

**В. В. Чистяков, Е. И. Смирнов**

### **Об опыте использования продукта Maple 15 в учебном исследовании в области теории динамических систем**

Работа выполнена в рамках государственного задания РФ по проекту №97

В статье представлен дидактический материал для исследовательской студенческой деятельности области теории динамических систем с использованием программного продукта Maple 15. Исследуется как дифференциальное уравнение 2-го порядка реального процесса из негладкой механики движения с сухим трением либо его гомотопия. При этом правые части исследуемых уравнений были иррациональны или вообще разрывны, и они зависели от одного или нескольких параметров. Продукт позволял не только наглядно смоделировать решения исследуемых уравнений, изучить их эволюцию при изменении параметров, но и давал возможность качественно исследовать фазовые портреты и произвести их классификацию. Последние имели множественные причудливые формы, демонстрируя предельные циклы с самопересечениями, а также участки стохастического поведения. Наиболее экзотическими были здесь неоднократные бифуркации при сканировании по параметру, в результате которых несмещенное антипериодическое решение становилось смещенным периодическим с изменением периода в рациональное число раз. Выбранные динамические уравнения позволяют сформулировать широкий набор исследовательских задач для демонстрации и даже количественного изучения различных фактов соответствующей теории. Основным средством и механизмом формирования исследовательской деятельности студента в процессе обучения учебному предмету нами предлагается комплекс исследовательских профессионально-прикладных задач, реализуемый в специально организованной среде ресурсных занятий на фоне мотивов самоактуализации и ценностных ориентаций. Материал может быть использован в исследовательском сегменте образовательного процесса профессиональной подготовки студентов.

В статье представлен дидактический материал для исследовательской студенческой деятельности с использованием ИКТ (Maple 15) в области теории динамических систем. Предложенное дифференциальное уравнение взято из негладкой механики, и само по себе, и его гомотопия демонстрируют все известные свойства вышеозначенных систем. Материал может быть использован в исследовательском сегменте образовательного процесса вузов.

**Ключевые слова:** динамические системы, Maple, бифуркация, предельный цикл, изменение периода, исследовательская деятельность.

**V. V. Chistyakov, E. I. Smirnov**

### **About Experience in Use of the Maple 15 Product in the Educational Research in the Field of the Theory of Dynamic Systems**

Didactic material to research the student's activity in the field of the theory of dynamic systems with use of the Maple 15 software product is presented. It is investigated as the differential equation of the 2nd order of the real process of nonsmooth mechanics of the movement with dry friction or its homotopy. Thus the right parts of the studied equations were irrational or in general disconnected, and they depended on one or several parameters. The product allowed not only to simulate visually solutions of the studied equations, to study their evolution during change of parameters, but also gave a chance to study qualitatively phase portraits and to make their classification. The last had multiple fantastical forms, showing limit cycles with self-crossings, and also parts of stochastic behaviour. Numerous bifurcations were the most exotic while scanning in the parameter as a result of which not displaced anti-periodic solution became displaced periodic with change of the period in a rational number of times here. The chosen dynamic equations allow to formulate a wide set of research questions for demonstration and even quantitative study of various facts of the corresponding theory. The main means and the mechanism of formation of the research activity of the student in the course of training to the subject we offer a complex of research professionally – applied questions, realized in specially organized environment of resource lessons against the background of motives of self-updating and valuable orientations. The material can be used in the research segment of the educational process of students' professional training.

Didactic material to research the student's activity with use of ICT (Maple 15) in the field of the theory of dynamic systems is presented. The offered differential equation is taken from nonsmooth mechanics, and itself, and its homotopy show all known properties of the aforesaid systems. The material can be used in the research segment of the university educational process.

**Keywords:** dynamic systems, Maple, bifurcation, a limited cycle, a change of the period, a research activity.

Изучение дисциплин естественно-математического цикла в вузе обречено на повсеместное использование профессионального математического софта уже в недалеком будущем. Но

и сейчас в передовых российских учебных заведениях, таких как, например, Высшая школа экономики, практикум по алгебре, геометрии, математическому анализу и другим разделам математики осуществляется с использованием продуктов Maple, Statistica, Wolfram Mathematica и др.

Последние версии продукта Maple представляются наиболее подходящими для таких целей по причине его уникальной, длиной до 20-ти знаков арифметики (не случайно она используется в продукте MatLab) и простого интерфейсного языка, команды которого можно непосредственно брать в опции Help, меняя их наполнение.

Продукт незаменим в исследовательской деятельности в рамках студенческих математических проектов, в особенности касающихся понятий, явлений и фактов, не находящихся простого аналитического выражения, но только путем численной реализации, при том с громадным объемом вычислений.

Вышесказанное распространяется и на исследовательскую деятельность в рамках так называемой *теории динамических систем*, находящей все большее применение в качестве инструмента моделирования не только в естественно-научных, но и гуманитарных дисциплинах, таких как социодинамика, чаще называемая *эконофизикой* [1].

Побочным продуктом такой исследовательской деятельности является формирование у студентов опыта и хороших пользовательских навыков в прикладной математике, критического отношения к результатам численного моделирования, как выполненного самим, так и другими исследователями.

Пользователи Maple хорошо представлены на различных исследовательских форумах, публикуется богатая литература, что мотивирует студентов на изучение языков, поиск и взаимодействие в Интернете, другими словами – виртуальную социализацию и пр.

Настоящая работа посвящена численному изучению при помощи программного продукта Maple15 общих свойств динамических систем на примере уравнений 2-го порядка с иррациональной или разрывной правой частью, зависящей от одного или нескольких параметров.

**Исходный прототип.** В качестве такового послужил т.н. *астатичный ротатор* с неглавной осью вращения, т.е. твердое тело, насаженное на неподвижную ось с двумя опорами, проходящую через центр его масс  $C$ , но не являющуюся *осью свободного вращения* [2]. Например, это может быть однородный эллипсоид с просверленным через центр масс каналом (см. рис. 1).

При вращении из-за динамической неуравновешенности в вертикальных плоскостях возникают инерционные пары сил  $M_x$  и  $M_y$ , приводящие к поперечным силам реакции и, как следствие, к осевому моменту сил сухого трения  $M_{fr}$ , уменьшающим угловую скорость  $\omega = \dot{\varphi}$  наряду с квадратичным аэродинамическим сопротивлением.

Изучалось колебательное поведение ротатора под действием упругого возвращающего  $M_{el} = -\kappa\varphi$  и гармонического вынуждающего  $M(t) = A_0 \sin(\Omega t + \gamma)$  моментов.

$$\text{Динамическое уравнение выглядит как [3]} J_{zz}\ddot{\varphi} = -\alpha\sqrt{\dot{\varphi}^4 + \ddot{\varphi}^2} - c|\dot{\varphi}|\dot{\varphi} - \kappa\varphi + A_0 \sin(\Omega t + \gamma) \quad (1),$$

где  $J_{zz}, \alpha, c, \kappa$  — параметры инерции, сопротивления и упругости.

Разрешенное относительно старшей производной уравнение имеет иррациональный вид

$$\ddot{\varphi} = \frac{-J_{zz}(\kappa\varphi - A_0 \sin \Omega t) - \text{sign}(\dot{\varphi})\alpha\sqrt{-2\kappa A_0\varphi \sin \Omega t + A_0^2 \sin^2 \Omega t + \dot{\varphi}^4 (J_{zz}^2 - \alpha^2)} + \kappa^2\varphi^2}{J_{zz}^2 - \alpha^2} \quad (2).$$

$$J_{zz}^2 - \alpha^2 > 0$$

Примечательно, что при выполнении условия  $J_{zz} = \alpha = c$  иррациональность (2) исчезает, но появляется потенциальная разрывность из-за обращающегося в нуль знаменателя [4]

$$\ddot{\varphi} = \frac{2J|\dot{\varphi}|\dot{\varphi} \cdot A_0 \sin(\Omega t + \gamma) + 2\kappa\varphi A_0 \sin(\Omega t + \gamma) - 2\kappa\varphi \cdot J|\dot{\varphi}|\dot{\varphi} - \kappa^2\varphi^2 - A_0^2 \sin^2(\Omega t + \gamma)}{2J(\kappa\varphi + J|\dot{\varphi}|\dot{\varphi} - A_0 \sin(\Omega t + \gamma))} \quad (3).$$

Оба уравнения не интегрируются аналитически, но хорошо, хотя и не без проблем, решаются

численно, причем различные разностные схемы (*rk45, gear* и др.) дают совпадающие результаты.

Отличие правых частей проявляется в качественно различных угловых кинетиках, одна из которых характеризуется быстрым выходом на периодический режим с наличием изломов на кривой  $\omega(t)$ , другая же, наоборот, гладкостью, аperiodичностью, и сильной модуляцией амплитуды

колебаний. Вследствие этого в первом случае имеет место быстрый выход на «угловатый» предельный цикл в фазовой плоскости, тогда как во втором случае траектория, вероятно, заполняет всюду плотно эллипс с центром в начале координат (рис. 2, 3).

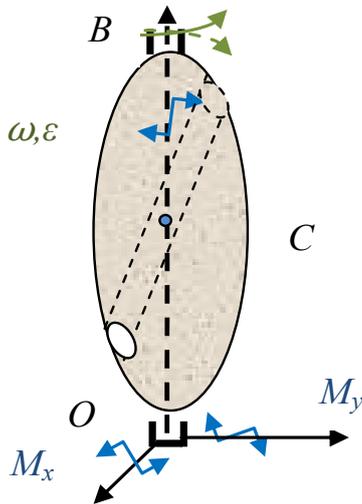


Рис. 1

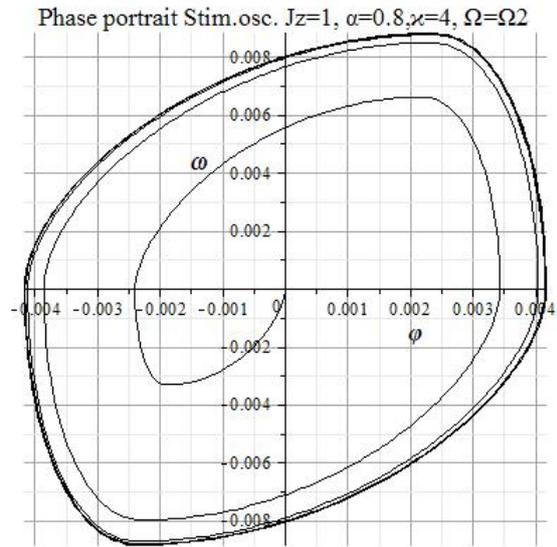


Рис. 2

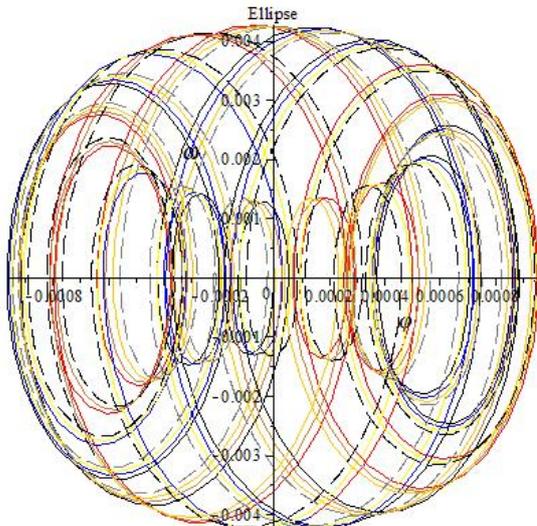


Рис. 3

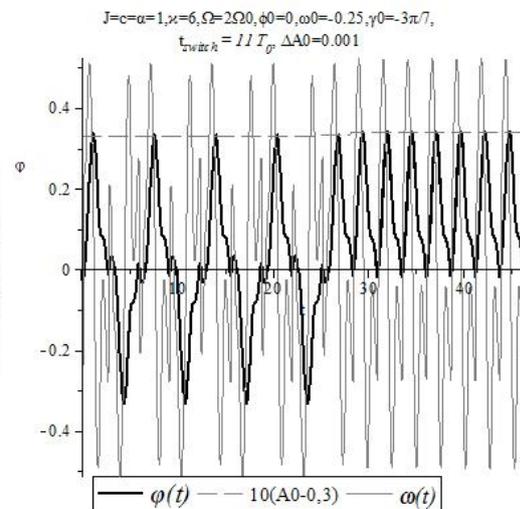


Рис. 4

Таким образом, влияние условия  $J_{zz} = \alpha = c$  на параметры динамики резко меняет картину кинетики, делая ее в значительной мере стохастической.

**Гомотопия прототипа.** Если слегка изменить числитель правой части (3) как

$$\ddot{\varphi} = \frac{2J|\dot{\varphi}|\dot{\varphi} \cdot A_0 \sin(\Omega t + \gamma) + 2\kappa\varphi A_0 \sin(\Omega t + \gamma) - 2\kappa\varphi \cdot J|\dot{\varphi}|\dot{\varphi} - \kappa^2\varphi^2 - \sin^2(\Omega t + \gamma)}{2J(\kappa\varphi + J|\dot{\varphi}|\dot{\varphi} - A_0 \sin(\Omega t + \gamma))} \quad (4),$$

убрав амплитудный множитель  $A_0^2$ , то решения  $\varphi(t)$  получающегося уже нефизического уравнения приобретают необычное поведение.

Прежде всего они приобретают свойства смещенности от нулевого положения при определенных значениях параметров (рис. 4).

Вместе с решениями качественно меняются и фазовые портреты, демонстрируя предельные циклы множественных причудливых форм и с самопересечениями (см. рис. 5, а-в).

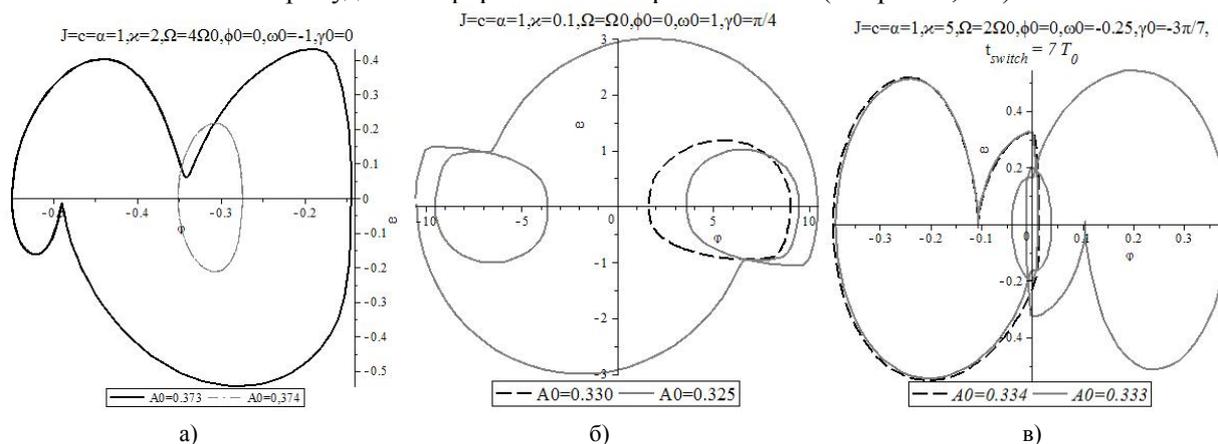


Рис. 5

Необычным моментом также представляется возможность реализации *частичных* предельных циклов, замыкание которых до полного «подпорчено» стохастической модуляционной компонентой (рис. 6).

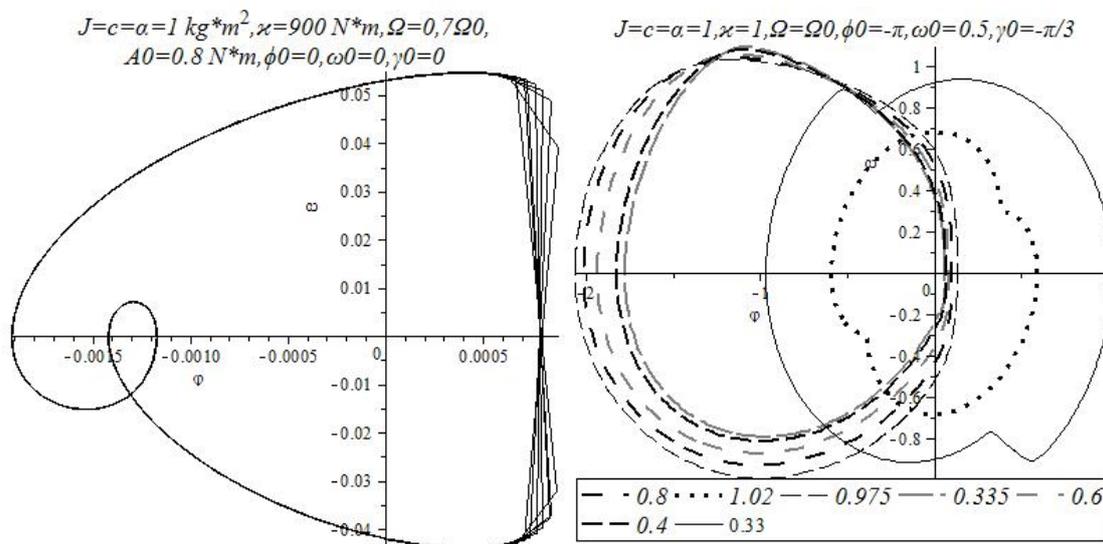


Рис. 6

Рис. 7

Изменение амплитудного параметра  $A_0$  от малых значений к большим приводит к множественным бифуркациям, неоднократно меняющим форму, размер и смещенность от начала координат предельного цикла (рис. 7). Из картины кинетики видно (см. рис. 4), как антипериодическое, а потому несмещенное решение всего лишь при микроскопическом изменении параметра  $\Delta A_0 = 0.001$  переходит в смещенное в верхнюю полуплоскость, но просто периодическое. В общем случае направление смещения зависит от начальной фазы  $\gamma$ .

Достоинно внимания бифуркационное уменьшение периода решения в целое либо рациональное ( $5/2$ ,  $3/2$ ) число раз, либо в частном слу-

чае его неизменность. Такого рода дискретность всегда представляет повышенный интерес, особенно для исследователей нелинейных колебательных систем и явления резонанса в них, а также тех, кто практикует симметричный и алгебраический подходы в изучении дифференциальных уравнений.

**Выводы.** Таким образом, предложенный авторами пример уравнения хорошо демонстрирует многие реальные свойства динамических систем: такие, как предельный цикл, стохастичность, бифуркации, изменение свойств периодичности решения и др. В связи с этим он может быть взят в качестве учебного для соответствующих курсов.

Реализация его не представляет проблем при использовании продукта Maple, с помощью которого может быть осуществлено и дальнейшее исследование динамического поведения с прицелом на обнаружение новых необычных явлений и особенностей. В любом случае поле для студенческой исследовательской деятельности лишь слегка распаханно, дело за последователями.

#### Библиографический список

1. Эконофизика и эволюционная экономика (Научная сессия Отделения физических наук Российской академии наук, 2 ноября 2010 г.) [Текст] // Успехи Физических Наук. – 2011. – Т. 181. – С. 753–786.
2. Маркеев, А.П. Теоретическая механика [Текст]: учебник для университетов / А.П. Маркеев. – Москва: ЧеРо, 1999. – 572 с.
3. Чистяков, В.В. О динамике вращения твердого тела вокруг неподвижной оси, проходящей через центр масс, при сухом трении в опорах [Текст] / В.В. Чистяков // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. – 2014. – № 22(2). – С. 3–16.
4. Чистяков, В.В. О частных случаях динамики вращения твердого тела вокруг неглавной центральной оси инерции при сухом трении в опорах [Текст] / В.В. Чистяков // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2014. – № 2. – С. 153–163.

#### Bibliograficheskij spisok

1. Jekonofizika i jevoljucionnaja jekonomika (Nauchnaja sessija Otdelenija fizicheskikh nauk Rossijskoj akademii nauk, 2 nojabrja 2010 g.) [Tekst] // Uspehi Fizicheskikh Nauk. – 2011. – T. 181. – S. 753–786.
2. Markeev, A.P. Teoreticheskaja mehanika [Tekst]: uchebnik dlja universitetov / A. P. Markeev. – Moskva: CheRo, 1999. – 572 s.
3. Chistjakov, V.V. O dinamike vrashhenija tverdogo tela vokrug nepodvizhnoj osi, prohodjashhej cherez centr mass, pri suhom trenii v oporah [Tekst] / V.V. Chistjakov // Izvestija vuzov. Prikladnaja nelinejnaja dinamika. – 2014. – № 22(2). – S. 3–16.
4. Chistjakov, V.V. O chastnyh sluchajah dinamiki vrashhenija tverdogo tela vokrug neglavnoj central'noj osi inercii pri suhom treniem v oporah [Tekst] / V.V. Chistjakov // Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mehanika. Komp'juternye nauki. – 2014. – № 2. – S. 153–163.