УДК 37

А. В. Ястребов

«Полуэкспериментальный» вывод формулы суммы внутренних углов невыпуклого многоугольника

Сумма внутренних углов выпуклого многоугольника вычисляется по хорошо известной формуле, изучаемой в школе. В то же время школьнику или студенту достаточно трудно найти полную информацию о сумме внутренних углов невыпуклого многоугольника. В статье показано, что известная формула применима не только к выпуклым, но и к невыпуклым многоугольникам. Особенность изложения состоит в том, что доказательство, как и положено, проводится дедуктивным методом, а вот его идея подсказана математическим экспериментом, проведенным в одной из интерактивных математических сред. Тем самым предложена методика приобщения студентов и школьников к постановке и решению математической задачи.

Ключевые слова: невыпуклый многоугольник, сумма внутренних углов, экспериментальная математика.

A. V. Yastrebov

«Quasi-Experimental» Development of the Formula of the Sum of Inside Angles of the Nonconvex Polygon

The sum of inside angles of the convex polygon is calculated due to the well-known formula studied at school. At the same time, it is rather difficult for a schoolchild or student to find full information on the sum of inside angles of the non convex polygon. In the article it is presented that the known formula is applicable not only to convex, but also to nonconvex polygons. The feature of the presentation consists that the proof, as well as it is necessary, is carried out by the deductive method, and its idea is prompted by the mathematical experiment made in one of interactive mathematical environments. Thereby the technique of introducing of schoolchildren and students with setting and solution of the mathematical task is offered.

Keywords: nonconvex polygon, sum of inside angles, experimental Mathematics.

Постановка задачи. Хорошо известно, что сумма Σ внутренних углов выпуклого n-угольника вычисляется по формуле

$$\Sigma = (n-2)\cdot 180^{\circ}. \qquad (1)$$

При этом идея ее доказательства проста и естественна: из какой-либо вершины проводятся всевозможные диагонали, которые разбивают многоугольник на $n-2$ треугольника, сумма углов которых и равна Σ.

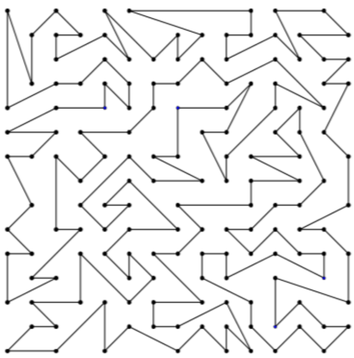

Рис. 1

При переходе к невыпуклым многоугольникам (например, к 150-угольнику на рис. 1 [1, с. 276]) становится непонятным, как разбить его на простые фигуры с известными суммами внутренних углов. Это означает, что следует искать какой-либо иной метод рассуждений. Ниже мы предложим такой метод и докажем следующую теорему.

Теорема. Сумма Σ внутренних углов невыпуклого n-угольника вычисляется по формуле (1).

Поиск идеи. По определению многоугольник является ломаной линией, обладающей некоторыми специальными свойствами. Почти очевидно, что в поисках метода следует «отступить назад» и начать изучение многоугольника с изучения ломаных линий.

Начнем с того, что с помощью интерактивной математической среды GeoGebra нарисуем четырехзвенную ломаную $ABCDE$ и измерим положительно ориентированные углы $\angle ABC$, $\angle BCD$ и $\angle CDE$ (рис. 2). Пользуясь инструментом «Переместить», подвигаем среднюю вершину C в разных направлениях.

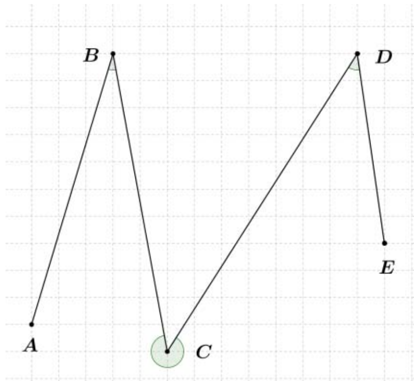

Рис. 2

Нетрудно заметить, что величины $\widehat{B}$, $\hat{C}$ и $\widehat{D}$ соответствующих углов изменяются по-разному. Если точка движется «на север», то величина $\hat{C}$ уменьшается, а величины $\widehat{B}$ и $\widehat{D}$ увеличиваются. Если точка движется «на юг», то величина $\hat{C}$ увеличивается, а величины $\widehat{B}$ и $\widehat{D}$ уменьшаются. Если точка движется вдоль отрезка $[CD]$, то величина $\widehat{D}$ не меняется, величина $\widehat{B}$ увеличивается, а величина $\hat{C}$ уменьшается. Подвигав точку в разных направлениях, мы убеждаемся, что если один из углов увеличивается, то, по крайней мере, один из оставшихся углов уменьшается, и обратно. Такая «противонаправленность» изменений порождает естественный вопрос о том, не компенсируется ли изменение одной из величин противоположным изменением двух оставшихся. Ответом на этот вопрос может служить *первое наблюдение:* если в строке ввода вычислить сумму величин $\widehat{B}$, $\hat{C}$ и $\widehat{D}$ и если перемещения точки «малы», то $\widehat{B}+\hat{C}+\widehat{D}=const$. Разумеется, пока мы не знаем, каков геометрический смысл константы и что означает словосочетание «малое перемещение».

Уточним первое наблюдение. Рассмотрим точку C' внутри отрезка $[BD]$ и на луче $[CC')$ отложим точку C'' на «небольшом расстоянии», то есть на таком, что отрезок $[CC'']$ не имеет общих точек с прямыми (AB) и (DE) (рис. 3). *Второе наблюдение* расширяет первое: если точка X движется вдоль отрезка $[CC'']$, то $\widehat{B}+\hat{X}+\widehat{D}=const$.

Третье наблюдение многокомпонентно. Во-первых, в тот момент, когда X совпадает с C', происходит вырождение четырехзвенной ломаной в ломаную с меньшим числом звеньев. Во-вторых, вершина ломаной C' становится «фиктивной вершиной» с углом 180° при ней. В-третьих, сумма углов остается постоянной вне зависимости от того, с какой стороны движущаяся точка X приближается к точке C'. Другими словами, не важно, какая ломаная вырождается в трехзвенную, то ли ломаная $ABC''DE$ с «выступом» $BC''D$, то ли ломаная $ABCDE$ со «впадиной» BCD.

Это последнее обстоятельство подсказывает нам ***основную идею*** доказательства: спрямлять, когда это можно, границы многоугольника, добавляя при этом фиктивные вершины. Повторимся: пока мы не знаем, что означает слово «можно» в данном контексте.

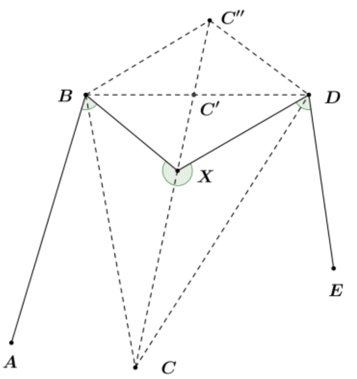

Рис. 3

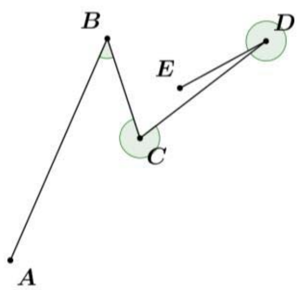

Рис. 4

Четвертое наблюдение показывает, что не все так просто. Например, если в ломаной на рис. 4 перемещать точку C, то мы обнаружим скачкообразное изменение константы $\hat{B} + \hat{C} + \hat{D}$. Подскок константы является однократным и происходит в тот момент, когда направление *изменяющегося* отрезка $[DC]$ совпадает с направлением *постоянного* отрезка DE. Это означает, что для корректного применения основной идеи необходимо уточнить все те понятия, которые в процессе наблюдений пока остались необъясненными. Сделаем это.

Необходимые термины и доказательство теоремы. Для дальнейшего изложения полезно рассматривать многоугольник как часть плоскости, ограниченной замкнутой ломаной линией, своего рода остров в океане. Расширим наш географический тезаурус с помощью четырех точных терминов: мыс, монолитный мыс, бухта, чистая бухта. Хотя эти термины не являются математическими, они будут полезны для дальнейшего доказательства.

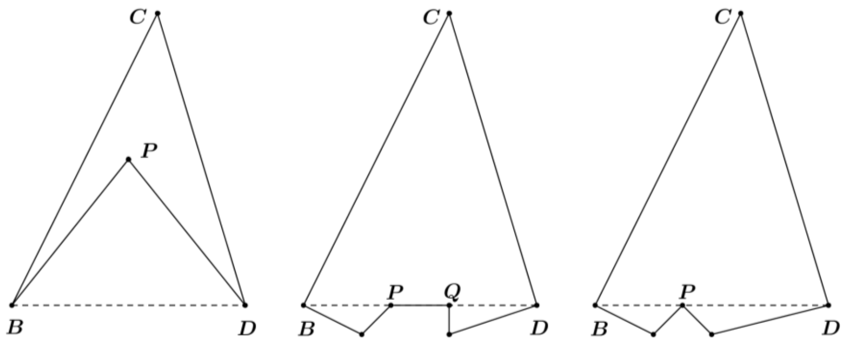

Рис. 5а, 5б, 5в

Определение 1. Будем говорить, что три последовательные вершины B, C, D многоугольника образуют *мыс* $\mathcal{M} = BCD$, если существует открытый круг ω с центром в точке C, такой, что пересечение круга ω с открытым треугольником ΔBCD состоит из внутренних точек изучаемого многоугольника.

Определение 2. Мыс $\mathcal{M} = BCD$ называется *монолитным,* если он обладает двумя свойствами: 1) все внутренние точки ΔBCD являются внутренними точками многоугольника; 2) все внутренние точки отрезка $[BD]$ являются внутренними точками многоугольника.

Невыпуклый четырехугольник на рис. 5а имеет три мыса: $\mathcal{M}_1 = BCD$, $\mathcal{M}_2 = CBP$ и $\mathcal{M}_3 = CDP$. Первый из них не является монолитным, поскольку точки ΔBDP не являются внутренними точками многоугольника. Два других мыса являются монолитными. Многоугольник на рис. 5б имеет мыс $\mathcal{M} = BCD$, который не является монолитным, поскольку его монолитность нарушается за счет отрезка $[PQ]$. Многоугольник на рис. 5в имеет мыс $\mathcal{M} = BCD$, который также не является монолитным, поскольку его монолитность нарушается за счет точки P.

Определение 3. Будем говорить, что три последовательные вершины B, C, D многоугольника образуют *бухту* $\mathcal{B} = BCD$, если существует открытый круг ω с центром в точке C, такой, что пересечение круга ω с открытым треугольником ΔBCD состоит из внешних точек изучаемого многоугольника.

Определение 4. Бухта $\mathcal{B} = BCD$ называется *чистой,* если она обладает двумя свойствами: 1) все внутренние точки ΔBCD являются внешними точками многоугольника; 2) все внутренние точки отрезка $[BD]$ являются внешними точками многоугольника.

Все бухты многоугольников на рис. 5а, 5б, 5в являются чистыми. Бухты $\mathcal{B} = BCD$ на рис. 6а, 6б, 6в не являются чистыми. В случае (а) ее чистоту нарушает ΔPQB, в случае (б) – отрезок $[BP]$, а в случае (в) – точка P.

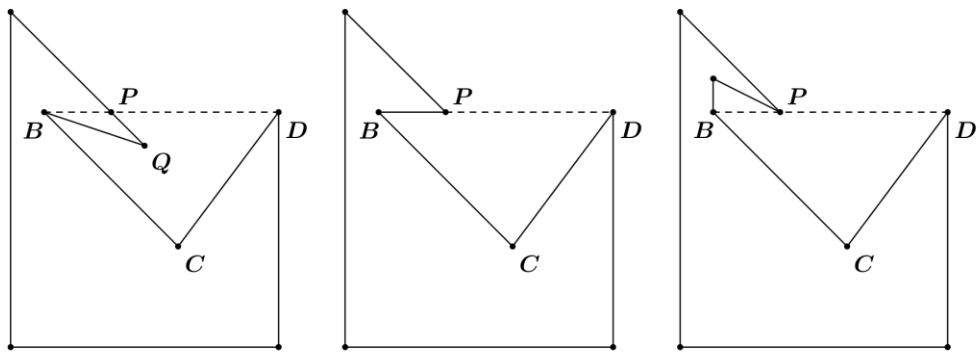

Рисунок 6а, 6б, 6в

Сформулируем два предложения, которые потребуются нам для доказательства теоремы.

Предложение 1. Каждый многоугольник имеет монолитный мыс или чистую бухту.

Доказательство. Если многоугольник является выпуклым, то каждый его мыс является чистым, и теорема доказана. Если многоугольник не является выпуклым, то он имеет бухту $\mathcal{B}_1$. Она либо чиста, либо не чиста. В первом случае теорема доказана. Во втором случае существует мыс $\mathcal{M}_1$, точки которого нарушают чистоту бухты. В свою очередь, мыс $\mathcal{M}_1$ либо является монолитным, либо нет. В первом случае теорема доказана, а во втором случае существует бухта $\mathcal{B}_2$, которая нарушает монолитность мыса $\mathcal{M}_1$. Продолжая эти рассуждения, мы получим последовательность бухт и мысов $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{M}_2$, …, которая является *конечной* в силу конечности числа вершин многоугольника. Таким образом, наша последовательность оканчивается либо монолитным мысом, либо чистой бухтой, что и доказывает предложение 1.

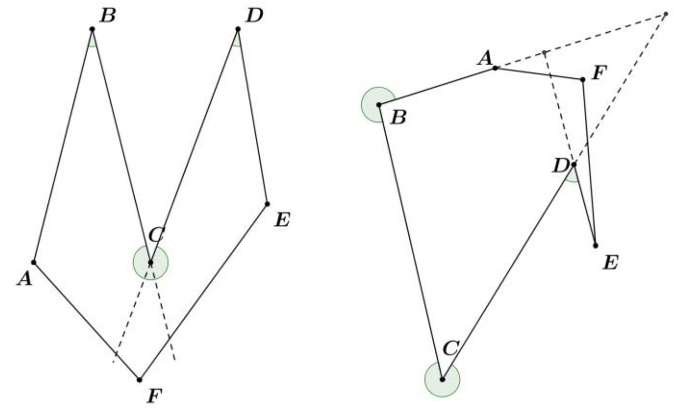

Рис. 7а и 7б

Предложение 2. 1) Пусть $ABCDE$ – пять последовательных вершин многоугольника, таких, что тройка $\mathcal{B} = BCD$ образует чистую бухту. Если точка X стартует из точки C и движется по чистой бухте, то $\widehat{B} + \widehat{X} + \widehat{D} = const$. 2) Пусть $ABCDE$ – пять последовательных вершин многоугольника, таких, что тройка $\mathcal{M} = BCD$ образует монолитный мыс. Если точка X стартует из точки C и движется по монолитному мысу, то $\widehat{B} + \widehat{X} + \widehat{D} = const$.

Доказательство. 1) Начнем с анализа движения точки X по чистой бухте. Легко видеть, что на плоскости существует такая точка F, что ломаная $ABCDEFA$ образует вспомогательный многоугольник, у которого изучаемые углы обладают одним из двух свойств: а) являются внутренними; б) являются внешними, то есть дополняют изучаемые углы до 360° (рис. 7а, 7б).

а) Пусть изучаемые углы являются внутренними углами вспомогательного многоугольника (рис. 8а). Проведем отрезки XA, XE и XF. Они разобьют вспомогательный многоугольник на четыре треугольника, сумма углов которых равна $4 \cdot 180^\circ = 720^\circ$. Получим, что $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{X} + \widehat{D} + \widehat{E} + \widehat{F} = 720^\circ$, откуда $\widehat{B} + \widehat{X} + \widehat{D} = 720^\circ - \widehat{A} - \widehat{E} - \widehat{F}$. При движении точки X все слагаемые правой части не изменяются, поэтому и левая часть постоянна.

б) Пусть изучаемые углы являются внешними углами вспомогательного многоугольника (рис. 8б). Обозначим меры его внутренних углов через $\breve{A}$, $\breve{B}$ и т. д. Проведем отрезки DA, DB и DF. Они разобьют вспомогательный многоугольник на четыре треугольника, сумма углов которых равна $4 \cdot 180^\circ = 720^\circ$. Получим, что $\breve{A} + \breve{B} + \breve{X} + \breve{D} + \breve{E} + \breve{F} = 720^\circ$, откуда $\breve{B} + \breve{X} + \breve{D} = 720^\circ - \breve{A} - \breve{E} - \breve{F}$. Вычитая это равенство из очевидного равенства $3 \cdot 360^\circ = 1080^\circ$, получим, что $(360^\circ - \breve{B}) + (360^\circ - X) + (360^\circ - \breve{D}) = 360^\circ + \breve{A} + \breve{E} + \breve{F}$, откуда $\widehat{B} + \widehat{X} + \widehat{D} = 360^\circ + \breve{A} + \breve{E} + \breve{F}$. При движении точки X все слагаемые правой части не изменяются, поэтому и левая часть постоянна.

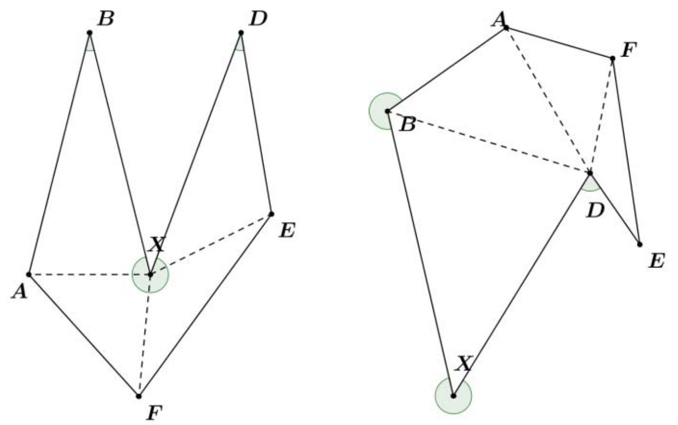

Рис. 8а, 8б

2) Анализ движения точки X по монолитному мысу полностью аналогичен анализу движения по чистой бухте.

Следствие. Пусть выполняются условия предложения 2 и точка C' является внутренней точкой отрезка $[BD]$. Тогда для ломаных $ABCDE$ и $ABC'DE$ имеет место равенство $\widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = \widehat{B} + \widehat{C'} + \widehat{D}$.

Доказательство очевидно: при $X = C$ получаем левую часть равенства, а при $X = C'$ получаем правую часть. Они равны между собой в силу постоянства суммы $\widehat{B} + \widehat{X} + \widehat{D}$.

Замечание 1. Формулировка и доказательство предложения 2 выявляют смысл терминов, которые оставались неясными в тот момент, когда делалось наше первое наблюдение. Так, смысл термина «малое перемещение» означает движение точки по чистой бухте или монолитному мысу, не выходящее за их пределы, а равенства

$\hat{B} + \hat{X} + \hat{D} = 720^\circ - \hat{A} - \hat{E} - \hat{F}$ и $\hat{B} + \hat{X} + \hat{D} = 360^\circ + \check{A} + \check{E} + \check{F}$ показывают, чему равна постоянная сумма углов при трех последовательных вершинах ломаной.

Замечание 2. При замене ломаной $ABCDE$ на ломаную $ABC'DE$ происходит уменьшение количества звеньев ломаной и появление фиктивных вершин, угол при которых равен 180°. Так, вершина C' неизбежно окажется фиктивной (рис. 9а). Возможно, фиктивной станет вершина B (рис. 9б), а возможно, что две вершины B и D (рис. 9в).

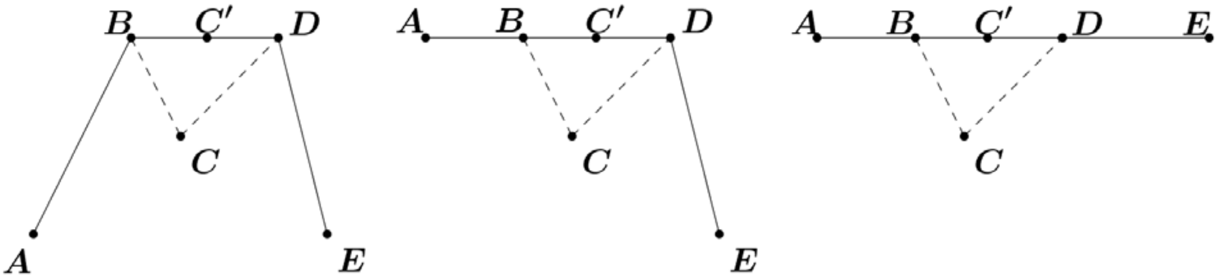

Рис. 9а, 9б, 9в

Доказательство теоремы. Воспользуемся методом математической индукции по количеству n сторон многоугольника.

1) В невыпуклом четырехугольнике проведем диагональ, содержащуюся в нем (рис. 5а). Она разобьет четырехугольник на два треугольника, сумма углов которых равна $2 \cdot 180^\circ$.

2) Предположим, что формула (1) верна для всех многоугольников, у которых количество сторон не превосходит $n-1$.

3) Рассмотрим невыпуклый n-угольник $\mathcal{P}$. Согласно предложению 1 он имеет чистую бухту $\mathcal{B} = BCD$ или монолитный мыс $\mathcal{M} = BCD$. В обоих случаях можно спрямить его границу, то есть заменить ломаную BCD на ломаную $BC'D$, где точка C' является внутренней точкой отрезка $[BD]$. При этом получится многоугольник $\mathcal{P}'$ с $n-k$ сторонами, где $k = 1,2,3$, и k фиктивными вершинами на новой стороне. Очевидно, что суммы углов многоугольников $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}'$ связаны равенством $\Sigma_{\mathcal{P}} = \Sigma_{\mathcal{P}'} + k \cdot 180^\circ$. По предположению индукции $\Sigma_{\mathcal{P}'} = (n-k-2) \cdot 180^\circ$, поэтому $\Sigma_{\mathcal{P}} = (n-2) \cdot 180^\circ$, что и доказывает теорему. Заметим, что метод спрямления границ можно применить к выпуклому многоугольнику. При этом мы получим треугольник, на сторонах которого расположены $n-3$ фиктивные вершины. Подсчет суммы углов даст известный результат.

Очевидно, что выпуклый многоугольник не имеет ни одной бухты. Возникает вопрос о том, существует ли невыпуклый многоугольник, не имеющий ни одного мыса. Ответ на этот вопрос дает следующее утверждение.

Следствие теоремы. Любой невыпуклый многоугольник имеет мыс.

Доказательство. Допустим, что все вершины многоугольника образуют бухты. Это означает, что каждый внутренний угол многоугольника больше 180°. В сочетании с формулой (1) получаем противоречивое неравенство $n \cdot 180^\circ < \Sigma = (n-2) \cdot 180^\circ$.

Заключительные замечания. Разумеется, формула (1) для невыпуклых многоугольников известна и приведена в энциклопедии [2, стб. 750]. При этом литературные источники, упомянутые в ней, не содержат доказательства этого факта. В книге [3, № 108, с. 37, 252–253] приведено индуктивное доказательство, основанное на идее разбиения изучаемого многоугольника на два других многоугольника с меньшим числом сторон. К сожалению, оно имеет пробел, а именно, не рассмотрен случай, когда разбивающий отрезок и прилежащая к нему сторона многоугольника имеют одинаковое направление.

Мы привели авторское доказательство с целью выявить единство теоретического и экспериментального начал математики. В нашем случае оно проявляется в виде целостной тройки разнохарактерных умственных действий: формулировки математической задачи, экспериментального поиска идеи доказательства, дедуктивного доказательства. Быть может, для читателя окажется интересным то обстоятельство, что образная, но строгая терминология играла существенную роль в наших рассуждениях.

Библиографический список

1. Курант, Р., Роббинс, Г. Что такое математика? [Текст] / Р. Курант, Г. Роббинс. – М. : Просвещение, 1967. – 558 с.

2. Математическая энциклопедия [Текст]. – Т. 3. – М. : Советская энциклопедия, 1982. – 1184 стб.

3. Шклярский, Д. О., Ченцов, Н. Н., Яглом, И. М. Избранные задачи и теоремы планиметрии [Текст] / Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом. – М. : Наука, 1967. – 336 с.

Bibliograficheskij spisok

1. Kurant, R., Robbins, G. Chto takoe matematika? [Tekst] / R. Kurant, G. Robbins. – M. : Prosveshhenie, 1967. – 558 s.

2. Matematicheskaja jenciklopedija [Tekst]. – T. 3. – M. : Sovetskaja jenciklopedija, 1982. – 1184 stb.

3. Shkljarskij, D. O., Chencov, N. N., Jag-lom, I. M. Izbrannye zadachi i teoremy planimetrii [Tekst] / D. O. Shkljarskij, N. N. Chencov, I. M. Jaglom. – M. : Nauka, 1967. – 336 s.