

В. Е. Фирстов, Ю. В. Кулемина**Пифагорейская концепция гармонии
в процессе обучения математике студентов-гуманитариев**

Еще в школе Пифагора музыка была частью более общей дисциплины под названием «математа» и до XVII в. в Европе теория музыки рассматривалась как раздел математики. Данный междисциплинарный аспект является привлекательным для широкой аудитории исследователей во всем мире и нашел самовыражение в создании Международной ассоциации эмпирической эстетики (IAEA, 1967) и Международной ассоциации математической эстетики (1996) с отделениями в России и Конгрессом, созываемым раз в 2 года. На этом пути имеется определенный консенсус мнений, который сводится к тому, что различие между естественными и гуманитарными науками связано не с различием самих предметов, а с различием в принципах образования понятий и формирования соответствующих суждений о предмете. На современном этапе в системе образования РФ преподавание математики на гуманитарных направлениях предусмотрено в версиях ФГОС ВПО, хотя содержательно этот вопрос до конца не урегулирован. Если встать на информационную точку зрения, то всякой гуманитарной дисциплине соответствует некий язык, допускающий алгоритмическую трактовку, обеспечивающую разрешимость данной дидактической задачи.

Ключевые слова: гармония, пифагорова теория пропорций, законы Пифагора – Архита, строение пифагоровой гаммы, гуманитарная математика, процесс обучения, психология восприятия музыки, информационные аспекты теории музыки.

V. E. Firstov, Yu. V. Kulemina**Pythagorean Conception of Harmony in the Process of Mathematical Teaching
of Students of Humanity Directions**

In the times of Pythagorean's school, music was a part of a more general discipline which was called «mathemata». In Europe till the XVIIth century the theory of music was considered as a section of mathematics. This interdisciplinary aspects interest a wide audience of explores all over the world, within the International Association of Empirical Aesthetics (IAEA) and the International Association of Mathematical Aesthetics. Nowadays there is a consensus of opinions, the idea of which is, that the difference between natural and humanity sciences is connected with the difference in principles of formation about subject understanding. In the system of education the training of mathematics in the field of humanity, is not regulated didactically. Our point of view is that a definite formal language suits any humanity discipline which realizes some algorithmic interpretation.

Keywords: harmony, Pythagor's theory of proportions, Pythagor's – Arhit's laws, Pythagor's gamma, humanity mathematics, a training process, psychological perception of music, informational aspects of music.

Введение

Основной метод реализации междисциплинарного подхода в учебном процессе – математическое моделирование, представляющее теоретическую основу кибернетики, формирование умений и навыков которого является приоритетом концепции модернизации системы образования РФ. Кибернетически всякий процесс управления в природе универсален, и его реализация сводится к некоторому преобразованию информации по принципу обратной связи [6]. Это положение в 60-х гг. XX в. приобрело методологическое обоснование в работах советского философа В. А. Штоффа [21] и позволило установить отношение между моделью и объектом в кибернетических системах. Как выяснилось, в кибернетике метод моделирования приобретает даже бо-

лее общий характер, чем в случае математического моделирования.

Отечественное образование традиционно успешно справилось с реализацией математических моделей в технических и естественных науках. В 60-е гг. XX в. были освоены экономико-математические модели, а позже такие модели появились в области социологии и психологии [18]. Иначе обстоит дело с реализацией междисциплинарного подхода в гуманитарной области образования, хотя в этом направлении предприняты серьезные усилия и достигнуты определенные успехи [3, 17]. В данной работе рассматриваются некоторые дидактические аспекты математического моделирования, касающиеся вопросов гармонии в рамках преподавания теории музыки на гуманитарных факультетах вузов.

1. Концепции формирования содержания обучения математике в гуманитарной области профессионального образования

На уровне ВПО при формировании содержания обучения особенно важно эффективно реализовать дидактический принцип научности, который в данном случае выступает в своем модифицированном варианте, известном как *принцип научной селекции* (И. Я. Конфедератов, 1969 [1]). Смысл этого принципа сводится к выработке эффективных стратегий отбора количественного и качественного компонентов содержания учебной дисциплины. На этот счет в современном преподавании математики в гуманитарной области образования в основном преобладают два подхода:

- Сумма математических знаний, умений и навыков передается в рамках предметных курсов прикладного характера (типа «Математические методы в искусствоведении (психологии, социологии и т. п.)»). Прекрасным образцом реализации такого подхода является монография А. В. Волошинова [3].

- Математический контент представляется в рамках курсов типа «Математические основы гуманитарных знаний» [17].

В первом случае математика преподносится фрагментарно в рамках тех или иных моделей так, что создание более-менее целостного представления о математике отводится обучаемому субъекту. Во втором случае математика представляет некоторый целостный (в меру детализированный) образ и его связи в гуманитарной области устанавливают базис для математического моделирования так, что вопрос о реализации моделей решается на уровне мотиваций заинтересованного субъекта. Важно подчеркнуть, что в обоих случаях, фактически, обходится психологическая сторона вопроса, связанная с восприятием (распознаванием) образов гуманитарного знания, особенно в области искусствоведения и эстетики, которая представляется важной.

Общие подходы к формированию стратегий преподавания математики в гуманитарной области реализуются на основе кибернетических принципов оптимизации управления информационным контентом, передаваемым в данном учебном процессе [18], что достигается посредством минимизации в нем информационной энтропии [22]. При этом психологический аспект восприятия и распознавания образов гуманитарного знания в процессе обучения должен опираться на результаты экспериментов в области

психофизиологии человеческих чувств и процессов мышления.

2. Цели математического обучения в гуманитарной области

Цели математического обучения в гуманитарной области, касающейся категории эстетики, вполне четко обозначил Платон, который еще в IV в. до н. э. отмечал, «как легко отыскать примеры прекрасного и как трудно объяснить, почему они прекрасны». В поисках истины Сократ отождествлял красоту с целесообразностью, Пифагор связывал прекрасное с должным соблюдением пропорций, но, так или иначе, уже в античные времена возникла идея о существовании в категории прекрасного некоего рационального ядра, выражающегося математическим языком. Именно это ядро представляет предмет обучения, цели которого сводятся к внедрению выделенного математического контента в сознание обучаемого контингента для формирования умений и навыков постижения закономерностей данной гуманитарной области через математику.

Каким образом определяется интересующее рациональное ядро, составляющее основу содержания математического обучения в конкретной гуманитарной области? Концептуально разрешение поставленного вопроса сводится к проведению следующей дидактической деятельности:

- Определение информационных связей между предметными областями математического и гуманитарного знаний, что равносильно установлению структуры причинно-следственных связей в рассматриваемой гуманитарной области знаний, задающей контуры возможных расширений посредством креативных процессов.

- Установление лингвистической связи между математикой и гуманитарной областью, что подразумевает определение информационных характеристик языков, анализ и сравнение которых позволяет выявить языковые универсалии, связанные с законами эстетики.

Эффективная реализация этих положений в значительной мере опирается на анализ и последующую дидактическую репродукцию имеющихся исторических традиций, из которых следует, что у колыбели большинства гуманитарных направлений все-таки стояла математика. Этот тезис иллюстрируется примерами из психологии музыкального творчества.

3. Особенности интерпретации гуманитарного знания в учебном процессе

Представление теоретического знания обычно реализуется тремя следующими способами: *историческим, эвристическим (интуитивным) или аксиоматическим (дискурсивным)*. В учебном процессе, так или иначе, задействованы все три способа, в зависимости от целей и задач обучения, однако первые два плохо пригодны для изложения теории в целом, поскольку не обеспечивают достаточно полного представления о ее логической структуре. В рамках аксиоматической теории ее положения выделяются явно и упорядочены причинно-следственными связями, определяющими четкую логическую структуру данной теории, которая удобна для алгоритмизации при обучении с использованием ИКТ. Кроме того, при известной логической структуре теории легко реализовать оптимизацию траектории подачи знаний в учебном процессе.

Формирование аксиоматической теории представляет некоторую процедуру абстракции и систематизации имеющегося опыта, запечатленного в соответствующих теориях, выраженных в исторической и интуитивной транскрипции. Смысл абстракции как мыслительной операции, «при помощи которой получаемые от отдельных вещей идеи становятся общими представителями всех предметов одного и того же рода», одним из первых (в 1689 г.) установил Дж. Локк в трактате «Опыт о человеческом разумении» [9]. На сегодняшний день абстракция представляет универсальный способ формирования теоретического знания, применимый к любой научной дисциплине: математической, естественной или гуманитарной. Однако способы абстрагирования зависят от природы изучаемых объектов и целей исследования. Поэтому способы абстрагирования в математике отличаются от способов абстрагирования в естествознании, а естественнонаучная абстракция отлична от абстракции в гуманитарных науках [16].

Аксиоматический метод в общественном сознании часто ассоциируется в контексте математики в силу исторических традиций, восходящих к Евклиду (IV в. до н. э.) [12], который этот метод продемонстрировал явно на примере геометрии. Если следовать исторической хронологии, задолго до Евклида идеи аксиоматики прослеживаются в области конституционного права в папирусах древнего Египта, клинописях Вавилона и ведах Индии [18]. В конце XVII в. пришел черед аксиоматизации классической механики в рамках

законов И. Ньютона. Во второй половине XIX в. сформулированы законы эволюции и наследственности (Ч. Дарвин, Г. Мендель), на основе которых в XX в. зародилось междисциплинарное направление в виде математической генетики, представляющей сейчас одну из наиболее успешных областей биологии. Известные «Математические тетради» К. Маркса также свидетельствуют о том, что при разработке экономической теории широко использовались формализованные варианты экономических процессов. Более того, в монографии [7] реализован междисциплинарный вариант экономической теории (как на микро-, так и на макроуровне), где используется математический аппарат, применяемый в естественных науках (принцип наименьшего действия Гамильтона, статистический ансамбль Дж. Гиббса и др.). Во второй половине XX в. аксиоматика и формализация приходят в область гуманитарных наук (психологию, социологию, культурологию и т. п.) [18]; в сфере образования аксиоматический метод реализован В. М. Монаховым при разработке теории педагогических технологий [11].

В современном образовательном пространстве отмечается усиление гуманитарных тенденций, при проведении которых наиболее взвешенной представляется точка зрения, восходящая к неокантианской баденской школе рубежа XIX–XX вв. в лице Г. Риккерта и М. Вебера [3]. Эта точка зрения исходит из того, что *различие между гуманитарными и естественными науками связано не с различием самих предметов, а с различием логических методов этих наук, то есть с различием в принципах образования понятий и формулировки соответствующих суждений*.

Следует сказать об ограничениях аксиоматического метода, связанных с теоремой Геделя о неполноте всякой аксиоматической теории [5]. В физике это выразилось в невозможности толкования фотоэффекта на основе постулатов классической механики, и это ограничение удалось снять через принцип дополненности в рамках квантово-механических представлений [2]. Неполнота аксиоматических теорий своеобразно проявляется в теории конституционного права, и сейчас на уровне ООН ведутся дискуссии о приоритете между конституционными принципами территориальной целостности государства и праве нации на самоопределение; по вопросам биоэтики в связи с возможностями клонирования, а также эвтаназии в контексте конституционного

права на жизнь и др. За счет принципа дополненности в процессе информатизации в системе дидактических постулатов снимаются ограничения в педагогике [18]. Поэтому принцип дополненности выступает в виде общей методологии современной науки и, в связи с теоремой Геделя о неполноте, это говорит о неалгоритмической природе интуитивного вывода [13]. Поэтому постижение истины не обязательно происходит в рамках формальной системы, а может, например, выражаться посредством некой разновидности общей процедуры принципа рефлексии.

Ниже дается пример аксиоматического построения дидактического контента для обучения математике студентов-гуманитариев на основе пифагорейской аксиоматики математической теории музыки.

4. Пифагорейская теория музыки

Основным понятием теории музыки является *музыкальный тон*, который физически представляет колебательный процесс в воздухе с фиксированной частотой и, например, частота камертона, применяемого для настройки музыкальных инструментов, равна 440 герц (для 1-й октавы). *Частота колебаний тона* определяет его количественную характеристику – *высоту*, и чем она больше, тем выше тон. Это позволяет ввести *расстояние (интервал)* между тонами с высотами f_1 и f_2 в виде отношения $r(f_1; f_2) = f_1/f_2$.

Всякая музыкальная композиция, по сути, представляет некоторую последовательность тонов, передающих ее смысл так, чтобы входящие в нее тоны были созвучны, образуя *мелодию*. Такие тоны в музыке принято называть *консонансами* и, чтобы это условие выполнялось, высоты тонов должны отвечать определенным отношениям.

В Европе основы теории музыки были заложены в VI–IV вв. до н. э.: в Древней Греции усилиями Пифагора (ок. 570–500 гг. до н. э.), Филолая (V в. до н. э.) и Архита Тарентского (428–365 гг. до н. э.) [3]. Они опирались на античную теорию пропорций и ряд положений, которые были установлены экспериментально и известны как законы Пифагора – Архита:

– Высота тона f звучащей струны обратно пропорциональна ее длине l , то есть

$$f = a/l, \quad (1)$$

где a – коэффициент пропорциональности, зависящий от физических свойств струны (толщины, материала и т. п.).

– Две звучащие струны дают консонанс лишь тогда, когда их длины относятся как целые числа,

составляющие треугольное число $10=1+2+3+4$, то есть как $n/(n+1)$, где $n=1;2;3$. (2)

Интервалы (2) называют *совершенными консонансами* и, в частности, при $n=1$ интервал $f_1/f_2 = 1/2$ назван *октавой*; при $n=2$ интервал $f_1/f_2 = 2/3$ образует *квинту* и при $n=3$ интервал $f_1/f_2 = 3/4$ является *квартой*. Кроме того, если звучащие струны имеют одинаковую длину, то интервал $f_1/f_2 = 1$ представляет «самый совершенный консонанс» *прима (унисон)*, который играет большую роль в оркестровых композициях.

Идея пифагорейцев при построении музыкальной шкалы реализует их канон красоты, связанный с обеспечением определенной пропорции между последовательностью тонов внутри октавы, которая для этого разбивается в геометрической прогрессии. Музыкальная шкала (гамма) пифагорейцев создавалась для настройки однострунного инструмента (монохорда), шкала которого содержала 12 ступеней, так что цена деления составляла $1/12$ часть этой шкалы. Разбиение данной шкалы происходило по закону консонанса (2): со струной длины $l_1=1$ будут созвучны ее части длины $l_2=1/2$ (на октаву выше), $l_3=2/3$ (на квинту выше), $l_4=3/4$ (на кварту выше). При таком разбиении, с учетом (1), имеем следующие соотношения между интервалами:

$$f_2 = f_3/f_4; f_3/f_2 = f_1/f_4; f_2/f_1 = (f_2/f_3)(f_3/f_1); f_3/f_4 = 9/8. \quad (3)$$

Из пропорций (3) следует, что интервал между квинтой f_3 и квартой f_4 равен одному тону, принимаемому за единицу ладообразования пифагоровой гаммы. Откладывая от основного тона $f_1=1$ единичный тон $f_2=9/8$, затем еще один тон $f_3=(f_2)^2=(9/8)^2=81/64$, мы оставляем до кварты $f_4=4/3$ еще некоторый интервал, равный $f_4/f_3 = 4/3:81/64 = 256/243$. Поскольку деление октавы происходит в геометрической пропорции со знаменателем $9/8$, то остаточный интервал принято называть *полутон*ом, так как $256/243 \approx 1,05351,0607$. Так был получен так называемый *лидийский тетрахорд* – 4-струнный звукоряд, составляющий основу пифагорейской гаммы. Сдвигая данный тетрахорд на квинту вверх, получаем остальные ступени пифагоровой гаммы: $f_5=(3/2)f_1=3/2$; $f_6=(3/2)f_2=27/16$; $f_7=(3/2)f_3=243/128$; $f_8=(3/2)f_4=2$. В итоге имеем полную последовательность тонов, образующих гамму в *до мажоре*:

$$1(\text{до}) - 9/8(\text{ре}) - 81/64(\text{ми}) - 4/3(\text{фа}) - 3/2(\text{соль}) - 27/16(\text{ля}) - 243/128(\text{си}) - 2(\text{до}). \quad (4)$$

Это и есть знаменитый *канон Пифагора*. По преданию, канонический строй (4) использовался при настройке лиры легендарного Орфея.

Замечание. Закон Пифагора – Архита (2) показывает, что две звучащие струны дают консонанс лишь тогда, когда отношение их длин является рациональным числом определенного вида. Поэтому не всякое отношение длин струн дает консонансное звучание и закономерность (2) пифагорейцами была «нащупана» опытным путем, причем на этом пути их ожидало великое открытие. Судя по всему, они долгое время полагали, что в Природе царит гармония разума (по лат. ratio), выраженная рациональными пропорциями в виде отношений соизмеримых величин, однако неожиданно обнаружили несоизмеримость диагонали квадрата с его стороной.

Доказательство этого факта опирается на пифагорейское учение о четном и нечетном. Пусть имеется квадрат со стороной l и диагональю d . Можно считать дробь l/d несократимой. Тогда по теореме Пифагора $d^2 = l^2$ и d должно быть четным, а l – нечетным, так как дробь l/d несократима. Отсюда $d = 2k$ и $2k^2 = l^2$, то есть l – должно быть четно. Возникает противоречие, так как l четно и нечетно одновременно. Этим устанавливается несоизмеримость l и d , то есть иррациональность величины l/d . В музыкальном отношении это означает, что если взять аккорд из струн длиной l и d , то получится резко диссонирующее звучание. Из этих соображений в пифагорейской

теории гармонии, собственно, и возникли понятия рациональных и иррациональных чисел.

5. Канон Пифагора и колебания струны по Д'Аламберу

В 1747 г. был опубликован мемуар Д'Аламбера «Исследования по вопросам о кривой, которую образует натянутая струна, приведенная в колебание», содержащий решение волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (5)$$

где t – время, x – координата точки струны в положении равновесия, $u = u(x; t)$ – отклонение точки струны с координатой x в момент t от положения равновесия, a^2 – коэффициент пропорциональности, характеризующий упругие свойства струны

($a = \sqrt{F/\rho}$, F/ρ – соответственно, натяжение и плотность однородной струны). Будем решать уравнение (5) методом Фурье при условиях:

$$u(x; 0) = f(x), \quad u_t(x; 0) = g(x); \quad u(0; t) = 0, \quad u(l; t) = 0, \quad (6)$$

$$\text{полагая: } u(x; t) = X(x)T(t). \quad (7)$$

Тогда после подстановки (7) в (5) получается система обыкновенных дифференциальных уравнений вида:

$$\frac{d^2 T}{dt^2} - a^2 \lambda T = 0, \quad \frac{d^2 X}{dx^2} - \lambda X = 0, \quad (8)$$

Решение системы (8), учитывая (6, 7), дает решение волнового уравнения (5) в виде ряда Фурье:

$$u(x; t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x; t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{l} \left[a_n \cos \frac{n\pi a t}{l} + b_n \sin \frac{n\pi a t}{l} \right], \quad (9)$$

$$\text{где } a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad b_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^l g(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (10)$$

Выясним физический смысл решения (9), (10) и, прежде всего, функций $u_n(x; t)$, которые для этого представим в виде:

$$u_n(x; t) = A_n(x) \sin \left(\frac{n\pi a}{l} t + \varphi_n \right), \quad (11)$$

$$\text{где } A_n(x) = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \sin \frac{n\pi}{l} x; \quad \varphi_n = \arctg \frac{a_n}{b_n}. \quad (12)$$

Как видно из (11) и (12), каждое решение $u_n(x; t)$ представляет собой гармоническое колебание с частотой и фазой, причем амплитуда колебаний $A_n(x)$ для разных точек струны зависит от x так, что концы струны неподвижны, поскольку при $x=0; l$: $A_n(0) = A_n(l) = 0$. Каждое такое колебание имеет узловые (неподвижные) точки, определяемые условиями при $n=1$: $\sin 0x = 0$, $x=l$;

$$n=2; \sin 0x = 0, x=l/2, x=l; \quad (13)$$

$$n=k: \sin 0x = 0, x=l/k, x=2l/k, \dots, x=l.$$

Условия (13) показывают, что решение Д'Аламбера (9–12) физически представляет колебания струны в виде суперпозиции стоячих волн. Это означает, что струна колеблется не только по всей длине, но одновременно и отдельными ее частями (половинами, третями, четвертями и т. д.). Поэтому струна издает звук не только основной частоты $\omega_1 = \pi a / l$, но также

обертоны $\omega_2 = 2\pi a / l$, $\omega_3 = 3\pi a / l, \dots, \omega_k = k\pi a / l$.

Обратим внимание, что частоты колебаний струны обратно пропорциональны ее длине, и таким образом приходим к закону Пифагора – Архита (1). Располагая гармониками струны в порядке возрастания их частот, обнаруживаем, что они относятся как числа натурального ряда:

$$\omega_1 : \omega_2 : \omega_3 : \dots : \omega_k : \dots = 1 : 2 : 3 : \dots : k : \dots. \text{ Но тогда}$$

$\frac{\omega_{n+1}}{\omega_n} = \frac{n+1}{n}$ и получается закон Пифагора – Ар-

хита (2). Интересно отметить, что:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\omega_{n+1}}{\omega_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$, то есть с ростом номера n

интервал между соседними гармониками натурального звукоряда уменьшается и в пределе дает чистую приму (унисон).

6. Пифагорова комма и хорошо

темперированный клавир И. С. Баха

Как всякое великое пифагорова гамма имеет свою «ахиллесову пятю», о которой говорилось в п. 4 в связи с «пифагоровым» полутонотом $f_4/f_3 = 256/243 \approx 1,0535$, который хотя и мало, но отличается от реального полутона $\sqrt{9/8} \approx 1,0607$. Поэтому в октаве последовательность тонов нельзя точно реализовать в виде геометрической прогрессии. Действительно, если оба «пифагоровых» полутона (*ми-фа* и *си-до*) в (4) заменить интервалами, то в этом случае интервал в 12 таких полутонов составит $(9/8)^6 = 531441/262144 \approx 2,0273$, что несколько превышает значение 2 для октавы. Отношение этих двух интервалов составляет:

$$(9/8)^6 / 2 = 531441/524288 \approx 1,0136 \quad (14)$$

и называется *пифагоровой коммой*, наличие которой указывает на то, что в гармонии пифагоровой гаммы присутствуют едва уловимые диссонансы. Поэтому идеальное (консонансное) построение октавы с помощью квинты, как это предполагали пифагорейцы, или, что равносильно, равномерное (темперированное) деление октавы в виде рациональной геометрической прогрессии принципиально невозможно.

Построение темперированной шкалы музыкальных тонов предполагает выполнение следующих условий [20]:

У1. Вместе с каждым тоном высоты f шкала содержит тоны $2f$ и $f/2$.

У2. Вместе с каждым тоном высоты f шкала также содержит тон $3f$.

У3. Шкала допускает транспонирование мелодии без искажения на любой тон шкалы.

Обоснование условий У1-У3 дается в п. 5. Пусть теперь в пределах одной октавы шкала разбита на тоны следующим образом:

$$f = f_0 < f_1 < f_2 < \dots < f_{m-1} < f_m = 2f \quad (15)$$

Последовательность тонов (15) образует мелодию, которую транспонируем вверх без искажения так, чтобы нижний тон f_0 поднялся до f_1 . Тогда мелодия будет начинаться с тона f_1 и закан-

чиваться тоном f_{m+1} в октаву выше f_1 и, так как транспонирование происходит без искажений, то выполняются равенства $f_1/f_0 = f_2/f_1, f_2/f_1 = f_3/f_2, \dots, f_m/f_{m-1} = f_{m+1}/f_m$, откуда

$$f_1/f_0 = f_2/f_1 = f_3/f_2 = \dots = f_m/f_{m-1} = f_{m+1}/f_m, \quad (16)$$

то есть высота тонов в последовательности (15) образует геометрическую прогрессию с некоторым знаменателем q . Отсюда следует $f_m = q^m f_0 = 2f_0 \cdot q^m = 2$. Следовательно, шкала полностью определяется, если установлено число ступеней m , на которые разбивается октава (15).

В силу условий У1; У2, видим, что вместе с высотой тона f шкала (15) должна содержать ступень с высотой $3f/2$, причем эта ступень лежит в промежутке $(f; 2f)$. Поэтому число ступеней m в октаве (15) должно выбираться так, чтобы одна из промежуточных степеней совпала со ступенью $3f/2$. Для определения соответствующего условия для m члены последовательности (15) прологарифмируем, что приводит к арифметической прогрессии вида:

$$\log_2 f_0; \log_2 f_1; \dots; \log_2 f_m \quad (17)$$

с разностью $\log_2 = 1/m$. Пусть теперь k -я ступень в последовательности (15) имеет высоту $3f/2$. Тогда для определения m получается уравнение:

$$\log_2 3/2 = k/m. \quad (18)$$

Но уравнение (18) решений не имеет, поскольку справа стоит рациональная дробь, а слева – иррациональное число. Это означает, что условие У3, равносильное равномерности логарифмической шкалы тонов (17), вступает в противоречие с условием У2, которое эквивалентно наличию чистых квинт в последовательности (15) и, следовательно, от одного из них необходимо отказаться. Проще отказаться от чистых квинт, поскольку стоящий слева в (18) логарифм $\log_2 3/2 \approx 0,585$ с достаточной точностью аппроксимируется подходящей цепной дробью $[0, 1, 1, 2, 2, \dots] = 7/12 \approx 0,583$, что дает $m=12$. Таким образом, искомая музыкальная шкала строится на логарифмической оси делением единичного отрезка на 12 равных частей точками:

$$\begin{aligned} 1/12 &= 0,083; 1/6 = 0,167; 1/4 = 0,25; 1/3 = 0,333; \\ 5/12 &= 0,418; 1/2 = 0,5; 7/12 = 0,583; \\ 2/3 &= 0,667; 3/4 = 0,75; 5/6 = 0,833; \\ 11/12 &= 0,917; 12/12 = 1,0 \end{aligned} \quad (19)$$

Последовательность (19) представляет темперированный строй музыкальной шкалы, в котором пифагорова комма равномерно «размазывается» по всем 12 полутонам хроматической гаммы и становится практически незаметной. В результате получается так называемый равномерно-

темперированный музыкальный строй вида, где $m = 1; 12$.

Впервые эта идея прозвучала в «Универсальной гармонии» М. Мерсенна (1588–1648) и примерно к 1700 г. осуществилась немецким органистом А. Веркмейстером (1645–1706). Равномерно темперированный музыкальный строй нашел понимание у И. С. Баха (1685–1750), который в связи с этим создал гениальное творение «Хорошо темперированный клавир» в 2-х частях (1722 и 1744 гг.), в котором продемонстрировал возможности 12-ступенного равномерно темперированного хроматического строя на всех 24 его тональностях (12 мажорных и 12 минорных). И хотя отклонения темперированных тонов от чистых консонансов незначительны, тем не менее, современник Баха выдающийся немецкий композитор Г. Ф. Гендель (1685–1759) не принял темперацию, так как испытывал раздражение от «смазанных» консонансов темперированной музыки. Едва уловимые диссонансы темперированного строя в дальнейшем болезненно ощущались П. И. Чайковским (1840–1893) и А. Н. Скрябиным (1871/72–1915).

7. Психологические аспекты слуховых ощущений человека

Результаты пп. 4–6 показывают, что в основе слуховых ощущений человека лежат принципы классической механики. В середине XIX в. этот вывод блестяще подтвердился опытами Г. Гельмгольца при исследовании психофизиологии слухового аппарата человека, которые были изложены в его работе 1865 г. «Учение о слуховых ощущениях» [8].

Согласно Г. Гельмгольцу [8], слуховые ощущения человека являются результатом воздействия на его слуховой рецептор звуковых волн, представляющих попеременное сгущение и разрежение воздуха. Величина воздействия звуковых волн на человека [15], в целом, характеризуется законом Вебера – Фехнера (ощущение пропорционально логарифму раздражения) и определяется параметрами звуковых колебаний, к которым относятся:

– *Амплитуда колебаний (громкость звука)* – снизу лимитирована пределом чувствительности человеческого уха $\sim 10^{-12} \text{ вт/м}^2$ (0 децибелл), а сверху ограничена болевым пределом $\sim 10 \text{ вт/м}^2$ (130 децибелл).

– *Частота колебаний (высота звука)* – наше ухо различает звуковые колебания в диапазоне 20–20000 гц.

– *Форма колебаний (тембр звука)* – характеризует источник звуковых колебаний.

Например, Н. А Римский-Корсаков так характеризует тембр деревянных духовых инструментов (табл. 1).

Таблица 1

Тембр деревянных духовых инструментов

Инструмент	Диапазон
Флейта	низкий, матовый, холодный
Гобой	дикий
Кларнет	звнящий, угрюмый
Фагот	грозный

Слуховые ощущения могут вызываться как периодическими колебательными процессами, так и аperiodическими – с изменяющейся частотой и амплитудой. В первом случае говорят о музыкальных звуках, а втором – об атональных звуках (шумах).

Способность определять направление распространения звука обусловлена бинауральным характером человеческого слуха, поскольку восприятие звука у людей с нормальным слуховым аппаратом происходит двумя ушами. Бинауральный эффект может быть фазовым и амплитудным. В первом случае направление звука обусловлено разностью фаз звуковой волны и имеет интерференционную природу; во втором – направление звука обусловлено разностью громкостей, получающихся в двух ушах.

Среди различных теорий человеческого слуха по сей день ведущее положение занимает резонансная теория Г. Гельмгольца [8, 10, 15]. Согласно этой теории, звуковые колебания, попадая в ушную раковину, достигают внутреннего уха и затем усиливаются в улитке, выполняющей роль резонатора, который представляет некую внутреннюю ушную полость, заполненную жидкостью. Благодаря резонансу звуковые колебания приводят в движение систему тонких волокон, которые натянуты во внутреннем ухе. Отдельные волокна, по сути, являются струнами, настроенными на различные тона в пределах от нижней до верхней границ слуха. Все это напоминает арфу или рояль, где более короткие волокна отвечают за восприятие высоких тонов, а более длинные – за восприятие низких. Число этих волокон колеблется в пределах 13–24 тысяч и практически совпадает с числом слуховых нервных окончаний (рецепторов) головного мозга. Это согласуется с данными по слуховой способности различения, позволяющей воспринимать тысячи ступеней тонов (примерно 11 октав), которые, посредством коди-

рования активности соответствующих нейронов мозга, реализуют процесс восприятия звуковой информации человеком [10].

Заключение

Таким образом, все указывает на то, что музыка в своем развитии дает толчок развитию математики, и наоборот. Формирование музыкальных канонов долгое время было связано с построением и обоснованием музыкального строя. Этот процесс завершился созданием темперированного строя (ок. 1700 г.) и построением общей теории колебаний струны в середине XVIII в. Одна из проблем при этом связана с разбиением единичного отрезка в геометрической прогрессии, которое не выражается рационально и приводит к рациональным приближениям действительных чисел. Другая сторона вопроса связана с описанием и моделированием механизма человеческого слухового восприятия в рамках теории Г. Гельмгольца. Все это реализует подходящий дидактический контент в области преподавания математики на гуманитарных направлениях ВПО.

Отметим, что французский композитор О. Мессиа́н (1908–1992 гг.) в своем «Трактате о ритме, цвете и орнитологии» [19] при формировании ритмики музыкальной композиции обращается к тонким построениям, связанным с использованием пермутаций симметрической группы 32-го и 64-го порядков. Представленный материал следует рассматривать как определенный дидактический контент для проведения интегрированных занятий в области «математической теории музыки» со студентами, специализирующимися в области искусствознания.

Библиографический список

1. Архангельский, С. И. Лекции по теории обучения в высшей школе [Текст] / С. И. Архангельский. – М.: Высшая школа, 1974. – 384 с.
2. Бунге, М. Философия физики [Текст] / М. Бунге. – М.: Прогресс, 1975. – 347 с.
3. Волошинов, А. В. Математика и искусство [Текст] / А. В. Волошинов. – М.: Просвещение, 2000. – 399 с.
4. Гайденок, П. П. История и рациональность [Текст] / П. П. Гайденок, Ю. Н. Давыдов. – М.: Политиздат, 1991. – 367 с.
5. Гильберт, Д. Основания математики. Теория доказательств [Текст] / Д. Гильберт, П. Бернайс. – М.: Наука, 1982. – 652 с.
6. Глушков, В. М. Кибернетика. Вопросы теории и практики [Текст] / В. М. Глушков. – М.: Наука, 1986. – 488 с.

7. Куснер, Ю. С. Принципы движения экономической системы [Текст] / Ю. С. Куснер, И. Г. Царев. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 200 с.

8. Лазарев, П. П. Гельмгольц [Текст] / П. П. Лазарев. – М.: Изд-во АН СССР, 1959. – 104 с.

9. Локк, Дж. Опыт о человеческом разумении. Сочинения. Т. 1 [Текст] / Дж. Локк. – М.: Мысль, 1985. – 622 с.

10. Марютина, Т. М. Введение в психофизиологию [Текст] / Т. М. Марютина, О. Ю. Ермолаев. – М.: Московский психосоциальный институт: Флинта, 2004. – 400 с.

11. Монахов, В. М. Теория педагогических технологий как необходимое условие их интеграции с информационными технологиями [Текст] / В. М. Монахов // Труды вторых Колмогоровских чтений. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2004. – С. 145–151.

12. Начала Евклида. Книги I–VI [Текст] / С комментариями Д. Д. Мордухай-Болтовского. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1948. – 448 с.

13. Пенроуз, Р. Новый ум короля: О компьютерах, мышлении и законах физики [Текст] / Р. Пенроуз. – М.: Едиториал УРСС, 2005. – 400 с.

14. Римский-Корсаков, Н. А. Основы оркестровки с партитурными образцами [Текст] / Н. А. Римский-Корсаков. – Петербург, 1913. – Т. 1.

15. Рубинштейн, С. Л. Основы общей психологии [Текст] / С. Л. Рубинштейн. – СПб.: Питер, 2005. – 713 с.

16. Рузавин, Г. И. О природе математического знания [Текст] / Г. И. Рузавин. – М.: Мысль, 1968. – 303 с.

17. Салий, В. Н. Математические основы гуманитарных знаний [Текст] / В. Н. Салий. – Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2006. – 308 с.

18. Фирстов, В. Е. Кибернетическая концепция и математические модели управления дидактическими процессами при обучении математике в школе и вузе [Текст] / В. Е. Фирстов. – Саратов: Издательский Центр «Наука», 2010. – 511 с.

19. Цареградская, Т. В. Время и ритм в творчестве Оливье Мессиа́на [Текст] / Т. В. Цареградская. – М.: Классика-XXI, 2002. – 376 с.

20. Шилов, Г. Е. Простая гамма (устройство музыкальной шкалы) [Текст] / Г. Е. Шилов. – М.: Физматгиз, 1963. – 20 с.

21. Штофф, В. А. Моделирование и философия [Текст] / В. А. Штофф. – М.-Л.: Наука, 1966. – 301 с.

22. Яглом, А. М. Вероятность и информация [Текст] / А. М. Яглом, И. М. Яглом. – М.: Наука, 1973. – 511 с.

Bibliograficheskiy spisok

1. Arhangel'skij, S. I. Lekcii po teorii obucheniia v vysshej shkole [Текст] / S. I. Arhangel'skij. – М.: Vysshaja shkola, 1974. – 384 s.
2. Bunge, M. Filosofija fiziki [Текст] / M. Bunge. – М.: Progress, 1975. – 347 s.
3. Voloshinov, A. V. Matematika i iskusstvo [Текст] / A. V. Voloshinov. – М.: Prosveshhenie, 2000. – 399 s.

4. Gajdenko, P. P. Istorija i racional'nost' [Tekst] / P. P. Gajdenko, Ju. N. Davydov. – M. : Po-litizdat, 1991. – 367 s.
5. Gil'bert, D. Osnovaniya matematiki. Teoriya dokazatel'stv [Tekst] / D. Gil'bert, P. Bernajs. – M. : Nauka, 1982. – 652 s.
6. Glushkov, V. M. Kibernetika. Voprosy teorii i praktiki [Tekst] / V. M. Glushkov. – M. : Nauka, 1986. – 488 s.
7. Kusner, Ju. S. Principy dvizheniya jekonomicheskoy sistemy [Tekst] / Ju. S. Kusner, I. G. Carev. – M. : FIZMATLIT, 2008. – 200 s.
8. Lazarev, P. P. Gel'mgol'c [Tekst] / P. P. Lazarev. – M. : Izd-vo AN SSSR, 1959. – 104 s.
9. Lokk, Dzh. Opyt o chelovecheskom razumenii. Sochineniya. T. 1 [Tekst] / Dzh. Lokk. – M. : Mysl', 1985. – 622 s.
10. Marjutina, T. M. Vvedenie v psihofiziologiju [Tekst] / T. M. Marjutina, O. Ju. Ermolaev. – M. : Moskovskij psihosocial'nyj institut: Flinta, 2004. – 400 s.
11. Monahov, V. M. Teoriya pedagogicheskikh tehnologij kak neobhodimoe uslovie ih integracii s informacionnymi tehnologijami [Tekst] / V. M. Monahov // Trudy vtoryh Kolmogorovskih chtenij. – Jaroslavl': Izd-vo JaGPU, 2004. – S. 145–151.
12. Nachala Evklida. Knigi I–VI [Tekst] / S kommentarijami D. D. Morduhaj-Boltovskogo. – M.-L. : GITTL, 1948. – 448 s.
13. Penrouz, R. Novyj um korolja: O komp'juterah, myshlenii i zakonah fiziki [Tekst] / R. Penrouz. – M. : Editorial URSS, 2005. – 400 s.
14. Rimskij-Korsakov, N. A. Osnovy orkestrovki s partiturnymi obrazcami [Tekst] / N. A. Rimskij-Korsakov. – Peterburg, 1913. – T. 1.
15. Rubinshtejn, S. L. Osnovy obshhej psihologii [Tekst] / S. L. Rubinshtejn. – SPb. : Piter, 2005. – 713 s.
16. Ruzavin, G. I. O prirode matematicheskogo znaniya [Tekst] / G. I. Ruzavin. – M. : Mysl', 1968. – 303 s.
17. Salij, V. N. Matematicheskie osnovy gumanitarnyh znaniy [Tekst] / V. N. Salij. – Saratov : Izd-vo Sarat. un-ta, 2006. – 308 s.
18. Firstov, V. E. Kiberneticheskaja koncepcija i matematicheskie modeli upravleniya didakticheskimi processami pri obuchenii matematike v shkole i vuze [Tekst] / V. E. Firstov. – Saratov : Izdatel'skij Centr «Nauka», 2010. – 511 s.
19. Caregradskaja, T. V. Vremja i ritm v tvorchestve Oliv'e Messiana [Tekst] / T. V. Caregradskaja. – M. : Klassika-XXI, 2002. – 376 s.
20. Shilov, G. E. Prostaja gamma (ustrojstvo muzykal'noj shkaly) [Tekst] / G. E. Shilov. – M. : Fiz-matgiz, 1963. – 20 s.
21. Shtoff, V. A. Modelirovanie i filosofija [Tekst] / V. A. Shtoff. – M.-L. : Nauka, 1966. – 301 s.
22. Jaglom, A. M. Veroyatnost' i informacija [Tekst] / A. M. Jaglom, I. M. Jaglom. – M. : Nauka, 1973. – 511 s.