ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

УДК 514

В. С. Секованов, А. Д. Уваров, Д. В. Елкин

Изучение гладких множеств Жюлиа как средство развития креативности и исследовательской компетентности студентов

В статье с помощью аналитических методов и компьютерных экспериментов изучаются гладкие множества Жюлиа. Рассматриваются функции, имеющие множества Жюлиа: окружность и отрезок. Доказывается, что множеством Жюлиа двух полиномов являются соответственно окружность и отрезок. Множества Жюлиа визуализируются на мониторе, описывается алгоритм их построения. Проводятся компьютерные эксперименты, связанные с исследованием множеств Жюлиа функций, полученных с помощью произведения некоторых степеней полиномов, у которых множества Жюлиа – окружность и отрезок. Данный подход изучения гладких множеств Жюлиа создает широкие возможности для формирования креативности и компетентности студентов. По результатам проведенного эксперимента можно сделать выводы о том, что множество Жюлиа произведения функций, имеющих гладкие множества Жюлиа, как правило, имеет фрактальную структуру. Приведенные компьютерные эксперименты дают возможность студентам анализировать полученные результаты, используя математические методы, что положительно влияет на развитие их исследовательских компетенций и формирование навыков экспериментатора. В статье показывается, что исследовательские компетенции студентов можно эффективно развивать с помощью компьютерных экспериментов и анализа их результатов.

Ключевые слова: множества Жюлиа, заполняющие множества Жюлиа, орбита точки, креативность, компетентность, самоподобие, фрактал, компьютерный эксперимент, гибкость мышления, оригинальность мышления.

THEORY AND METHODOLOGY OF PROFESSIONAL EDUCATION

V. S. Sekovanov, A. D. Uvarov, D. V. Elkin

Study of Smooth Julia Sets as a Means to Develop Students' Creativity and Research Competence

In this paper, we study smooth Julia set with the help of analytical methods and computer simulations. The functions are regarded which have the Julia set – a circle and cut. We prove that the Julia set of two polynomials are, respectively, a circle and a segment. Julia sets are visualized on the monitor, we describe an algorithm to construct them. Conducted computer experiments related to the study of Julia sets of functions obtained by the product of certain degrees of polynomials where Julia set is a circle and cut. This approach to study of smooth Julia sets provides wide opportunities to form students' creativity and competence. Due to the results of the made experiment it is possible to draw conclusions that the set of Julia of functions having smooth sets of Julia, as a rule, has a fractal structure. The done computer experiments give students the chance to analyse the received results using mathematical methods and it influences development of their research competences and formation of skills of the experimenter positively. In the article it is shown that students' research competences can be developed effectively by means of computer experiments and the analysis of their results.

Keywords. The Julia set, filling of the Julia set, the orbit of the point, creativity, a competence, self-similarity, fractal, a computer experiment, flexible thinking, original thinking.

Теория голоморфной динамики в настоящее время интенсивно развивается. Разрабатываются новые математические методы, создаются компьютерные алгоритмы. Произошла интеграция голоморфной динамики с новой ветвью современной математики – фрактальной геометрией. Важной составляющей голоморфной динамики являются множества Жюлиа. А. Дауди пишет: «Множества Жюлиа принадлежат к числу наиболее прекрасных фракталов. Большинство из них самоподобно. Взглянув на границу множества K_c [заполняющего множества Жюлиа] в микроскоп, мы увидим картину, которая, во-первых, мало зависит от того, в каком месте мы смотрим, а вовторых, ничем существенно не отличается от той, которую мы видели без микроскопа» [3].

Множества Жюлиа были описаны в начале прошлого века, однако построить их удалось с помощью компьютера только через 50 лет. Причем конфигурация данных множеств поразила весь математический мир. Дауди отмечает: «Вполне естественно, что вид множества Жюлиа зависит от выбора параметра *c*, но удивляет то, насколько эта зависимость сильна. И, меняя *c*, можно получить невероятное разнообразие множеств Жюлиа: одни из них похожи на большие "толстые" тучи, другие напоминают редкие кусты ежевики, третьи выглядят как искры, летящие в небе во время фейерверка. Одно множество имеет форму кролика, у многих других хвосты, как у морского конька…».

Следует отметить, что строятся множества Жюлиа с помощью компьютерных программ и входят в число самых красивых математических объектов, что благотворно влияет на развитие креативности и компетентности студентов и аспирантов.

В настоящее время с помощью множеств Жюлиа строятся математические модели в различных областях знаний.

Например, Деррида, Де Сезе и Ициксон впервые обнаружили тождественность нулей Янга-Ли в термодинамическом пределе с множеством Жюлиа преобразования перенормировки $R_q(x)=\left(\dfrac{x^2+q-1}{2x+q-2}\right)^2$. То есть фазовая граница Янга-Ли совпадает с фрактальным множеством Жюлиа преобразования $\mathrm{R_q}$.

В большинстве случаев множества Жюлиа являются фракталами. Но бывают и исключения, когда множества Жюлиа представляют графики гладких функций. Такие множества Жюлиа называют *гладкими*. Данная статья посвящена исследованию гладких множеств Жюлиа некоторых комплексных полиномов и методике их изучения бакалаврами, магистрами и аспирантами.

Множество Жюлиа для полинома комплексного переменного $f(z)$, обозначаемое $J(f)$, определяется как $J(f)=\partial\{z: f^{(n)}(z)\to\infty, n\to\infty\}$, где ∂ – граница области притяжения бесконечности, а $f^{(n)}(z)= f(f^{(n-1)}(z)), n=1, 2, \ldots$.

Часто рассматриваются заполняющие множества Жюлиа, состоящие из тех точек комплексной плоскости, орбиты которых пойманы. Множеством Жюлиа будет граница заполняющего множества Жюлиа (см. [2]).

Изучение множеств Жюлиа дает возможность формировать у студентов такие креативные качества, как гибкость, оригинальность мышления, развивать их исследовательские компетенции (см. [1, 5]), повышать мотивацию как к математике, так и к информационным и коммуникационным технологиям (ИКТ). Таким образом, изучение множеств Жюлиа открывает широкие возможности для формирования креативности и компетентности студентов.

Покажем, что множество Жюлиа для функции $l(z)=z^3$ есть окружность $|z|=1$. Для формирования гибкости мышления мы рассмотрим два способа решения данной задачи.

Первый – аналитическое решение задачи, второй – построение множества Жюлиа с помощью ИКТ.

Рассмотрим первое решение. Для функции $l^{(1)}(z)=z^3$ имеем $l^{(2)}(z)=\left(z^3\right)^3=z^9=z^4\cdot z^4\cdot z$. Пусть $|z|=1$. Так как $\left|z^9\right|=\left|z^4\right|\cdot\left|z^4\right|\cdot|z|=1$, то $\left|l^{(2)}(z)\right|=1.$ Следовательно, $l^{(2)}(z)$ находится на единичной окружности с центром в начале координат. Аналогично можно проверить, что точки $l^{(3)}(z), l^{(4)}(z)\ldots l^{(n)}(z)\ldots$ также находятся на единичной окружности. Заметим, что $l^{(n)}(z)=z^{3^n}$.

Нетрудно проверить, что последовательность $l^{(n)}(z)=l(l^{(n-1)}(z)),\ n=1, 2, \ldots$ стремится к ∞, если $|z|>1$. При $|z|<1$ данная последовательность будет стремиться к 0. В рассмотренном случае множеством Жюлиа будет окружность единичного радиуса с центром в начале координат, поскольку $\partial\{z: l^{(n)}(z)\to\infty, n\to\infty\}=|z|=1$.

Заметим, что если $\varphi(z)=z^p$ ($p\geq 2$), то $\phi^{(n)}(z)=z^{p^n}$. Следовательно, множеством

Жюлиа для функции $\varphi(z) = z^p$ при $p \geq 2$ будет также окружность единичного радиуса с центром в начале координат.

Нетрудно сообразить, что заполняющим множеством Жюлиа для функции $h(z) = z^p$ при $p \geq 2$ будет круг радиуса, равного единице, с центром в начале координат.

Алгоритм построения множеств Жюлиа для данных функций, реализуемый с помощью ИКТ, описан ниже.

Покажем, что множеством Жюлиа полинома $f(z) = z^4 - 4z^2 + 2$ является отрезок $[-2; 2]$. Сначала рассмотрим аналитический метод решения задачи.

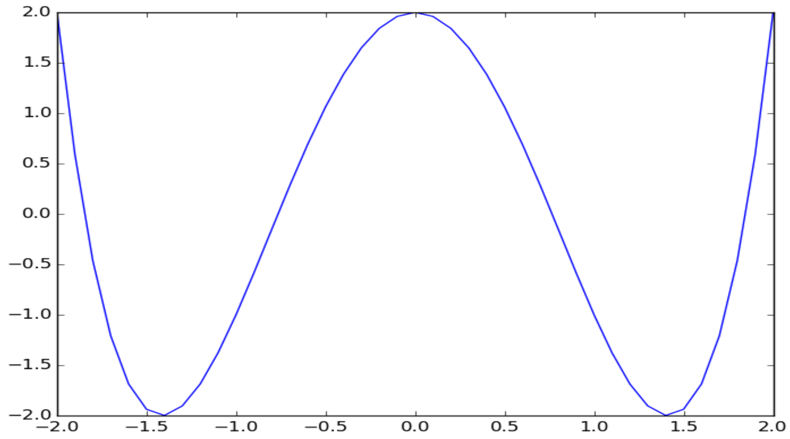


Рис. 1. График функции $f(x) = x^4 - 4x^2 + 2$

Заметим сначала, что если $z = x \in R$, то множество значений $E(f)$ функции f, заданной на отрезке $[-2; 2]$, также содержится в данном отрезке, то есть $(f([-2; 2]) \subset [-2; 2])$ (см. Рис. 1).

Рассмотрим отображение $h(w) = w + \dfrac{1}{w}$. Заметим, что $z = h(w)$ отображает единичную окружность S радиуса *1* с центром в начале координат ($|w| = 1$) на отрезок $[-2; 2]$. Действительно, пусть $w = e^{i\theta}, \theta \in [0; 2\pi]$.

Тогда:

$z = h(w) = h(e^{i\theta}) = e^{i\theta} + \frac{1}{e^{i\theta}} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) + \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = 2\cos(\theta)$.

Отметим, что $2\cos(\theta)$ имеет два прообраза $w_1 = e^{i\theta}, w_2 = e^{i(2\pi - \theta)}$. Следовательно, если $\theta \in [0; 2\pi], w = e^{i\theta} \in S$, то $2\cos(\theta) \in [-2; 2]$.

Далее покажем, что если $w \notin S$, то $z = h(w) \notin [-2; 2]$. Для этого достаточно доказать утверждение: если $z = h(w) \in [-2; 2]$, то $h^{-1}(z) \in S.$ Действительно, $z = h(w) = w + \dfrac{1}{w}$ определяет уравнение $w^2 - wz + 1 = 0$. Согласно теореме Виета, корни w_1, w_2 этого уравнения удовлетворяют равенству $w_1 \cdot w_2 = 1$. Поскольку $w_1 = \rho e^{i\theta}$ и $w_2 = \rho e^{-i\theta}$ его корни, то в силу последнего равенства имеем $\rho^2 = 1.$ Соответственно, $\rho = 1.$ Таким образом, мы показали, что $h^{-1}(z) \in S.$ Более того, покажем, что функция $h(w) = w + \dfrac{1}{w}$ изоморфно отображает внешность замкнутого единичного круга с центром в начале координат на $\mathbb{C}\setminus[-2;2]$.

Доказательство. Легко видеть, что отображение $h|_{\mathbb{C}\setminus S}$ сюрьективно:

$$h(w)=w+\frac{1}{w}=\rho e^{i\theta}+\frac{1}{\rho e^{i\theta}}=\rho e^{i\theta}+\rho e^{-i\theta}=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{1}{\rho}(\cos\theta-i\sin\theta)=$$
$$\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)\cos\theta+i\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right)\sin\theta.$$

Далее покажем, что $h|_{\mathbb{C}\setminus S}$ инъективно. Пусть существуют $w_1=\rho_1 e^{i\theta_1},\rho_1>1,\ \ \theta_1\in[0;2\pi]$ и $w_2=\rho_2 e^{i\theta_2},\rho_2>1,\ \ \theta_2\in[0;2\pi]$, такие, что $h(w_1)=h(w_2)$. Тогда имеет место равенство $\frac{w_1^2+1}{w_1}=\frac{w_2^2+1}{w_2}$. Из него получаем уравнение $(w_2-w_1)(1-w_1w_2)=0$. Заметим, что $w_1w_2\neq 1$, поскольку по условию $\rho_1,\rho_2>1$. Таким образом, $w_1=w_2$.

Далее покажем, что $f(h(w))=h(w^4)$. Имеем:

$$f(h(w))=\left(w+\frac{1}{w}\right)^4-4\left(w+\frac{1}{w}\right)^2+2=\left(w^2+\frac{1}{w^2}+2\right)^2-4\left(w^2+\frac{1}{w^2}+2\right)+2=$$
$$=w^4+\frac{1}{w^4}+4+4w^2+\frac{4}{w^2}+2-4w^2-\frac{4}{w^2}-8+2=w^4+\frac{1}{w^4}\quad.$$
(1)

Поскольку $h(w^4)=w^4+\frac{1}{w^4}$, то в силу (1) имеем $f(h(w))=h(w^4)$.

Далее рассмотрим орбиту точки $z=h(w)$. Имеем:

$$f^{(2)}(h(w))=f(f(h(w)))=f(h(w^4))=w^{4^2}+\frac{1}{w^{4^2}}.$$

Далее находим

$$f^{(3)}(h(w))=f(f^{(2)}(h(w)))=f(h(w^{4^2}))=w^{4^3}+\frac{1}{w^{4^3}}$$

Аналогично, продолжая данный процесс, получим

$$f^{(n)}(h(w))=f(f^{(n-1)}(h(w)))=w^{4^n}+\frac{1}{w^{4^n}}$$ и т. д.

Таким образом, если $z\notin[-2;2]$, то

$$\lim_{n\to\infty}\left(f^{(n)}(h(w))\right)=\lim_{n\to\infty}\left(f^{(n)}(z)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(w^{4^n}+\frac{1}{w^{4^n}}\right)=\infty$$

Поскольку $f([-2;2])\subset[-2;2]$ (см. Рис. 1), то для каждого $z\in[-2;2]$ орбита точки $z=h(w)$ ограничена. Таким образом, $j(f)=\partial(z\in C: f^{(n)}(z)\to\infty,\ n\to\infty)=[-2;2]$.

То есть множеством Жюлиа для функции $f(z)=z^4-4z^2+2$ является отрезок $[-2;2]$.

Заметим, что $j(f)=\partial(z\in C: f^{(n)}(z)\to\infty,\ n\to\infty)=[-2;2]$ не является фракталом, а заполняющим множеством Жюлиа функции $f(z)=z^4-4z^2+2$ также будет отрезок $[-2;2]$.

Опишем алгоритм построения множества Жюлиа для заданной функции (включая функции $f(z)=z^2$, $f(z)=z^4-4z^2+2$) (Рис. 2–5).

Опишем модуль 1 (1–3 части).

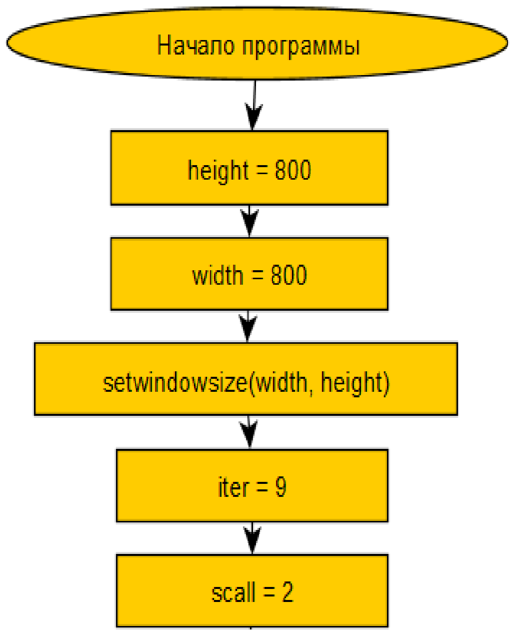


Рис 2. Первая часть программы

Первая часть программы выполняет следующие функции:

– Установка ширины и длины экрана (800×800).

– Установка масштаба и выбора итерации.

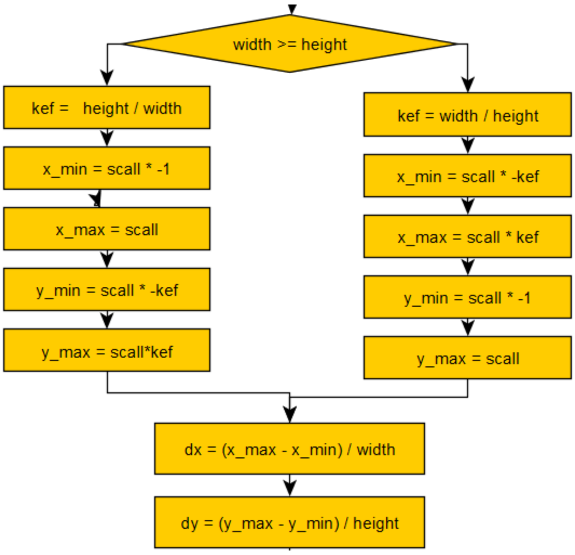


Рис. 3. Вторая часть программы

С помощью второй части программы происходит выбор шага для прохода по экрану компьютера, имитирующего комплексную плоскость.

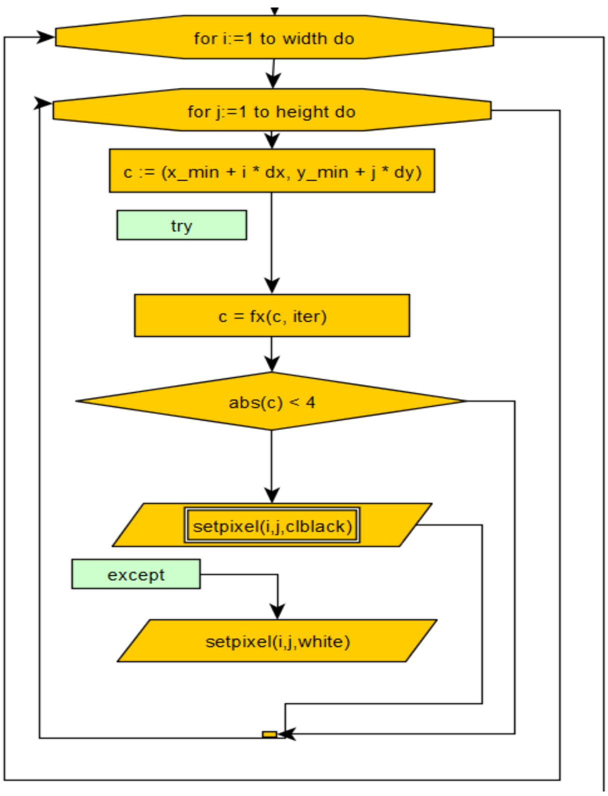


Рис. 4. Третья часть программы

С помощью третьей части программы происходит вычисление орбиты точки, ее анализ и вывод на экран исходной точки в зависимости от значения модуля соответствующей итерации (iter) функции.

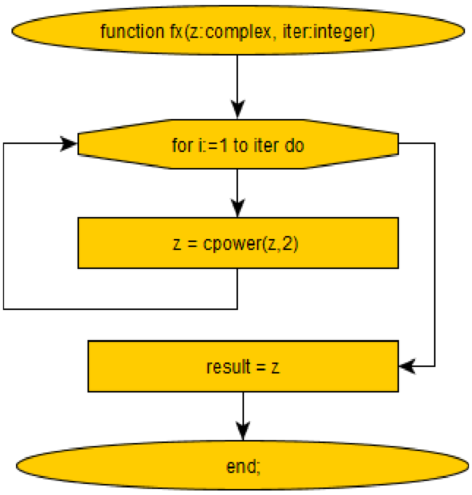


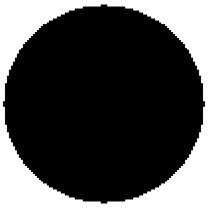
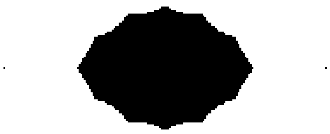
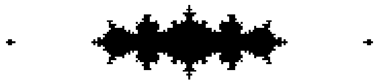
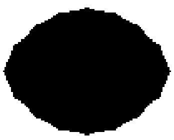
Рис. 5. Модуль 2 программы

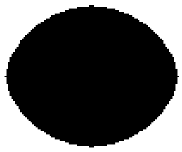
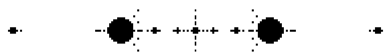
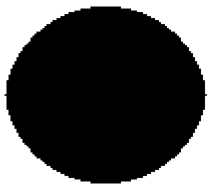
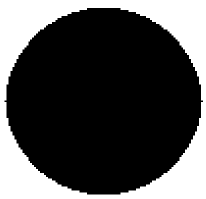
С помощью модуля 2 программы происходит вычисление итерируемой функции *fx*.

Исследовательские компетенции студентов, на наш взгляд, можно эффективно развивать с помощью компьютерных экспериментов и анализа их результатов.

Проведем компьютерный эксперимент, рассматривая множества Жюлиа от функций, записанных в таблице 1.

Таблица 1

Индекс функций *f*, *h*	$f_n(z)$	$h_n(z)$
0	 $f_0(z) = z^2$	$h_0(z) = z^4 - 4z^2 + 2$
1	 $f_1(z) = z^2(z^4 - 4z^2 + 2)$	 $h_1(z) = z^2(z^4 - 4z^2 + 2)$
2	 $f_2(z) = z^4(z^4 - 4z^2 + 2)$	 $h_2(z) = z^2(z^4 - 4z^2 + 2)^2$
3	 $f_3(z) = z^6(z^4 - 4z^2 + 2)$	 $h_3(z) = z^2(z^4 - 4z^2 + 2)^3$

Индекс функций *f*, *h*	$f_n(z)$	$h_n(z)$
5	 $f_5(z) = z^{10}(z^4 - 4z^2 + 2)$	 $h_5(z) = z^2(z^4 - 4z^2 + 2)^5$
10	 $f_{10}(z) = z^{20}(z^4 - 4z^2 + 2)$	 $h_{10}(z) = z^2(z^4 - 4z^2 + 2)^{10}$
20	 $f_{20}(z) = z^{40}(z^4 - 4z^2 + 2)$	 $h_{20}(z) = z^2(z^4 - 4z^2 + 2)^{20}$

Заполняющими множествами Жюлиа исходных функций являются круг (функция $f_0(z) = z^2$) и отрезок (функция $h_0(z) = z^4 - 4z^2 + 2$), изображенные в первой строке таблицы. Возникает естественный вопрос: будет ли множество Жюлиа гладким для произведения данных функций (и произведения их степеней)? Аналитически исследовать такие вопросы затруднительно. Однако можно обратиться к компьютерным экспериментам.

Увеличивая степень z функции $f_0(z) = z^2$ и оставляя неизменной степень z функции $h_0(z) = z^4 - 4z^2 + 2$, мы исследуем заполняющие множества Жюлиа функции $f_i(z) = z^{2i}(z^4 - 4z^2 + 2)$, равной произведению соответствующих функций (см. левый столбец таблицы 1). Результаты компьютерного эксперимента показывают, что сначала заполняющее множество Жюлиа деформируется (множество Жюлиа теряет гладкость). Потом при достаточно больших степенях z заполняющее множество Жюлиа функции $f_i(z)$ будет стремиться к кругу с центром в начале координат и радиусом, равным единице (см. левый столбец таблицы 1).

Если теперь мы зафиксируем степень при z (зафиксируем выражение z^2) и будем рассматривать заполняющее множество Жюлиа функции $h_i(z) = z^2(z^4 - 4z^2 + 2)^i$, то исходное заполняющее множество Жюлиа (отрезок $[-2; 2]$) деформируется и к исходному отрезку не стремится (см. правый столбец таблицы 1).

По результатам проведенного эксперимента можно сделать выводы. Множество Жюлиа произведения функций, имеющих гладкие множества Жюлиа, как правило, имеет фрактальную структуру.

Приведенные компьютерные эксперименты дают студентам возможность анализировать полученные результаты, используя математические методы, что положительно влияет на развитие их исследовательских компетенций и формирование навыков экспериментатора.

Библиографический список

1. Афанасьев, В. В., Смирнов, Е. И. Экспериментальное исследование творческой активности студентов в процессе обучения математике [Текст] / В. В. Афанасьев, Е. И. Смирнов // Ярославский педагогический вестник. – 1996. – № 3. – С. 110–115.

2. Бабенко, А. С. Развитие креативности будущих бакалавров математических направлений вуза в процессе изучения нелинейных динамических систем в математических дисциплинах [Текст] : автореф. дис. … канд. пед. наук / А. С. Бабенко. – Ярославль, 2013.

3. Кроновер, Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах [Текст] / Р. М. Кроновер ; пер. с англ. ; под ред. Т. Э. Крэнкеля. – М.: Постмаркет, 2000.

4. Пайтген, Х. О. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем [Текст] / Х. О. Пайтген, П. Х. Рихтер ; пер. с англ. ; под ред. А. Н. Шарковского. – М.: Мир, 1993.

5. Секованов, В. С. Элементы теории фрактальных множеств [Текст] : учебное пособие. – Изд. 5-е переработ. и доп. / В. С. Секованов. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2013.

6. Смирнова, Е. С. Методика обучения элементам фрактальной геометрии как средство развития исследовательских компетенций будущих бакалавров [Текст] : автореф. дис. … канд. пед. наук / Е. С. Смирнова. – Ярославль, 2013.

Bibliograficheskij spisok

1. Afanas'ev, V. V., Smirnov, E. I. Jeksperimental'noe issledovanie tvorcheskoj aktivnosti studentov v processe obuchenija matematike [Tekst] / V. V. Afanas'ev, E. I. Smirnov // Jaroslavskij pedagogicheskij vestnik. – 1996. – № 3. – S. 110–115.

2. Babenko, A. S. Razvitie kreativnosti budushhih bakalavrov matematicheskih napravlenij vuza v processe izuchenija nelinejnyh dinamicheskih sistem v matematicheskih disciplinah [Tekst] : avtoref. dis. … kand. ped. nauk / A. S. Babenko. – Jaroslavl', 2013.

3. Kronover, R. M. Fraktaly i haos v dinamicheskih sistemah [Tekst] / R. M. Kronover ; per. s angl. ; pod red. T. Je. Krjenkelja. – M.: Postmarket, 2000.

4. Pajtgen, H. O. Krasota fraktalov. Obrazy kompleksnyh dinamicheskih sistem [Tekst] /

H. O. Pajtgen, P. H. Rihter ; per. s angl. ; pod red. A. N. Sharkovskogo. – M.: Mir, 1993.

5. Sekovanov, V. S. Jelementy teorii fraktal'nyh mnozhestv [Tekst] : uchebnoe posobie. – Izd. 5-e pererabot. i dop. / V. S. Sekovanov. – M.: Knizhnyj dom «LIBROKOM», 2013.

6. Smirnova, E. S. Metodika obuchenija jelementam fraktal'noj geometrii kak sredstvo razvitija issledovatel'skih kompetencij budushhih bakalavrov [Tekst] : avtoref. dis. … kand. ped. nauk / E. S. Smirnova. – Jaroslavl', 2013.