УДК 372.08

В. В. Богун

Повышение мотивации студентов к изучению алгебраических уравнений на основе наглядного моделирования

Работа выполнена при поддержке РГНФ, проект № 14–26–20004,

в рамках государственного задания РФ по проекту №97

Для формирования полноценной и эффективной системы знаний, умений и навыков студентов вузов в процессе обучения математике необходимо применение различных видов информационно-коммуникационных технологий при реализации как аудиторных занятий (лекционные, практические или лабораторные занятия), так и самостоятельной деятельности учащихся. Например, для исследования различных математических объектов (пределы, производные, интегралы функции, дифференциальные уравнения и т. д.) информационно-коммуникационные технологии могут применяться для выполнения студентами различных приближенных вычислений на основе соответствующих расчетных алгоритмов с целью проведения сравнительного анализа применяемых численных методов решения поставленных математических и научно-исследовательских задач. В рамках предлагаемой статьи автором представлены необходимые составляющие для реализации учащимися в рамках аудиторных занятий по математике лабораторной работы и выполнения обучаемыми динамического расчетного проекта при изучении студентами вузов численных методов решения алгебраических уравнений с применением разработанного автором программного обеспечения. Выполнение учащимися соответствующей научно-исследовательской и самостоятельной учебной деятельности способствует развитию теоретического и практического мышления студентов, а также повышению мотивации учащихся при исследовании различных математических объектов в рамках изучения курса математики в вузе.

Ключевые слова: практическое мышление, решение алгебраических уравнений, программного обеспечение, дистанционные расчетные проекты.

V. V. Bogun

Increase of Students' Motivation to Study Algebraic Equations Based on Visual Modeling

Formation of the full-fledged and effective system of knowledge, skills of students of higher education institutions in the course of training Mathematics requires the use of different types of information and communication technologies at realization of lessons (lectures, practical or laboratory researches), and students' independent activity. For example, to research various mathematical objects (limits, derivatives, function integrals, differential equations, etc.) information and communication technologies can be applied by students to perform various approximate calculations on the basis of the corresponding settlement algorithms with the purpose to carry out the comparative analysis of the applied numerical methods in solution of the set mathematical and research tasks. Within the offered article the author presented necessary components for realization of laboratory work and performance of the dynamic settlement project by students within Mathematics lessons when students of higher education institutions study numerical methods to solve algebraic equations with the use of the software developed by the author. Realization of the related research and independent educational activity by students promotes development of students' theoretical and practical thinking, and also it increases students' motivation when they research various mathematical objects within studying the course of Mathematics in the higher education institution.

Keywords: practical thinking, solution of algebraic equations, software, remote settlement projects.

По состоянию на настоящее время основной целью обучения студентов в вузах является приобретение ими определенных теоретических знаний, а также практико-ориентированных умений и навыков, необходимых для реализации будущей профессиональной деятельности. Применение различных информационно-коммуникационных технологий [6] в процессе обучения математике способствует повышению мотивации студентов к обучению [7] в силу возможностей оперативного решения сложных математических задач с проведением сравнительного анализа зависимостей значений промежуточных и итоговых результатов от значений исходных данных и наглядного представления информации. Также использование информационных средств необходимо для формирования у студентов навыков практического мышления [8], поскольку реализация комплексных расчетов осуществляется по определенным планам и соответствующим алгоритмам, включающим интегрированные арифметические и логические операции, которые основываются на применении необходимых законов с использованием символьно-формульной записи.

Рассмотрим основные компоненты учебной деятельности студентов вузов при реализации численных методов решения алгебраических уравнений с применением разработанного автором программного обеспечения. Представим описание основных методических и дидактических компонентов лабораторной работы и динамического расчетного проекта с применением персонального компьютера.

Теоретический аспект

В силу сложности структуры символьной записи алгебраических уравнений задача по нахождению точных решений является весьма трудоемкой.

Рассмотрим численные методы приближенных решений алгебраических уравнений вида $f(x)=0$ с целью определения приближенного значения изолированного действительного корня x_n на отрезке $[x_{A0}, x_{B0}]$ с необходимой точностью ε.

Представим логические основы реализации метода половинного деления (дихотомии), комбинированного метода хорд и касательных (Ньютона) и метода золотой пропорции для выполнения приближенных решений алгебраических уравнений в зависимости от заданных значений x_{A0}, x_{B0}, ε.

Метод половинного деления (дихотомии)

Реализацию алгоритма метода половинного деления (дихотомии) можно представить в следующем виде:

1. Итерация с индексом *«0»*:

1.1. На искомом отрезке $[x_{A0}, x_{B0}]$ при соблюдении условий $x_{A0} < x_{B0}$ и $f(x_{A0}) \cdot f(x_{B0}) < 0$ выбирается точка x_{C0}^D, исходя из неравенства $x_{A0} < x_{C0}^D < x_{B0}$, в соответствии с принципами дихотомии, согласно следующему соотношению: $x_{C0}^D = \dfrac{x_{A0} + x_{B0}}{2}$.

1.2. Если достигнута истинность выражения $|x_{B0} - x_{A0}| < 2\varepsilon$, то итерации прекращаются, количество шагов итераций $s_\varepsilon^D = 0$ и в качестве приближенного значения действительного корня уравнения x_ε^D выбирается $x_\varepsilon^D = x_{C0}^D$ в силу равенства $x_{C0}^D = \dfrac{x_{A0} + x_{B0}}{2}$.

1.3. Если $|x_{B0} - x_{A0}| \geq 2\varepsilon$, то осуществляется переход к следующей итерации.

2. Итерация с индексом *«N»* $(N \geq 1)$:

2.1. Если $f\left(x_{C(N-1)}^D\right) \cdot f\left(x_{A(N-1)}^D\right) < 0$ и $f\left(x_{C(N-1)}^D\right) \cdot f\left(x_{B(N-1)}^D\right) > 0$, то $x_{AN}^D = x_{A(N-1)}^D$, $x_{BN}^D = x_{C(N-1)}^D$,

$x_{BN}^D - x_{AN}^D = x_{C(N-1)}^D - x_{A(N-1)}^D = \dfrac{x_{B(N-1)}^D - x_{A(N-1)}^D}{2}$ и получаем отрезок $\left[x_{AN}^D, x_{BN}^D\right] = \left[x_{A(N-1)}^D, x_{C(N-1)}^D\right]$.

2.2. Если $f\left(x_{C(N-1)}^D\right) \cdot f\left(x_{B(N-1)}^D\right) > 0$ и $f\left(x_{C(N-1)}^D\right) \cdot f\left(x_{B(N-1)}^D\right) < 0$, то $x_{AN}^D = x_{C(N-1)}^D$, $x_{BN}^D = x_{B(N-1)}^D$,

$x_{BN}^D - x_{AN}^D = x_{B(N-1)}^D - x_{C(N-1)}^D = \dfrac{x_{B(N-1)}^D - x_{A(N-1)}^D}{2}$ и получаем отрезок $\left[x_{AN}^D, x_{BN}^D\right] = \left[x_{C(N-1)}^D, x_{B(N-1)}^D\right]$.

2.3. На отрезке $\left[x_{AN}^D, x_{BN}^D\right]$ при соблюдении условий $x_{AN}^D < x_{BN}^D$ и $f\left(x_{AN}^D\right) \cdot f\left(x_{BN}^D\right) < 0$ выбирается точка x_{CN}^D, исходя из неравенства $x_{AN}^D < x_{CN}^D < x_{BN}^D$, в соответствии с принципами дихотомии, согласно следующему соотношению: $x_{CN}^D = \dfrac{x_{AN}^D + x_{BN}^D}{2}$.

2.4. Если достигнута истинность выражения $\left|x_{BN}^D - x_{AN}^D\right| < 2\varepsilon$, то итерации прекращаются, количество шагов итераций $s_\varepsilon^D = N$ и в качестве приближенного значения действительного корня уравнения x_ε^D выбирается $x_\varepsilon^D = x_{CN}^D$ в силу равенства $x_{CN}^D = \dfrac{x_{AN}^D + x_{BN}^D}{2}$.

2.5. Если $\left|x_{BN}^D - x_{AN}^D\right| \geq 2\varepsilon$, то осуществляется переход к следующей итерации.

Комбинированный метод хорд и касательных (Ньютона)

Комбинированный метод хорд и касательных (Ньютона) имеет следующую реализацию:

1. Итерация с индексом *«0»:*

1.1. На искомом отрезке $\left[x_{A0}, x_{B0}\right]$ при соблюдении условий $x_{A0} < x_{B0}$, $f(x_{A0})\cdot f(x_{B0}) < 0$, $f'(x_{A0})\cdot f''(x_{A0}) > 0$, $f'(x_{B0})\cdot f''(x_{B0}) > 0$ выбирается точка с координатами $\left(x_{C0}^{CT}, f\left(x_{C0}^{CT}\right)\right)$, из которой проводится первая касательная к графику исходной функции $f(x)$.

1.2. Если $f(x_{A0})\cdot f''(x_{A0}) > 0$ и $f(x_{B0})\cdot f''(x_{B0}) < 0$, то $x_{C0}^{CT} = x_{A0}$.

1.3. Если $f(x_{A0})\cdot f''(x_{A0}) < 0$ и $f(x_{B0})\cdot f''(x_{B0}) > 0$, то $x_{C0}^{CT} = x_{B0}$.

1.4. Если достигнута истинность выражения $\left|x_{B0} - x_{A0}\right| < 2\varepsilon$, то итерации прекращаются, количество шагов итераций $s_{\varepsilon}^{CT} = 0$ и в качестве приближенного значения действительного корня уравнения x_{ε}^{CT} выбирается $x_{\varepsilon}^{CT} = \dfrac{x_{A0} + x_{B0}}{2}$.

1.5. Если $\left|x_{B0} - x_{A0}\right| \geq 2\varepsilon$, то осуществляется переход к следующей итерации.

2. Итерация с индексом *«N»* $(N \geq 1)$:

2.1. Если $x_{C0}^{CT} = x_{A0}$, то на отрезке $\left[x_{A(N-1)}^{CT}, x_{B(N-1)}^{CT}\right]$ выбираются точки x_{AN}^{CT} и x_{BN}^{CT} с соблюдением условия $x_{A(N-1)}^{CT} < x_{AN}^{CT} < x_{BN}^{CT} < x_{B(N-1)}^{CT}$, согласно следующим соотношениям:

$$x_{AN}^{CT} = x_{A(N-1)}^{CT} - \frac{f\left(x_{A(N-1)}^{CT}\right)}{f'\left(x_{A(N-1)}^{CT}\right)}$$ и

$$x_{BN}^{CT} = x_{B(N-1)}^{CT} - f\left(x_{B(N-1)}^{CT}\right)\cdot \frac{x_{A(N-1)}^{CT} - x_{B(N-1)}^{CT}}{f\left(x_{A(N-1)}^{CT}\right) - f\left(x_{B(N-1)}^{CT}\right)}.$$

2.2. Если $x_{C0}^{CT} = x_{B0}$, то на отрезке $\left[x_{A(N-1)}^{CT}, x_{B(N-1)}^{CT}\right]$ выбираются точки x_{AN}^{CT} и x_{BN}^{CT} с соблюдением условия $x_{A(N-1)}^{CT} < x_{AN}^{CT} < x_{BN}^{CT} < x_{B(N-1)}^{CT}$, согласно следующим соотношениям:

$$x_{BN}^{CT} = x_{B(N-1)}^{CT} - \frac{f\left(x_{B(N-1)}^{CT}\right)}{f'\left(x_{B(N-1)}^{CT}\right)}$$ и

$$x_{AN}^{CT} = x_{A(N-1)}^{CT} - f\left(x_{A(N-1)}^{CT}\right)\cdot \frac{x_{B(N-1)}^{CT} - x_{A(N-1)}^{CT}}{f\left(x_{B(N-1)}^{CT}\right) - f\left(x_{A(N-1)}^{CT}\right)}.$$

2.3. Если достигнута истинность выражения $\left|x_{BN}^{CT} - x_{AN}^{CT}\right| < 2\varepsilon$, то итерации прекращаются, количество шагов итераций $s_{\varepsilon}^{CT} = N$ и в качестве приближенного значения действительного корня уравнения x_{ε}^{CT} выбирается $x_{\varepsilon}^{CT} = \dfrac{x_{AN}^{CT} + x_{BN}^{CT}}{2}$.

2.4. Если $\left|x_{BN}^{CT} - x_{AN}^{CT}\right| \geq 2\varepsilon$, то осуществляется переход к следующей итерации.

Метод золотой пропорции

Реализацию алгоритма метода золотой пропорции можно представить в следующем виде:

1. Итерация с индексом *«0»:*

1.1. На искомом отрезке $\left[x_{A0}, x_{B0}\right]$ при соблюдении условий $x_{A0} < x_{B0}$ и $f(x_{A0})\cdot f(x_{B0}) < 0$ выбираются точки с абсциссами x_{C0}^{GP} и x_{D0}^{GP}, исходя из неравенства $x_{A0} < x_{C0}^{GP} < x_{D0}^{GP} < x_{B0}$, в соответствии с принципами золотой пропорции, согласно следующим соотношениям:

$$x_{C0}^{GP} = x_{A0} + \frac{x_{B0} - x_{A0}}{\varphi^2} = x_{B0} - \frac{x_{B0} - x_{A0}}{\varphi},$$

$$x_{D0}^{GP} = x_{A0} + \frac{x_{B0} - x_{A0}}{\varphi} = x_{B0} - \frac{x_{B0} - x_{A0}}{\varphi^2}.$$

1.2. Если достигнута истинность выражения $\left|x_{B0} - x_{A0}\right| < 2\varepsilon$, то итерации прекращаются, количество шагов итераций $s_{\varepsilon}^{GP} = 0$ и в качестве приближенного значения действительного корня уравнения x_{ε}^{GP} выбирается абсцисса $x_{\varepsilon}^{GP} = \dfrac{x_{A0} + x_{B0}}{2}$.

1.3. Если $\left|x_{B0} - x_{A0}\right| \geq 2\varepsilon$, то осуществляется переход к следующей итерации.

2. Итерация с индексом *«N»* $(N \geq 1)$:

2.1. Если $f\left(x_{A(N-1)}^{GP}\right)\cdot f\left(x_{C(N-1)}^{GP}\right) < 0$, то $x_{AN}^{GP} = x_{A(N-1)}^{GP}$, $x_{BN}^{GP} = x_{C(N-1)}^{GP}$, $x_{BN}^{GP} - x_{AN}^{GP} = x_{C(N-1)}^{GP} - x_{A(N-1)}^{GP}$ и получаем отрезок $\left[x_{AN}^{GP}, x_{BN}^{GP}\right] = \left[x_{A(N-1)}^{GP}, x_{C(N-1)}^{GP}\right]$.

2.2. Если $f\left(x_{C(N-1)}^{GP}\right)\cdot f\left(x_{D(N-1)}^{GP}\right) < 0$, то $x_{AN}^{GP} = x_{C(N-1)}^{GP}$, $x_{BN}^{GP} = x_{D(N-1)}^{GP}$,

$x_{BN}^{GP} - x_{AN}^{GP} = x_{D(N-1)}^{GP} - x_{C(N-1)}^{GP}$ и получаем отрезок $\left[x_{AN}^{GP}, x_{BN}^{GP}\right] = \left[x_{C(N-1)}^{GP}, x_{D(N-1)}^{GP}\right]$.

2.3. Если $f\left(x_{D(N-1)}^{GP}\right) \cdot f\left(x_{B(N-1)}^{GP}\right) < 0$, то $x_{AN}^{GP} = x_{D(N-1)}^{GP}$, $x_{BN}^{GP} = x_{B(N-1)}^{GP}$, $x_{BN}^{GP} - x_{AN}^{GP} = x_{B(N-1)}^{GP} - x_{D(N-1)}^{GP}$ и получаем отрезок $\left[x_{AN}^{GP}, x_{BN}^{GP}\right] = \left[x_{D(N-1)}^{GP}, x_{B(N-1)}^{GP}\right]$.

2.4. На искомом отрезке $\left[x_{AN}^{GP}, x_{BN}^{GP}\right]$ при соблюдении условий $x_{AN}^{GP} < x_{BN}^{GP}$ и $f\left(x_{AN}^{GP}\right) \cdot f\left(x_{BN}^{GP}\right) < 0$ выбираются точки с абсциссами x_{CN}^{GP} и x_{DN}^{GP}, исходя из неравенства $x_{AN}^{GP} < x_{CN}^{GP} < x_{DN}^{GP} < x_{BN}^{GP}$, в соответствии с принципами золотой пропорции, согласно следующим соотношениям:

$$x_{CN}^{GP} = x_{AN}^{GP} + \frac{x_{BN}^{GP} - x_{AN}^{GP}}{\varphi^2} = x_{BN}^{GP} - \frac{x_{BN}^{GP} - x_{AN}^{GP}}{\varphi},$$

$$x_{DN}^{GP} = x_{AN}^{GP} + \frac{x_{BN}^{GP} - x_{AN}^{GP}}{\varphi} = x_{BN}^{GP} - \frac{x_{BN}^{GP} - x_{AN}^{GP}}{\varphi^2}.$$

2.5. Если достигнута истинность выражения $\left|x_{BN}^{GP} - x_{AN}^{GP}\right| < 2\varepsilon$, то итерации прекращаются, количество шагов итераций $s_{\varepsilon}^{GP} = N$ и в качестве приближенного значения действительного корня уравнения x_{ε}^{GP} выбирается абсцисса $x_N^{GP} = \dfrac{x_{AN}^{GP} + x_{BN}^{GP}}{2}$.

2.6. Если $\left|x_{BN}^{GP} - x_{AN}^{GP}\right| \geq 2\varepsilon$, то осуществляется переход к следующей итерации.

Лабораторная работа по приближенным решениям алгебраических уравнений с использованием персонального компьютера

Лабораторная работа по реализации приближенных решений алгебраических уравнений с использованием метода половинного деления (дихотомии), комбинированного метода хорд и касательных (Ньютона), метода золотой пропорции для различных условий варьирования значений исходных данных с последующим проведением необходимых сравнительных анализов вычислительных процедур с применением программы для ЭВМ *«Исследование алгебраических уравнений с применением численных методов»* может быть разделена на два этапа [3].

I этап – «Приближенные решения алгебраических уравнений с использованием метода половинного деления (дихотомии), комбинированного метода хорд и касательных (Ньютона), метода золотой пропорции в зависимости от различных значений $\varepsilon > 0$ с применением программы для ЭВМ «Исследование алгебраических уравнений с применением численных методов»

На данном этапе преподаватель для каждой из малых групп студентов, сформированных на первом этапе, предлагает различные значения коэффициентов a, b, c, d исходного уравнения вида $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, значений x_{A0}, x_{B0}, а также несколько значений в рамках одной малой группы.

Студенты предварительно проводят анализ функции $f(x)$ на предмет выявления количества действительных изолированных корней уравнения $f(x) = 0$ и определения интервалов изоляции для действительных корней, а также по предлагаемым значениям концов одного из отрезков изоляции x_{A0} и x_{B0} реализуют итерации с индексами *«0»*, *«1»* и *«2»* согласно методу половинного деления (дихотомии), комбинированному методу хорд и касательных (Ньютона) и методу золотой пропорции.

После этого студенты проведут соответствующие необходимые расчеты с применением программы для ЭВМ *«Исследование алгебраических уравнений с применением численных методов»*.

II этап – «Сравнительный анализ методов половинного деления (дихотомии), комбинированного метода хорд и касательных (Ньютона), метода золотой пропорции в результате реализации приближенных решений алгебраических уравнений в зависимости от различных значений ε »

На данном этапе преподаватель для каждой из малых групп, сформированных на первом этапе, предлагает провести сравнительный анализ реализованных на втором этапе приближенных решений алгебраических уравнений в зависимости от различных значений ε .

Рассмотрим схему работы программы *«Исследование алгебраических уравнений с применением численных методов»*, реализующей задачу нахождения приближенных значений действительных корней x_{ε} алгебраических уравнений вида $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ по заданным значетакже значениям x_{A0}, x_{B0} и ε.

Описание программы *«Исследование алгебраических уравнений с применением численных методов»* приведем на примере приближенного решения уравнения $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ или $4x^3 - 8x^2 - 9x + 7 = 0$ с заданными значениями $\varepsilon = 0{,}03$, $x_{A0} = -9$ и $x_{B0} = -1$ в сопровождении скриншотов программы для ЭВМ.

По вводимым значениям исходных данных через единую визуальную форму осуществляется вывод в виде автоматически создаваемой статической интернет-страницы значений исходных данных, итоговых результатов вычислений, а также информации о значениях промежуточных результатов вычислений по методу половинного деления (дихотомии), комбинированному методу хорд и касательных (Ньютона) и методу золотой пропорции.

Самостоятельная работа студентов с использованием динамического расчетного проекта

Предлагаемый расчетный проект *«Приближенные решения алгебраических уравнений»* может быть реализован в рамках самостоятельной внеаудиторной работы студентов и используется в режимах демо-версии преподавателя и студента и непосредственно расчетного проекта студента, который он в итоге и должен выполнить в разработанной автором дистанционной системе динамических расчетных проектов, представленной на интернет-сайте www.bogun.yaroslavl.ru [1, 2, 4, 5]. В обоих случаях используются одинаковые программные алгоритмы и значения исходных данных, однако если в демо-режимах значения промежуточных и итоговых результатов рассчитываются автоматически, то в режиме расчетного проекта студента осуществляется непосредственный ввод учащимся значений данных параметров до тех пор, пока они не станут корректными, то есть пока текстовые поля ввода значений не заменятся записями соответствующих значений расчетных параметров.

Описание демо-версии дистанционного динамического расчетного проекта приведем на примере реализации дистанционной системой динамических расчетных проектов расчетов значений промежуточных и итоговых результатов вычислений при нахождении приближенных значений действительных корней x_ε для заданного алгебраического уравнения $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ или $3x^3 - 6x^2 - 9x + 5 = 0$ и параметров поиска $\varepsilon = 0{,}02$, $x_{A0} = 2$ и $x_{B0} = 6$ в сопровождении скриншотов программы для ЭВМ.

По автоматически сгенерированным дистанционной системой динамических расчетных проектов значениям исходных данных осуществляется вывод в виде автоматически создаваемой статической интернет-страницы полученных значений исходных данных, а также информации о рассчитанных значениях промежуточных и итоговых результатов вычислений по методу половинного деления (дихотомии), комбинированному методу хорд и касательных (Ньютона) и методу золотой пропорции.

Таким образом, применение персонального компьютера при реализации учебной деятельности студентов вузов в рамках лабораторной работы и самостоятельной деятельности при выполнении динамического расчетного проекта в процессе изучения численных методов решения алгебраических уравнений должно способствовать развитию у студентов навыков практического мышления и повышению мотивации к изучению математики.

Библиографический список

1. Богун, В. В. Дистанционные динамические расчетные проекты по исследованию функций вещественного переменного [Текст] : учебное пособие / В. В. Богун. – Ярославль : Изд-во ЯГПУ, 2014. – 143 с.
2. Богун, В. В. Информационные особенности динамической системы мониторинга дистанционных учебных проектов [Текст] / В. В. Богун // Ярославский педагогический вестник. – 2011. – № 1. – С. 185–193.
3. Богун, В. В. Лабораторный практикум по исследованию функций вещественного переменного с применением программ для ЭВМ [Текст] : учебное пособие / В. В. Богун. – Ярославль : Изд-во ЯГПУ, 2014. – 84 с.
4. Богун, В. В. Применение дистанционных расчетных проектов при обучении математике [Текст] / В. В. Богун // Высшее образование в России. – 2013. – № 5. – С. 114–119.
5. Богун, В. В. Реализация расчетных проектов при организации дистанционного обучения математике [Текст] / В. В. Богун // Компьютерные инструменты в образовании. – 2011. – № 6. – С. 33–37.
6. Информационные и коммуникационные технологии в образовании [Текст] : учеб.-метод. пособие / И. В. Роберт, С. В. Панюкова, А. А. Кузнецов, А. Ю. Кривцова. – М. : Дрофа, 2008. – 312 с.
7. Маркова, А. К. Формирование мотивации учения : кн. для учителя / А. К. Маркова, Т. А. Матис, А. Б. Орлов. – М. : Просвещение, 1990. – 192 с.
8. Теплов Б. М. Ум полководца [Текст] / Б. М. Теплов. – М. : Педагогика, 1990. – 208 с.

Bibliograficheskij spisok

1. Bogun, V. V. Distancionnye dinamicheskie raschetnye proekty po issledovaniju funkcij veshhestvennogo peremennogo [Tekst] : uchebnoe posobie / V. V. Bogun. – Jaroslavl' : Izd-vo JaGPU, 2014. – 143 s.
2. Bogun, V. V. Informacionnye osobennosti dinamicheskoj sistemy monitoringa distancionnyh uchebnyh proektov [Tekst] / V. V. Bogun // Jaroslavskij pedagogicheskij vestnik. – 2011. – № 1. – S. 185–193.
3. Bogun, V. V. Laboratornyj praktikum po issledovaniju funkcij veshhestvennogo peremennogo s primeneniem programm dlja JeVM [Tekst] : uchebnoe posobie / V. V. Bogun. – Jaroslavl' : Izd-vo JaGPU, 2014. – 84 s.
4. Bogun, V. V. Primenenie distancionnyh raschetnyh proektov pri obuchenii matematike [Tekst] / V. V. Bogun // Vysshee obrazovanie v Rossii. – 2013. – № 5. – S. 114–119.
5. Bogun, V. V. Realizacija raschetnyh proektov pri organizacii distancionnogo obuchenija matematike [Tekst] / V. V. Bogun // Komp'juternye instrumenty v obrazovanii. – 2011. – № 6. – S. 33–37.
6. Informacionnye i kommunikacionnye tehnologii v obrazovanii [Tekst] : ucheb.-metod. posobie / I. V. Robert, S. V. Panjukova, A. A. Kuznecov, A. Ju. Krivcova. – M. : Drofa, 2008. – 312 s.
7. Markova, A. K. Formirovanie motivacii uchenija : kn. dlja uchitelja / A. K. Markova, T. A. Matis, A. B. Orlov. – M. : Prosveshhenie, 1990. – 192 s.
8. Teplov B. M. Um polkovodca [Tekst] / B. M. Teplov. – M. : Pedagogika, 1990. – 208 s.