = \sigma_1\sigma_2^2 - 2\sigma_1^2\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3.$$

Формулу (2) можно использовать для составления и решения уравнений вида $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = n$.

Исходя из равенства (2) получим $\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = n$. Например, при $n = 4$: $\sigma_1(\sigma_1^2 - 3\sigma_2) = 4$. Приравнивая множители σ_1, $\sigma_1^2 - 3\sigma_2$ возможным делителямчисла 4, произведение которых равно 4, получим возможные значения для σ_1, σ_2:

$$\begin{cases}\sigma_1 = 1\\ \sigma_2 = -1\end{cases}, \begin{cases}\sigma_1 = -2\\ \sigma_2 = 2\end{cases}, \begin{cases}\sigma_1 = 4\\ \sigma_2 = 5\end{cases}$$

Используя формулу (1) получаем три уравнения: $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 6$, среди решений которых находятся решения уравнения $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 4$. Непосредственной проверкой находим решения: $(2;1;1)$, $(1;2;1)$, $(1;1;2)$. Аналогично исследуются уравнения при других значениях n. Например, при $n = 2$ целых решений уравнение не имеет.

Уравнение $x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2 + 3xyz = n$ составляется и исследуется с помощью равенства (3), из которого следует равносильное уравнение $\sigma_1\sigma_2 = n$. При $n = 2$, например, устанавливаем с помощью (1), что решения данного уравнения находятся среди решений уравнений:

$$x^2 + y^2 + z^2 = -3,\ x^2 + y^2 + z^2 = 2,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 5,\ x^2 + y^2 + z^2 = 6.$$

Непосредственной проверкой находим целые решения полученных уравнений и среди них выбираем те, которые удовлетворяют заданному уравнению: $(1;1;0)$, $(1;0;1)$, $(0;1;1)$, $(-2;1;0)$, $(1;-2;0)$, $(-2;0;1)$, $(1;0;-2)$, $(0;-2;1)$, $(0;1;-2)$, $(-2;-1;1)$, $(-2;1;-1)$, $(1;-2;-1)$, $(-1;-2;1)$, $(1;-1;-2)$, $(-1;1;-2)$.

С помощью формулы (4) уравнение $x^4 + y^4 + z^4 - 2(xy + xz + yz)^2 = n$ преобразуется к виду $\sigma_1(\sigma_1^3 - 4\sigma_1\sigma_2 + 4\sigma_3) = n$.

Рассмотрим случай при $n = 1$. Получаем две системы:

$$\begin{cases}\sigma_1 = 1\\ \sigma_1^3 - 4\sigma_1\sigma_2 + 4\sigma_3 = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sigma_1 = 1\\ \sigma_2 = \sigma_3\end{cases},$$

$$\begin{cases}\sigma_1 = -1\\ \sigma_1^3 - 4\sigma_1\sigma_2 + 4\sigma_3 = -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sigma_1 = -1\\ \sigma_2 = -\sigma_3\end{cases}.$$

Исследуем первую систему:

$$\begin{cases}x + y + z = 1\\ xy + xz + yz - xyz = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y + z = 1 - x\\ (x-1)(yz + x) = 0\end{cases}.$$

Если $x = 1$, то $y = -z$. Получаем множество решений вида $(1; -z; z)$, z – любое целое число.

Если $x \neq 1$, а $yz + x = 0$, то

$$\begin{cases}x \neq 1\\ yz = -x\\ x + y + z = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x \neq 1\\ x \neq 0\\ (1-z)(y-1) = 0\end{cases}.$$

Получаем возможные наборы решений при $x \neq 1$, $x \neq 0$: $(x;1;1)$, $(x;-x;1)$, $(x;1;-x)$. Проверкой убеждаемся, что $(x;1;1)$ – решение уравнения при $x = -1$, т. е. $(-1;1;1)$. Обобщая найденные решения, получим исходя из первой системы множество решений данного уравнения: $(1; t; -t)$, $(-t; 1; t)$, $(t; -t; 1)$, где $t \in \mathrm{Z}$.

Исследуя вторую систему, найдем все множество решений уравнения: $\{(t; -1; t), (-1; t; -t), (t; -t; -1), (1; t; -t), (-t; 1; t), (t; -t; 1)\}\ t \in \mathrm{Z}$.

Рассмотрим уравнение $(xy + xz + yz)^2 - x^2y^2 - x^2z^2 - y^2z^2 = n$. Левая часть уравнения есть симметрический многочлен, который в силу формулы (5) равен $2\sigma_1\sigma_3$, то есть $2\sigma_1\sigma_3 = n$. Отсюда видим, что при нечетных значениях n данное уравнение в целых числах неразрешимо.

При $n = 6$ получаем уравнение $\sigma_1\sigma_3 = 3$; множество решений:

$$\left\{\begin{matrix}(1; 1; 1), (-1; -1; -1), (3; -1; -1), (-1; 3; -1), \\ (-1; -1; 3), (-3; 1; 1), (1; -3; 1), (1; 1; -3)\end{matrix}\right\}.$$

Для решения и составления уравнения $x^3y + xy^3 + x^3z + xz^3 + y^3z + z^3y + (x + y + z)xyz = n$ применяем формулу (6), из которой следует, что $\sigma_2(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) = n$.

При $n = 2$ получаем, что $\sigma_1^2 - 2\sigma_2 = x^2 + y^2 + z^2$ может принимать значения равные 2; -2; 1; -1. Решения имеют уравнения $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, из которых выбираем решения данного уравнения для $n = 2$: $(1; 1; 0)$, $(1; 0; 1)$, $(0; 1; 1)$, $(-1; -1; 0)$, $(-1; 0; -1)$, $(0; -1; -1)$.

Уравнение

$$(x + y + z)(xy + xz + yz)^2 - x^3y^2 - x^2y^3 - x^3z^2 - z^3x^2 - y^3z^2 - z^3y^2 = n$$

Исследуется с помощью формулы (7). Получим уравнение $(\sigma_1^2 + \sigma_2)\sigma_3 = n$.

При $n = 1$ множество решений $\{(-1; -1; 1), (-1; 1; -1), (1; -1; -1)\}$.

Библиографический список

1. Болтянский, В. Г. Симметрия в алгебре [Текст] / В. Г. Болтянский, Н. Я. Виленкин. – М.: МЦНМО, 2002.–240 с.
2. Кучугурова, Н. Д. Промежуточный контроль знаний как средство стимулирования учебно-познавательной деятельности учащихся[Текст] / Н. Д. Кучугорова, З. Н. Багдуева // Наука и школа. – 2011. – № 3. – с. 77–82.
3. Латышева, Л. П. О фундировании математических умений при компетентностном подходе к обучению бакалавров педагогического образования [Текст] / Л. П. Латышева, Е. Л. Черемных // Ярославский педагогический вестник. Том II (Психолого-педагогические науки), 2012. – № 4. – С. 168–172.
4. Секованов, В. С. Использование информационных технологий и фракталов в образовании с целью формирования эстетических и культурных ценностей студентов [Текст] / В. С. Секованов, Н. Б. Тарасова, Ю. А. Хапкова // Педагогическая информатика.– 2012. – с. 46–52.
5. Смирнов, Е. И. Фундирование опыта в профессиональной подготовке и инновационной деятельности педагога[Текст]: монография / Е. И. Смирнов. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ им. К. Д. Ушинского, 2012. – 646 с.

Bibliograficheskij spisok

1. Boltjanskij, V. G. Simmetrija v algebre [Tekst] / V. G. Boltjanskij, N. Ja. Vilenkin. – M. : MCNMO, 2002. – 240 s.
2. Kuchugurova, N. D. Promezhutochnyj kontrol' znanij kak sredstvo stimulirovanija uchebno-poznavatel'noj dejatel'nosti uchashhihsja [Tekst] / N. D. Kuchugorova, Z. N. Bagdueva // Nauka i shkola. – 2011. – № 3. – s. 77–82.
3. Latysheva, L. P. O fundirovanii matematicheskih umenij pri kompetentnostnom podhode k obucheniju bakalavrov pedagogicheskogo obrazovanija [Tekst] / L. P. Latysheva, E. L. Cheremnyh // Jaroslavskij pedagogicheskij vestnik. Tom II (Psihologo-pedagogicheskie nauki), 2012. – № 4. – S. 168–172.
4. Sekovanov, V. S. Ispol'zovanie informacionnyh tehnologij i fraktalov v obrazovanii s cel'ju formirovanija jesteticheskih i kul'turnyh cennostej studentov [Tekst] / V. S. Sekovanov, N. B. Tarasova, Ju. A. Hapkova // Pedagogicheskaja informatika. – 2012. – s. 46–52.
5. Smirnov, E. I. Fundirovanie opyta v professional'noj podgotovke i innovacionnoj dejatel'nosti pedagoga [Tekst]: monografija / E. I. Smirnov. – Jaroslavl' : Izd-vo JaGPU im. K. D. Ushinskogo, 2012. – 646 s.