УДК 37

Г. Г. Хамов, Л. Н. Тимофеева

Методика конструирования арифметических задач при изучении теоретико-числовых тем

В статье на примере теоретико-числового содержания показаны возможности обучения студентов математических факультетов методам составления задач. Это позволит студентам подготовить выпускную квалификационную работу, отвечающую современным требованиям, в соответствии с которыми все работы проходят проверку в системе «Антиплагиат» на объем заимствования. При этом минимальный процент оригинального текста в выпускных квалификационных работах студентов, обучающихся по программам бакалавриата, – 60 %, по программам магистратуры и специалитета – 70 %.

В работе рассмотрен один из способов составления задач арифметического содержания, использующий метод исследования возможных остатков от деления целочисленных алгебраических выражений, содержащих переменные, на натуральное число, называемое делителем. На примере некоторых из возможных делителей показан процесс конструирования общего вида неопределенных (диофантовых) уравнений, содержащих параметры, с помощью которых могут быть получены многочисленные примеры с конкретными числовыми данными. Приводится также вариант составления неопределенных уравнений, содержащих факториал переменной.

Составленные задачи могут формулироваться в виде неопределенных уравнений, решаемых в натуральных или целых числах, либо в текстовой форме. Пример текста приведен в статье.

Ключевые слова: целые числа, натуральные числа, свойства делимости, деление с остатком, неопределенное уравнение, факториалы, неопределенные уравнения с факториалами.

G. G. Khamov, L. N. Timofeeva

Method of Designing of Arithmetic Problems when Studying Number-Theoretic Content

The article presents, on the example of the number-theoretic content, the possibilities of training students of mathematical faculties of the methods of preparation tasks. This will enable students to prepare the final qualification work meeting the modern requirements, in accordance with which all work is tested by the «Antiplagiat» system on the borrowing volume. The minimum percentage of the original text in final qualifying works of students enrolled in undergraduate is 60 %, under master's programmes and specialities it is 70 %.

The paper considers one of the ways of completing tasks arithmetic content using the research method of possible residue of division of integer algebraic expressions containing variables, natural number, called the divisor. For example, some of the possible divisors show the process of designing the General form of undetermined (Diophantine) equations that contain the parameters with the help of which numerous examples with specific numerical data can be obtained. Also it provides the option of writing undetermined equations containing the factorial variable.

Structured problems can be formulated in the form of undetermined equations solved in natural or integer numbers, or in the text form. The example of the text is given in the article.

Keywords: whole numbers, natural numbers, properties of divisibility, division with remainder, indefinite equation, factorials, indefinite equation containing a factorial.

В соответствии с «Порядком проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета и программам магистратуры», утвержденным приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 29 июня 2015 г., № 636, все выпускные квалификационные работы проходят проверку на объем заимствования в системе «Антиплагиат».

Одно из направлений подготовки студентов-математиков к написанию работ, соответствующих требованиям данного приказа: с помощью изучаемого материала научить их создавать собственные математические конструкции (примеры, задачи, уравнения, системы уравнений и др.) [1–3]. Опишем один из методов конструирования задач арифметического характера, который может быть освоен студентами при изучении теоретико-числовых тем.

При решении задач в теории делимости целых чисел часто используется теорема о делении с остатком и исследуются возможные остатки от деления чисел, определяемых алгебраическим выражением с переменными, на некоторое натуральное число (3, 5, 7, 8, 9 и др.), то есть делитель.

Рассмотрим, например, задачу: могут ли числа вида $5x+2016$, $2016x+5$ быть квадратом, кубом целого числа? Задача сводится к решению в целых числах уравнений:

$$5x+2016=y^2,\ 5x+2016=y^3, \qquad (1)$$

$$2016x+5=y^2,\ 2016x+5=y^3. \qquad (2)$$

Для решения уравнений (1) исследуем возможные остатки от деления квадрата y^2, куба y^3 на 5: y^2 при делении на 5 может давать остатки 0; 1; 4, а y^3 – все пять остатков. Так как число 2016 при делении на 5 дает остаток 1, то уравнения (1) разрешимы в целых числах. Число y^2 дает остаток 1, если $y=5t\pm1$, t – целое число, а y^3 дает остаток 1, если $y=5z+1$, z – целое число. Подставляя в уравнение, получим множество решений:

$5x+2016=y^2$, $\begin{cases} x=5t^2\pm2t-403 \\ y=5t\pm1 \end{cases}$, t – целое число, знак в формулах одинаков.

$5x+2016=y^3$, $\begin{cases} x=25z^3+15z^2+3z-403 \\ y=5z+1 \end{cases}$, z – целое число.

Для решения уравнений (2) надо определить число, относительно которого будем исследовать возможные остатки от деления их обеих частей. Исследуем возможные остатки от деления y^2, y^3 на 9 (число 2016 делится на 9, следовательно, левая часть при делении на 9 даст остаток 5): y^2 может давать остатки 0; 1; 4; 7, y^3 – 0; 1; 8. Оба уравнения (2) в целых числах неразрешимы.

Разберем процесс составления такого вида задач. В формулу, вытекающую из теоремы о делении с остатком $a=bg+r$, a – делимое, b – делитель, g – частное, r – остаток, вводим переменные: вместо a берется степень переменной y (y^2, y^3, y^4); вместо частного g – другая переменная x в первой степени (при составлении неразрешимого уравнения показателем степени переменной x может быть любое натуральное число); делитель b заменяем числом, при делении на которое обеих частей уравнения будет производиться исследование возможных остатков (перед выбором делителя вычисляются возможные остатки от деления квадрата, куба и т. д. целого числа на этот делитель); вместо остатка r подбирается конкретное число, остаток от деления которого на выбранный делитель определяет, разрешимо или неразрешимо будет составленное уравнение. Заметим, что в уравнении (1) делитель выделен явно, а в уравнениях (2) неявно. В последнем случае составлять уравнение следует заведомо неразрешимое, так как для определения его разрешимости надо находить возможные остатки от деления на само число (в уравнениях (2) на 2016).

Выберем для составления уравнений в качестве делителя, например, число 7. Квадрат целого числа y^2 при делении на 7 может давать остатки 0; 1; 2; 4, а куб y^3 – 0; 1; 6. Поэтому уравнения вида

$$y^2\pm7x^n=7z+r,\ r=3;5;6; \qquad (3)$$

$$y^3\pm7x^n=7z+r,\ r=2;3;4;5 \qquad (4)$$

в целых числах $x;y;z$ неразрешимы.

При $r=0;1;2$ и $n=1$ уравнения (3) имеют бесконечное множество решений. Уравнения (4) имеют бесконечное множество решений при $n=1$ и $r=0;1;6$ (заметим, что при $n>1$ установить наличие целых решений уравнений (3) и (4), в данном случае методом остатков, чаще всего, не представляется возможным).

Для составления конкретных уравнений с помощью формул (3), (4) достаточно придать z, r конкретные значения. Например, в уравнении (3) полагаем $z=288$, $r=1$, получим уравнение $y^2-7x=2017$, множество решений которого:

$\begin{cases} x=7t^2\pm2t-288 \\ y=7t\pm1 \end{cases}$, t – целое число, знак в формулах одинаков.

Далее исследуем возможные остатки от деления на 7 чисел вида ay^2, ay^3, где $a=2;3;4;5;6$, при этом используется свойство: остатки от деления на одно и то же число произведения двух чисел и произведения их остатков равны.

Это позволит составлять уравнения вида

$$(7t+r_1)y^2\pm7x^n=7z+r_2, \qquad (5)$$

$$(7t+r_1)y^3\pm7x^n=7z+r_2. \qquad (6)$$

Исходя из результатов исследования, получим:

− Уравнения (5) имеют бесконечное множество решений, если $n=1$; $r_1=1;2;4$; $r_2=0;1`;2;4$ или $r_1=3;5;6$; $r_2=0;3;5;6$.

Пример: $3y^2 - 7x = 5$, множество решений $\begin{cases} x = 21k^2 \pm 12k + 1 \\ y = 7k \pm 2 \end{cases}$, k – целое число, знак в формулах одинаков.

– Уравнения (5) неразрешимы, если n – натуральное число, $r_1 = 0; 1; 2; 4$, $r_2 = 3; 5; 6$ или $r_1 = 0; 3; 5; 6$, $r_2 = 1; 2; 4$.

Пример: $2015y^2 - 7x^{2016} = 2017$.

– Уравнения (6) имеют бесконечное множество решений, если $n = 1$; $r_1 = 1; 6$; $r_2 = 0; 1; 6$, или $r_1 = 2; 5$; $r_2 = 0; 2; 5$, или $r_1 = 3; 4$; $r_2 = 0; 3; 4$.

Пример: $6y^3 - 7x = 2017$, множество решений $\begin{cases} x = 294k^3 + 378k^2 + 162k - 265 \\ y = 7k + 3 \end{cases}$,

$\begin{cases} x = 294k^3 + 630k^2 + 450k - 181 \\ y = 7k + 5 \end{cases}$,

$\begin{cases} x = 294k^3 + 756k^2 + 648k - 103 \\ y = 7k + 6 \end{cases}$, k – целое число.

– Уравнения (6) неразрешимы, если n – натуральное число, $r_1 = 0; 1; 6$; $r_2 = 2; 3; 4; 5$, или $r_1 = 0; 2; 5$; $r_2 = 1; 3; 4; 6$, или $r_1 = 0; 3; 4$; $r_2 = 1; 2; 5; 6$.

Пример: $3y^3 - 7x^n = 5$.

Заметим, что при составлении неразрешимых уравнений вместо делителя (в нашем случае число 7) можно брать любое число, делящееся на этот делитель. Например, полагаем в формуле (6): $t = 0$, $r_1 = 5$, $r_2 = 6$, $z = 287$, вместо числа 7 берем 2016; получаем уравнение

$$5y^3 - 2016x^n = 2015.$$

Уравнения (3)–(6) можно усложнить, заменив y^2, y^3 выражениями вида $y^2 + ay$, $y^3 + ay^2 + by$.

Пример: $y^2 - 2y - 7x = 2016 \Leftrightarrow (y-1)^2 - 7x = 2017 \Leftrightarrow y - 1 \equiv \pm 1 (\mathrm{mod}\, 7)$.

Множество решений:

$\begin{cases} x = 7k^2 + 2k - 288 \\ y = 7k + 2 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 7k^2 - 2k - 288 \\ y = 7k \end{cases}$,

k – целое число.

Аналогично составляются задачи с другим делителем (3; 5; 6; 8; 9 и т. д.).

Рассмотренный нами метод может быть применен к исследованию остатков от деления чисел, определяемых выражениями вида $x^2 + y^2$, $ax^2 + by^2$, $x^3 + y^3$, $ax^3 + by^3$, $x^2 + y^2 + z^2$, $x^3 + y^3 + z^3$, $x^2 + y^2 + ax + by$, $x^3 + y^3 + ax^2 + by^2 + cx + dy$ и составлению соответствующих неопределенных уравнений, неразрешимых в целых числах.

Примеры:

1. $x^2 + y^2 = 8t + r$, $r = 3; 6; 7$.

2. $2x^3 + 5y^3 = 7t + r$, $r = 1; 6$.

3. $x^2 + y^2 + z^2 = 2016t + r$, $r = 7$, исследуются остатки от деления на 8.

4. $x^3 + y^3 + z^3 = 2016t + r$, $r = 4; 5$, исследуются остатки от деления на 9.

5. $x^2 + 2x + y^2 + 4y + z^2 - 2z = 8t + 1 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 8t + 7$.

6. $3x^3 - 9x^2 + 9x + 4y^3 + 12y^2 + 12y = 7t + r$, ($r = 1; 4$) $\Leftrightarrow 3(x-1)^3 + 4(y+1)^3 = 7t + r_1$, ($r = 2; 5$).

Придавая в примерах параметрам t, r конкретные числовые значения, получим многочисленные уравнения, неразрешимые в целых числах.

Метод остатков применим к решению и составлению неопределенных уравнений вида

$x! + a = y^2$, x, y – натуральные числа. (7)

Например, при $a = 48$ имеем уравнение $x! + 48 = y^2$, у которого при $x \geq 6$ левая часть делится на 3, но не делится на 9, а правая часть при делении на 3 обязательно делится и на 9. Следовательно, данное уравнение может иметь решения только при $1 \leq x \leq 5$. Непосредственной проверкой находим решение: $x = 1$, $y = 7$.

Полагаем в уравнении (7) $a = 3k + 2$, $k \geq 0$:

$x! + (3k + 2) = y^2$. (8)

Квадрат целого числа при делении на 3 может давать остатки 0; 1. Число, стоящее в левой части уравнения (8), при делении на 3 будет давать остаток 2, если $x \geq 3$. Поэтому уравнение (8) может иметь решения при $x = 1$ или $x = 2$.

При $x = 1$ получим уравнение $3k + 3 = y^2$, множество решений которого находится по формулам:

$$\begin{cases} y = 3t \\ k = 3t^2 - 1 \end{cases}, \ t \text{ – натуральное число.} \qquad (9)$$

Используя формулы (9), можно составлять уравнения вида (8) с конкретным числом k, которые будут разрешимы в натуральных числах x, y. Например, при $t = 2$: $k = 11$ и уравнение (8) примет вид:

$$x! + 35 = y^2, \qquad (10)$$

оно имеет одно решение в натуральных числах: $x = 1$, $y = 6$. Заметим, что надо проверить наличие решения уравнения (10) при $x = 2$.

Для составления уравнения вида (8) при условии, что $x = 2$, поступаем аналогично. Примеры:

$$x! + 23 = y^2,\ t = 2,\ k = 7;\ x = 2,\ y = 5.$$

$$x! + 47 = y^2,\ t = 2,\ k = 15;\ x = 2,\ y = 7.$$

Также с помощью формулы (8) можно составить уравнения, не имеющие решений:

$$x! + 29 = y^2;\ x! + 38 = y^2;\ x! + 68 = y^2.$$

Выбирая в уравнении (7) $a = 8k + r$ ($t \ge 0$, $r = 2; 3; 5; 6; 7$), убеждаемся, что при $x \ge 4$ полученное уравнение целочисленных решений иметь не будет, так как число вида $x! + (8k + r)$ при делении на 8 будет давать остатки, которые квадрат целого числа при делении на 8 давать не может.

Поэтому с помощью формулы

$$x! + (8k + r) = y^2,\ t \ge 0,\ r = 2; 3; 5; 6; 7 \qquad (11)$$

можно составить большое число уравнений, как разрешимых, так и не имеющих натуральных решений.

Например, в уравнении (11) возьмем $x = 3$, $r = 3$; получаем уравнение относительно k, y: $8k + 9 = y^2$, решения которого находятся по формулам:

$$\begin{cases} y = 8t \pm 1 \\ k = 8t^2 \pm 2t - 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} y = 8t \pm 3 \\ k = 8t^2 \pm 6t \end{cases}, \quad t \ge 1, \text{ знак в}$$

формулах одинаковый.

Примеры:

– $x! + 75 = y^2$ (решения $x = 3$, $y = 9$);

– $x! + 19 = y^2$ (решения $x = 3$, $y = 5$).

Если в уравнении (11) выбрать, например, $r = 5$, то получим неразрешимое уравнение $x! + 8k + 5 = y^2$ при любых $k \ge 0$.

Сконструированные задачи могут быть сформулированы либо в виде неопределенных уравнений, либо в текстовой форме, один из вариантов которой представлен в начале статьи.

При написании выпускной квалификационной работы, связанной с составлением задач, студенты смогут не только провести работу самостоятельного исследовательского характера, но и реализовать собственный интерес с учетом будущей педагогической деятельности. Это также позволит достигнуть в работе сочетания теоретической и практической составляющих научной работы.

Библиографический список

1. Хамов, Г. Г., Тимофеева, Л. Н. О методах составления некоторых типов задач и их использования как средства организации исследовательской деятельности студентов [Текст] / Г. Г. Хамов, Л. Н. Тимофеева // Наука и школа. Общероссийский научно-педагогический журнал: Изд-во Прометей МПГУ. – 2014. – № 1. – С. 48–51.
2. Хамов, Г. Г., Тимофеева, Л. Н. Использование теории многочленов для составления и решения диофантовых уравнений в процессе изучения теоретико-числового материала [Текст] / Г. Г. Хамов, Л. Н. Тимофеева // Ярославский педагогический вестник. – 2014. – № 4. – Том II. Психолого-педагогические науки. – С. 36–40.
3. Хамов, Г. Г., Тимофеева, Л. Н. О формировании мотивационно-ценностного компонента математической подготовки будущего учителя [Текст] / Г. Г. Хамов, Л. Н. Тимофеева // Ярославский педагогический вестник. – 2015. – № 5. – С. 108–112.

Bibliograficheskij spisok

1. Hamov, G. G., Timofeeva, L. N. O metodah sostavlenija nekotoryh tipov zadach i ih ispol'zovanija kak sredstva organizacii issledovatel'skoj dejatel'nosti studentov [Tekst] / G. G. Hamov, L. N. Timofeeva // Nauka i shkola. Obshherossijskij nauchno-pedagogicheskij zhurnal: Izd-vo Prometej MPGU. – 2014. – № 1. – S. 48–51.
2. Hamov, G. G., Timofeeva, L. N. Ispol'zovanie teorii mnogochlenov dlja sostavlenija i reshenija diofantovyh uravnenij v processe izuchenija teoretiko-chislovogo materiala [Tekst] / G. G. Hamov, L. N. Timofeeva // Jaroslavskij pedagogicheskij vestnik. – 2014. – № 4. – Tom II. Psihologo-pedagogicheskie nauki. – S. 36–40.
3. Hamov, G. G., Timofeeva, L. N. O formirovanii motivacionno-cennostnogo komponenta matematicheskoj podgotovki budushhego uchitelja [Tekst] / G. G. Hamov, L. N. Timofeeva // Jaroslavskij pedagogicheskij vestnik. – 2015. – № 5. – S. 108–112.