УДК 372.851+511.6

В. В. Афанасьев

Обычная, необычная геометрия

В статье рассматривается, с одной стороны, достаточно привычная геометрия (с параллельными прямыми), а с другой - необычность заключается в конечности в ней точек и прямых. Приводятся известные и новые модели таких геометрий, доказываются известные и непривычные их свойства.

Ключевые слова: конечные аффинные плоскости, модели плоскостей, плоскость над полем Галуа, циклические представления, собственные подплоскости, геометрия 9 точек, ортогональные латинские квадраты.

V. V. Afanasiev

Ordinary, Extraordinary Geometry

In the article, on the one hand, quite ordinary geometry (with parallel straight lines) is considered and, on the other hand, irregularity consists in finiteness of points and straight lines in it. Known and new models of such geometrys are given, known and unusual properties are proved.

Keywords: final affine planes, models of planes, the plane over Galois field, cyclic representations, own subplanes, Geometry of 9 points, orthogonal Latin squares.

В предыдущей работе автора [1] читатель имел возможность оказаться в городе, в котором были проложены автобусные маршруты, сначала по единственному правилу: любые два района соединены одним и только одним автобусным маршрутом (правило 1).

Рассматривая желательное для жителей условие о наличии в городе по крайней мере двух маршрутов (правило 2), доказали, что тогда количество маршрутов не меньше количества районов.

Затем к этим правилам добавили еще одно пожелание горожан: любые два маршрута пересекаются в одном районе.

Напомним, что эти три требования приводят к интерпретации конечных проективных плоскостей [2], которые являются удобным исходным материалом к построению других геометрий.

В этой работе сохраним два первых правила и заменим правило о пересечении любых двух маршрутов другим.

Правило 3. Через любой район, не лежащий на маршруте l, проходит единственный маршрут, не пересекающий маршрут l (аксиома параллельности).

Простейшими примерами организации маршрутов по указанным правилам дают два города с четырьмя или девятью районами. В них можно задать шесть и двенадцать автобусных маршрутов соответственно:

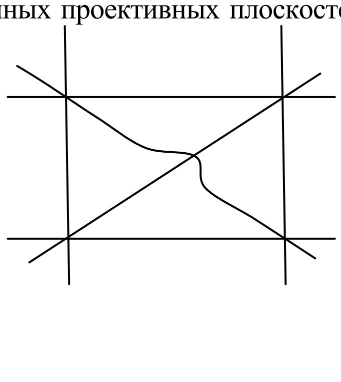

Рис. 1.

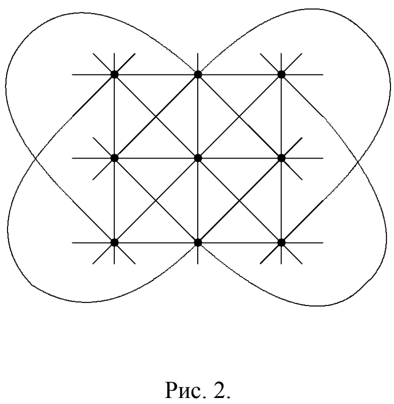

Рис. 2.

Знакомый с основами элементарной геометрии читатель заметит стремление автора рассказать на языке районов и автобусных маршрутов об обычной школьной геометрии. Существенным отличием в этом случае является достаточно очевидная конечность районов и маршрутов, а следовательно, точек и прямых в евклидовой плоскости, которая без введения метрики (расстояния) называется аффинной. В этом и заключается обычность и необычность рассматриваемой здесь геометрии. В школьных и вузовских математических курсах практически не рассматриваются конечные геометрии. Автор пытается восполнить этот пробел, тем более что плоскости с конечным числом точек и прямых являются удобным и наглядным материалом для иллюстрации многих геометрических конфигураций.

Если в модели проективной плоскости на автобусных маршрутах [1] удалить из города целиком один из маршрутов вместе с $(n+1)$ районами на нем (передав эти районы, как сейчас это модно обсуждать, в соседнюю область, например), то получим модель аффинной плоскости (с параллельностью) на автобусных маршрутах. Такой подход для построения других геометрий достаточно распространен и эффективен. Из комбинаторных соотношений конечной проективной плоскости $P(2,n)$ легко получаем.

Утверждение 1. В нашем городе имеется n^2 районов и n^2+n автобусных маршрутов, каждый из которых, с одной стороны, проходит через *n* районов, а с другой - через каждый район проходит $(n+1)$ маршрут.

В 1938 г. индийский математик Боуз установил соответствие между аффинными плоскостями порядка *n* и полным набором ортогональных латинских квадратов того же порядка.

Латинским квадратом *n*-го порядка называется такая квадратная матрица (таблица) из *n* элементов, где каждый из них встречается в точности один раз в каждой строке и в каждом столбце. Говорят, что два латинских квадрата ортогональны, если при наложении одного квадрата на другой каждая пара элементов встречается один и только один раз. Полным набором ортогональных латинских квадратов *n*-го порядка называется максимально возможное число $(n-1)$ попарно ортогональных латинских квадратов.

Утверждение 2. Для существования аффинной плоскости $A(2,n)$ порядка *n* необходимо и достаточно существование полного набора ортогональных латинских квадратов *n*-го порядка.

Необходимость. Пусть плоскость $A(2,n)$ существует, рассмотрим ее интерпретацию на автобусных маршрутах. Зафиксируем два класса непересекающихся маршрутов m_i и l_j $(i,j=1,2,...,n)$. Пронумеруем оставшиеся $(n-1)$ классов непересекающихся маршрутов числами $0,1,2,\dots,(n-1)$ и составим $(n-1)-y$ матрицу следующим образом:

$$A_1=\left(a_{ij}^1\right),\ A_2=\left(a_{ij}^2\right),\dots,\ A_{n-1}=\left(a_{ij}^{n-1}\right),$$

где a_{ij}^k – номер маршрута из *k*-го класса непересекающихся, проходящего через район пересечения маршрута m_i и маршрута l_j.

Поскольку через два района проходит единственный маршрут, то матрицы $A_1,A_2,\dots,A_{n-1}$ – латинские квадраты.

Докажем, что матрицы A_k и A_l ортогональны $(k\neq l,\ k,l=1,2,\dots,n-1)$. Предположим противное, то есть $(a_{i_1j_1}^k,a_{i_1j_1}^l)=(a_{i_2j_2}^k,a_{i_2j_2}^l)$. Отсюда $a_{i_1j_1}^k=a_{i_2j_2}^k,\ a_{i_1j_1}^l=a_{i_2j_2}^l$ и через два района на пересечении маршрутов $(m_{i_1}\cap l_{j_1})$ и $(m_{i_2}\cap l_{j_2})$ проходит маршрут, принадлежащий двум классам непересекающихся маршрутов, что невозможно.

Достаточность. Пусть $A_1,A_2,\dots,A_{n-1}$ – полный набор ортогональных латинских квадратов порядка *n*, заполненных элементами $0,1,\dots,n-1$.

Рассмотрим n^2 пар $(0,0),\ (0,1),\dots,(n-1,n-1)$, которые будем называть районами. "$x=a$"и "$y=b$" – два класса непересекающихся маршрутов, а остальные $(n-l)$ класс непересекающихся маршрутов определим через полный набор ортогональных латинских квадратов. Латинский квадрат A_k определяет, какие районы лежат на непересекающихся маршрутах. Поскольку $A_i,A_j\ (i\neq j)$ ортогональны, то через два различных района проходит единственный маршрут, а так как через каждый район проходит $(n+1)$ маршрут, то через район вне маршрута проходит единственный маршрут, не пересекающий данный маршрут.

Каждая плоскость характеризуется своими подплоскостями. У плоскости может существовать много подплоскостей, но для всех известных конечных аффинных плоскостей порядок m ее подплоскости не является делителем порядка плоскости только в случае $m = 2$.

Утверждение 3. Если аффинная плоскость порядка n содержит собственную подплоскость π_0 порядка m, то $m^2 - m \leq n \leq m^2$.

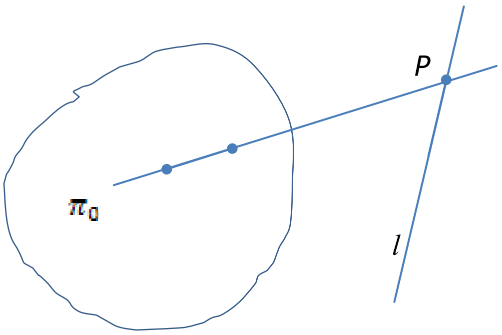

Рис. 3.

Доказательство. Рассмотрим точку P на продолжении прямой из подплоскости π_0, $(P \notin \pi_0)$, тогда оставшиеся n прямых плоскости, проходящих через P, могут пересекать подплоскость π_0 не более чем в одной точке (иначе $P \in \pi_0$). Следовательно, $n \geq m^2 - m$.

Предположим, что $n > m^2 - m$, тогда через P проходит прямая l, которая не пересекает подплоскость π_0. Следовательно, все m^2 прямые подплоскости π_0 (или их продолжения), не параллельные прямой l, пересекают ее не более чем в одной точке, то есть $m^2 \geq n$.

Таким образом доказали, что $m^2 - m \leq n \leq m^2$.

Отсюда следуют ограничения на порядок подплоскости конечной аффинной плоскости. Например, у аффинной плоскости порядка 4 не существует собственных подплоскостей порядка 3 (не выполняется соотношение $3^2 - 3 \leq 4 \leq 3^2$), но могут существовать подплоскости порядка два ($2^2 - 2 \leq 4 \leq 2^2$).

Наиболее изученными геометриями являются аффинные плоскости $AG(2, q)$ над полями Галуа $GF(q)$. Под точками $AG(2, q)$ понимают упорядоченные пары (x, y) элементов поля, а под прямыми – подмножества точек, которые удовлетворяют линейным уравнениям $ax + by + c = 0$ для некоторых $a, b, c \in GF(q)$ и $a^2 + b^2 \neq 0$ [3].

В следующем разделе покажем возможный подход к изучению конечных аффинных плоскостей на рассмотрении геометрии девяти точек. Небольшое количество точек и прямых такой плоскости позволяет перечислять рассматриваемые конфигурации.

Геометрия девяти точек

Пример 1. К космическому полету в трехместном корабле готовятся 9 космонавтов. Возможно ли проведение испытаний на психологическую совместимость так, чтобы каждый космонавт побывал в экипаже с любым другим и притом только один раз? Если это возможно, то сколько экипажей надо сформировать и в скольких испытаниях примет участие каждый космонавт?

Решение. Такая возможность показана на рис. 2. Надо сформировать 12 экипажей (прямых), каждый космонавт (точка) примет участие в четырех испытаниях.

Пример 2. Построить аффинную плоскость третьего порядка.

Решение. Удалим из проективной плоскости $P(2,3)$ произвольную прямую, например, $l_0 = \{P_0, P_1, P_3, P_9\}$. Оставшиеся 9 точек и 12 прямых образуют аффинную плоскость с тремя точками на каждой прямой, они представлены в следующей таблице инцидентности:

Таблица 1

1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4
2	3	4	5	6	7	8	1	5	6	7	8
4	5	6	7	8	1	2	3	0	0	0	0

Так же, как в обычной аффинной плоскости, точки можно представить как пары действительных чисел (x, y), а прямые задать уравнениями $y = kx + b$ или $x = a$ $(k, b, a \in \mathbb{R})$, так и в $A(2, 3)$ точки можно представить как пары чисел из $\mathbb{Z}_3$, а прямые задать теми же соотношениями с той лишь разницей, что в этом случае $(k, b, a \in \mathbb{Z}_3)$.

Итак, в $A(2,3)$ точки имеют следующие координаты: $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(2,0)$, $D(0,1)$, $E(0,1)$, $F(2,1)$, $G(0,2)$, $H(1,2)$, $K(2,2)$, а прямые задаются уравнениями:

$$\{A,D,G\}: x=0; \quad \{B,E,H\}: x=1; \quad \{C,F,K\}: x=2;$$
$$\{A,B,C\}: y=0; \quad \{D,E,F\}: y=1; \quad \{G,H,K\}: y=2;$$
$$\{A,E,K\}: y=x; \quad \{D,H,C\}: y=x+1; \quad \{F,B,G\}: y=x+2;$$
$$\{A,F,H\}: y=2x; \quad \{B,D,K\}: y=2x+1; \quad \{C,E,G\}: y=2x+2.$$

Пример 3. Модель аффинной плоскости $A(2,3)$ на обычной плоскости.

Решение. Продолжим построения предыдущего примера, дублируя полученные 9 «точек» циклично по вертикали (вверх, вниз) и по горизонтали (влево, вправо). Получили многократно продублированные девять первоначально выбранных «точек», которые соединим параллельными прямыми четырех типов (горизонтальные, вертикальные и диагональные относительно первоначального четырехугольника *ABED*).

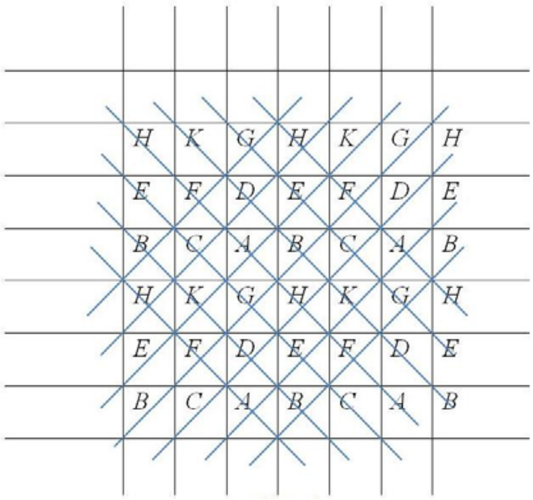

Рис. 4.

Пример 4. Модель аффинной плоскости порядка три на поле Галуа.

Решение. Поскольку x^2+1 единственный неприводимый над *GF*(3) многочлен второй степени, то назовем β его корнем, то есть $\beta^2+1=0$. Предположим, что *GF*(9) состоит из $0, 1, 2, \beta, \beta+1, \beta+2, 2\beta, 2\beta+1, 2\beta+2$ и $\beta^2=2$, $\beta(\beta+1)=2+\beta$, $(2\beta+2)^2=\beta^2+2\beta+1=2\beta$.

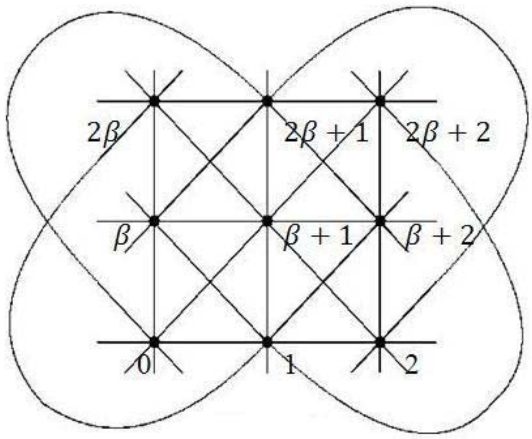

Рис. 5

Примем за точки $A(2,3)$ девять элементов поля Галуа *GF*(9), а за прямые – тройки его элементов, которые в сумме дают 0 (суммирование производится в поле Галуа *GF*(9). Таких прямых получили четыре класса параллельных, по три прямые в каждом:

$$0+1+2=\beta+(\beta+1)+(\beta+2)=2\beta+(2\beta+1)++(2\beta+2)=0;$$
$$0+\beta+2\beta=1+(\beta+1)+(2\beta+1)=2+(\beta+2)+(2\beta+2)=0;$$
$$0+(\beta+1)+(2\beta+2)=(\beta+2)+1+2\beta=\beta+(2\beta+1)+2=0;$$
$$2+(\beta+1)+2\beta=\beta+1+(2\beta+2)=(\beta+2)+(2\beta+1)+0=0.$$

Пример 5. Доказать, что все три «медианы» любого треугольника плоскости $A(2,3)$ параллельны.

Решение. Любые три точки *M*, *N*, *L*, не лежащие на одной прямой, будем называть треугольником (точнее, трехвершинником). «Серединой» отрезка *MN* назовем оставшуюся точку прямой, проходящей через точки *M* и *N*. Это можно хорошо проиллюстрировать, если «закольцевать» автобусные маршруты через три района (о чем говорилось в начале статьи).

В $A(2,3)$ существует 72 различных треугольника, и можно убедиться, что для каждого из них утверждение справедливо. Рассмотрим, например, треугольник *ACH*. В нем середина отрезка *AC* – оставшаяся точка прямой $\{A, B, C\}$, то есть точка *B*, середина *AH* – точка *P*, а середина *CH* – точка *D*, тогда «медианами» ΔACH являются прямые *AD*, *CF* и *HB*, которые параллельны. Однако рациональнее решить задачу координатным способом. Пусть $M(x_1,y_1)$, $N(x_2,y_2)$, $L(x_3,y_3)$, тогда можно показать, что середины L', N', M' отрезков *MN*, *ML*, *NL* соответственно, имеют, как и в обычной геометрии, следующие координаты:

$$L'\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right),\ N'\left(\frac{x_1+x_3}{2},\frac{y_1+y_3}{2}\right),$$

$$M'\left(\frac{x_2+x_3}{2},\frac{y_2+y_3}{2}\right).$$

Уравнение прямой, проходящей через две точки (x_1,y_1) и (x_2,y_2), находится, как и в обычной геометрии:

а) если $x_1 = x_2$, то $x = x_1 = x_2$;

б) если $x_1 \neq x_2$, то $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$.

Рассмотрим случай, когда первые координаты у вершин и середин противоположных сторон не совпадают (случай, отличный от рассмотренного выше). Найдем уравнения медиан треугольника MNL:

$$MM': y - y_1 = \frac{\dfrac{y_2+y_3}{2} - y_1}{\dfrac{x_2+x_3}{2} - x_1}(x - x_1),$$

$$y - y_1 = \frac{y_2+y_3+y_1}{x_2+x_3+x_1}(x - x_1);$$

$$NN': y - y_2 = \frac{y_1+y_3+y_2}{x_1+x_3+x_2}(x - x_2);$$

$$LL': y - y_3 = \frac{y_1+y_2+y_3}{x_1+x_2+x_3}(x - x_3).$$

Отсюда видно, что у всех трех прямых MM', NN' и LL' один и тот же угловой коэффициент $\frac{y_1+y_2+y_3}{x_1+x_2+x_3}$, а следовательно, $MM' \parallel NN' \parallel LL'$.

Когда первая координата одной из вершин треугольника совпадает с первой координатой середины противоположной стороны, тогда первые координаты оставшихся двух вершин треугольника совпадают соответственно с первыми координатами двух соответствующих середин противоположных сторон. В этом случае медианами треугольника являются прямые $\{A, D, G\}$, $\{B, E, H\}$, $\{C, F, K\}$, которые тоже параллельны.

Библиографический список

1. Афанасьев, В.В. Геометрия на автобусных маршрутах [Текст] / В. В. Афанасьев // Ярославский педагогический вестник. – 2014. – № 4. – Т. II (Психолого-педагогические науки). – С. 31–35.
2. Афанасьев, В.В. Конечные геометрии [Текст] / В. В. Афанасьев // Современная математика. Фундаментальные направления. – М., 2007. – Т. 22. – С. 127–138.
3. Картеси, Ф. Введение в конечные геометрии [Текст] / Ф. Картеси. – М., 1980. – 320 с.
4. Яглом, И. М. Математические структуры и математическое моделирование [Текст] / И. М. Яглом. – М.: Советское радио, 1980. – 144 с.
5. Dembowski, P. Finite geometries [Текст] / P. Dembowski. – N.Y., 1968. – 375 p.
6. Segre, B. Lectures on modern geometry [Текст] / B. Segre. – Roma, 1961. – 479 p.

Bibliograficheskij spisok

1. Afanas'ev, V. V. Geometrija na avtobusnyh marshrutah [Tekst] / V. V. Afanas'ev // Jaroslavskij pedagogicheskij vestnik. – 2014. – № 4. – T. II (Psihologo-pedagogicheskie nauki). – S. 31–35.
2. Afanas'ev, V. V. Konechnye geometrii [Tekst] / V. V. Afanas'ev // Sovremennaja matema-tika. Fundamental'nye napravlenija. – M., 2007. – T. 22. – S. 127–138.
3. Kartesi, F. Vvedenie v konechnye geometrii [Tekst] / F. Kartesi. – M., 1980. – 320 s.
4. Jaglom, I. M. Matematicheskie struktury i matematicheskoe modelirovanie [Tekst] / I. M. Jaglom. – M.: Sovetskoe radio, 1980. – 144 s.
5. Dembowski, P. Finite geometries [Tekst] / P. Dembowski. – N.Y., 1968. – 375 p.
6. Segre, B. Lectures on modern geometry [Tekst] / B. Segre. – Roma, 1961. – 479 p.