УДК 372.851

В. А. Тестов

Формирование основных математических понятий у школьников на основе концепции фундирования

В статье рассматриваются особенности формирования у школьников и студентов основных математических понятий в свете повышения их мотивации и более глубокого понимания материала. Решающим фактором может стать использование в обучении концепции фундирования. Эта концепция позволяет реализовать принцип доступности обучения в форме поэтапности процесса формирования понятий об основных математических структурах. Использование концепции фундирования в статье прослеживается на примере формирования у школьников и студентов понятия скалярной величины. Поскольку любое числовое множество (подмножество в R) является линейно упорядоченным, то число – это частный случай величины. Это позволяет обеспечить единство в изучении различных видов действительного числа и в дальнейшем вводить все виды действительного числа как некоторые величины. Многолетний опыт работы ряда школ по программе Д. Б. Эльконина – В. В. Давыдова показывает доступность такого понимания величины для 6–7-летних учащихся.

Ключевые слова: математические структуры, поэтапность процесса формирования понятий, фундирование, скалярная величина.

V. A. Testov

Formation of Schoolchildren's Basic Mathematical Notions on the Basis of the Funding Concept

In the article features of formation of schoolchildren and students' basic mathematical notions in the light of the increase of motivation of pupils and deeper understanding of materials are considered. Use in training of the concept of funding can become a decisive factor. This notion allows realizing the principle of availability of training in the form of phasing of the process of formation of notions about the main mathematical structures. Use of the funding concept is traced in the article on the example of formation of schoolchildren and students' understanding of the scalar size. As any numerical set (a subset in R) is linearly ordered, the number is a special case of the size. It allows providing the unity in studying different types of a real number and to enter all types of a real number as some sizes. Long-term experience of a number of schools according to the programme of D. B. Elkonin – V. V. Davydov shows availability of such understanding of the size for 6–7-year-old pupils.

Keywords: mathematical structures, phasing of the process of notions formation, funding, scalar quantity.

В настоящее время в математическом образовании основной проблемой является низкая учебная мотивация школьников, что связано, прежде всего, с тем, что в процессе изучения математики не достигается понимание основных математических понятий. У учащихся наблюдается формализм математических знаний, их недостаточная действенность; недостаточный уровень математической культуры и математического мышления. Во многих случаях изучаемый конкретный материал не складывается в систему знаний; математический багаж значительной части выпускников средних школ состоит из большего или меньшего числа слабо связанных между собой догматически усвоенных сведений.

Преодолеть разобщенность различных математических дисциплин, изолированность отдельных тем и разделов, обеспечить целостность и единство в обучении математике возможно лишь на основе выделения в ней наиболее существенных элементов, основных стержней (генерализация знаний). Такими стержнями в математике, как отмечали А. Н. Колмогоров и другие крупнейшие ученые, являются математические структуры, которые подразделяются, согласно Н. Бурбаки, на алгебраические, порядковые и топологические. Но, как показывает опыт, изучение основных математических структур при традиционном изложении с трудом дается и школьникам, и студентам. Такие обобщающие и объединяющие понятия, как функция, группа, величина, число, могут появляться в обучении не как исходные пункты, а как итоги изучения, подводимые по мере накопления фактов и закономерностей, дающих повод к соответствующим обобщениям.

В процессе обучения количественные изменения в мышлении и в других личностных качествах учащихся происходят постоянно, а качественные – скачкообразно, в определенные периоды, поэтому выделение фаз, ступеней развития является необходимым условием правильного подхода к отбору содержания обучения, построения его по принципу «спирали». Весь опыт обучения математике показывает существенные преимущества спиральной структуры знаний, когда материал располагается в виде развертывающейся спирали, причем каждый ее виток (цикл) образует внутренне целостную тему.

Ступени в таком последовательно повышаемом содержательном познании, соотнесенные с уровнями восприятия учебной информации, в дидактике обычно называются уровнями обучения или уровнями усвоения. Разными авторами (В. П. Беспалько, И. Я. Лернер, М. Н. Скаткин и др.) предложено рассматривать различные такие уровни.

По мнению С. И. Архангельского, более правильно говорить не об уровнях обучения, а о некоторых ступенях интеллектуального уровня учащихся в процессе обучения, уровнях научного познания. Конструктивно эти уровни скорее могут быть представлены спиральными связными ступенями, чем разорванными параллельными ступенями. Подчинение и связь этих уровней характеризуется мерой последовательного продвижения в приобретении знаний и в оперировании более высокими формами и инструментом научного познания.

Среди математиков-педагогов также широко распространено мнение о необходимости выделять последовательные ступени в формировании понятий о математических структурах. Так, говоря о преподавании математики, французский математик Г. Шоке отмечал, что необходимо идти от одного уровня мышления к другому. Задача преподавани – помогать ребенку постоянно реконструировать свой умственный мир посредством переходов от одного уровня мышления к другому. Ф. Клейн в своих лекциях для учителей также отмечал необходимость предварительных этапов в изучении основных математических понятий.

По мнению А. Н. Колмогорова, обучение математике должно состоять из нескольких ступеней, что он обосновывал тяготением психологических установок учащихся к дискретности и тем, что «естественный порядок наращивания знаний и умений всегда имеет характер «развития по спирали». Принцип «линейного» построения многолетнего курса, в частности математики, по его мнению, лишен ясного содержания. Однако логика науки не требует, чтобы «спираль» обязательно разбивалась на отдельные «витки» [2].

В соответствии с этим взглядом процесс обучения следует рассматривать как многоуровневую систему с обязательной опорой на нижележащие, более конкретные уровни научного познания. Без такой опоры обучение может стать формальным, дающим знание без понимания.

Ступени в изучении математики должны соотноситься со ступенями (уровнями) развития мышления, о чем писал еще Жан Пиаже. Детально вопрос о различных уровнях мышления при изучении математики был рассмотрен А. А. Столяром, который выделил несколько уровней мышления. Эти уровни охватывают весь период изучения математики, начиная с 1 класса. Хотя переход от одного уровня к следующему происходит не скачкообразно, а постепенно, необходимо, по мнению А. А. Столяра, четко различать эти уровни. Основываясь на этих работах, автор выделил пять уровней сформированности внутренних структур мышления [5].

Развитием идеи спиралевидного построения содержания обучения математике явилась концепция фундирования, разработанная Е. И. Смирновым на основе идей академика В. Д. Щадрикова. Помимо поэтапности формирования знаний, эта концепция включает и принцип генерализации знаний, выделения существенных, узловых моментов. Важно, что в условиях современной компетентностной парадигмы концепция фундирования затрагивает не только построение содержания обучения, но и формирование опыта и личностных качеств учащегося. Она предполагает развертывание в процессе предметной подготовки таких компонентов, как определение, анализ и механизмы реализации обобщенного содержания уровней базовых школьных учебных элементов и видов деятельности (знания, умения, навыки, математические методы, идеи, алгоритмы и процедуры, содержательные линии, характеристики личностного опыта); определение, анализ и механизмы реализации содержания уровней и этапов развертывания базовых учебных элементов и видов деятельности в направлении применения их на практике.

На основе этой концепции появляется возможность углубить теоретическую и практическую составляющие математического образования. Начиная с ранних этапов обучения через послойное фундирование в разных теоретических дисциплинах объем, содержание и структура предметной подготовки должны претерпеть значительные изменения в направлении теоретического обобщения школьного знания и дальнейшей практической реализации. Школьные знания выступают структурообразующим фактором, позволяющим отобрать теоретические знания из предметной области более высокого уровня [3].

В качестве примера использования концепции фундирования рассмотрим процесс формирования в обучении понятия величины. Исторически положительные скалярные величины как обобщение понятий *длина, площадь, объем, масса, температура* и т. д. стали использоваться в числе первых. По мнению видного американского математика Г. Биркгоффа, идея величины является более глубокой и более важной, чем понятия и логика арифметики [1]. Это понятие, безусловно, может быть отнесено к числу ведущих, стержневых в курсе математики.

Величины являются составной частью содержания не только математики, но и физики, астрономии, химии и других наук. В первом приближении величины – это такие свойства объектов, которые можно сопоставлять, сравнивать для разных объектов одного и того же рода. Известный французский математик Жан Дарбу предпочитал основываться на следующем старом определении Л. Эйлера: «Величина есть все то, что способно увеличиваться или уменьшаться». К такому определению величины другие математики (например, А. Лебег) относились критически из-за его чрезмерной широты.

В разные исторические периоды развития математики понятие величины трактовалось по-разному. В начальный период люди сравнивали различные предметы по величине, не измеряя их и не пользуясь числовым выражением. Свойства величины были отчетливо сформулированы в «Началах» Евклида. С середины XIX в., когда первостепенное значение приобрели проблемы оснований математики, встала, в частности, проблема строгого определения понятия величины (скалярной или векторной), в связи с чем было выработано несколько подходов [6].

Большое значение изучению понятия величины в школьном курсе математики придавали как ученые-математики (А. Н. Колмогоров, Н. Я. Виленкин и др.), так и психологи (В. В. Давыдов). Однако, несмотря на их усилия, в практике преподавания школьной математики часто встречается несколько вольное обращение с этим понятием. Основной недостатокв изучении величин, на наш взгляд, состоит в том, что четко не выделены этапы, уровни формирования этого понятия. Это приводит к тому, что учащиеся не получают о понятии четкого представления. Недостаточно подготовленными оказываются и учителя, поскольку в педагогических вузах отсутствует полное и строгое изложение теории величин.

Внедрение в изучение понятия величины идей фундирования позволяет решить эту проблему. Изучение величин осуществляется в течение всего периода обучения в школе и частично в вузе, причем не только на уроках математики, но и на уроках физики. Освоние понятия величины должно включать несколько этапов. Первый этап, первый слой фундирования, – дочисловой, соответствует мышлению школьника на уровне конкретных множеств (возраст с 6–7 до 8–9 лет). Эта ступень характеризуется тем, что возникающие у ребенка структуры мышления неотделимы от множеств конкретных предметов. На этом этапе детьми в вещах выделяются разные свойства, которые становятся в познании отделимыми. Их репрезентации становятся независимыми, и дети могут сравнивать вещи по выраженности их отдельных свойств. Это позволяет начать формирование понятия об отношении порядка и рассмотреть первоначальную порядковую структуру – упорядоченное множество. На этом этапе можно исходить из следующего самого общего, самого широкого определения величины: *величинами одного рода называются элементы некоторого линейно упорядоченного множества*.

Это определение означает, что на множестве величин одного рода задано отношение, удовлетворяющее условиям антирефлексивности (то есть ни для какого элемента x не может быть $x<x$), транзитивности (то есть из $x<y$ и $y<z$ следует $x<z$) и трихотомии (то есть для любых элементов x и y имеет место одно и только одно из соотношений $x=y$, $x>y$ или $x<y$). Именно такое определение величины подразумевается, хотя, разумеется, и не приводится, в учебнике по математике для 1 класса, написанном по программе Д. Б. Эльконина – В. В. Давыдова. Это определение фактически совпадает с определением величины, данным известным российским геометром В. Ф. Каганом.

Поскольку любое числовое множество (подмножество в $\mathbf{R}$) является линейно упорядоченным, то, согласно данному определению, число – частный случай величины. Это позволяет обеспечить единство в изучении различных видов действительного числа и вводить в дальнейшем все виды действительного числа как некоторые величины. Многолетний опыт работы ряда школ по программе Д. Б. Эльконина – В. В. Давыдова показывает доступность такого понимания величины для 6–7-летних учащихся.

Обычно в определении величины, кроме существования линейного порядка, предполагается, что определена еще операция сложения, обладающая определенными свойствами. Однако у ребенка понятие об операции сложения величин формируется позднее, чем понятие о самой величине, как способ выравнивания величин, как переход от неравенства к равенству. К тому же есть величины, складывать которые бессмысленно, поскольку они не обладают свойством аддитивности (такова, например, температура разных тел). Поэтому включать требование выполнимости операции сложения в определение величины целесообразно уже на следующем этапе формирования этого понятия.

На этом втором этапе (соответствующем возрасту с 8–9 до 11–12 лет) возникает потребность в уточнении понятия величины. На этом уровне числа отделены от тех конкретных множеств, которые они характеризуют. Алгебраические операции начинают производиться не над конкретными множествами предметов, а над числами. К этому этапу в формировании понятия о величине, к новому ее пониманию можно переходить после того, как учащиеся получат первоначальное представление о таких величинах, как длина, научатся складывать такие величины, выяснят смысл этой операции и ее свойства. На этом этапе можно исходить из следующего определения.

Положительными скалярными величинами *называются элементы линейно упорядоченного множества, в котором, кроме отношения порядка, определена операция сложения и выполняются следующие условия:*

1) $a+b=b+a$ (коммутативность сложения);

2) $a+(b+c)=(a+b)+c$ (ассоциативность сложения);

3) $a<b$ $a+c<b+c$ (монотонность сложения);

4) если $a<b$, то существует единственная величина c, такая, что $a+c=b$ (возможность вычитания);

5) для любой величины a и любого натурального числа n существует величина b, такая, что $nb=a$ (возможность деления на n равных частей).

Это определение отличается от известного определения А. Н. Колмогорова лишь тем, что в нем отсутствует свойство архимедовости, которое выполняется не для всех величин (имеются неархимедовы величины), с которым лучше познакомиться на следующем этапе одновременно с теорией измерений. Разумеется, и на этом этапе нецелесообразно давать определение величины в явном виде, однако о свойствах скалярной величины учащиеся должны иметь представление.

На следующем этапе, соответствующему возрасту с 11–12 до 15 лет, осуществляется переход от конкретных чисел, выражаемых цифрами, к абстрактным буквенным выражениям. Алгебраические операции производятся не только над числами, но и над объектами другой природы (многочленами, векторами). После того как учащиеся изучат отрицательные числа и начнут изучать физические величины, целесообразно познакомить их и с отрицательными скалярными величинами. На этом этапе в основу определения величины могут быть положены аксиомы упорядоченной группы, которые, как указывал Г. Биркгофф, могут рассматриваться как эмпирические свойства величины [1, с. 61].

Системой скалярных величин называется линейно упорядоченное множество V, в котором, кроме отношения порядка, определена операция сложения и выполняются, кроме уже упоминавшихся условий 1) – 3), следующие условия:

4) $a+0=a$ (существование нулевого элемента);

5) $a+(a)=0$ (существование противоположного элемента);

6) для любой величины a и любого натурального числа n существует величина b такая, что $nb=a$ (возможность деления на n равных частей).

И на этом этапе в массовой школе определение скалярных величин должно присутствовать только в неявном виде. Особое внимание здесь следует уделить межпредметным связям математики и физики.

В явном виде аксиоматику скалярных величин целесообразно ввести уже на следующем этапе, на уровне содержательных структур, соответствующем возрасту от 15–16 до 18–19 лет, когда осуществляется «содержательная» аксиоматизация теории, то есть теории в определенной конкретной ее интерпретации. На этом этапе в определение величины можно ввести дополнительную аксиому – условие непрерывности, из которого, как следствие, может быть получено свойство архимедовости порядка. Такое аксиоматическое изложение теории скалярных величин можно провести в вузе, оно будет весьма полезно для будущих учителей математики, поскольку позволяет устранить имеющиеся пробелы в изучении величин.

Условие архимедовости порядка играет особую роль в теории скалярных величин. При выполнимости этого условия система скалярных величин фактически исчерпывается действительными числами. Этот замечательный факт вытекает из теоремы Гельдера. Эту теорему, являющуюся вершиной теории архимедовых скалярных величин, целесообразно рассмотреть уже на последнем этапе (старшие курсы в вузе), соответствующим уровню абстрактных структур, на котором строятся различные математические теории как абстрактные дедуктивные системы (возраст начиная от 19–20 лет).

Кроме архимедовых величин, существуют и неархимедовы скалярные величины. Они тесно связаны с гипердействительными числами и с основными идеями нестандартного анализа. Несмотря на то, что эти идеи уже использовались в преподавании математики в ряде стран, обеспечить необходимую логическую завершенность при внедрении в обучение идей нестандартного анализа можно лишь при использовании послойного фундирования.

Библиографический список

1. Биркгофф, Г. Математика и психология [Текст] / Г. Биркгоф. – М.: Советское радио, 1977. – 96 с.

2. Колмогоров, А. Н. К обсуждению работы по проблеме «Перспективы развития советской школы на ближайшие тридцать лет» [Текст] / А. Н. Колмогоров // Математика в школе. – 1990. – № 5. – С. 59–61.

3. Смирнов, Е. И. Фундирование опыта в профессиональной подготовке и инновационной деятельности педагога [Текст] : монография / Е. И. Смирнов. – Ярославль, 2012. – 646 с.

4. Столяр, А. А. Педагогика математики [Текст] : курс лекций / А. А. Столяр. – Минск: Вышэйш, Школа, 1969.

5. Тестов, В. А. Математические структуры как научно-методическая основа построения математических курсов в системе непрерывного обучения (школа-вуз) [Текст] : дис. … д-ра пед. наук / В. А. Тестов. – Вологда, 1998.

6. Тестов, В. А. Величины, числа, неравенства: стратегия обучения [Текст] : учебно-методическое пособие / В. А. Тестов. – Вологда: Изд. Центр ВИРО, 2005. – 132 с.

Bibliograficheskij spisok

1. Birkgoff, G. Matematika i psihologija [Tekst] / G. Birkgof. – M.: Sovetskoe radio, 1977. – 96 s.

2. Kolmogorov, A. N. K obsuzhdeniju raboty po probleme «Perspektivy razvitija sovetskoj shkoly na blizhajshie tridcat' let» [Tekst] / A. N. Kolmogorov // Matematika v shkole. – 1990. – № 5. – S. 59–61.

3. Smirnov, E. I. Fundirovanie opyta v professional'noj podgotovke i innovacionnoj dejatel'nosti pedagoga [Tekst] : monografija / E. I. Smirnov. – Jaroslavl', 2012. – 646 s.

4. Stoljar, A. A. Pedagogika matematiki [Tekst] : kurs lekcij / A. A. Stoljar. – Minsk: Vyshjejsh, Shkola, 1969.

5. Testov, V. A. Matematicheskie struktury kak nauchno-metodicheskaja osnova postroenija matematicheskih kursov v sisteme nepreryvnogo obuchenija (shkola-vuz) [Tekst] : dis. … d-ra ped. nauk / V. A. Testov. – Vologda, 1998.

6. Testov, V. A. Velichiny, chisla, neravenstva: strategija obuchenija [Tekst] : uchebno-metodicheskoe posobie / V. A. Testov. – Vologda: Izd. Centr VIRO, 2005. – 132 s.