

ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

УДК 37

В. С. Секованов, Е. И. Смирнов, А. С. Бабенко, Е. М. Селезнева, А. О. Смирнова, Д. В. Елкин

Методика визуализации множества Жюлиа с использованием информационных технологий

В статье рассматривается множество Жюлиа рациональной функции $f(z) = z - \frac{z^2 + 1}{2z}$, включая доказательство ее хаотичности на своем множестве Жюлиа. При этом отображение f обладает существенной зависимостью от начальных условий, транзитивно и множество периодических точек f всюду плотно в L . Согласно определению хаоса по Девани, отображение f хаотично на L . С помощью математических методов доказывается, что это множество есть вещественная ось на комплексной плоскости. Исследуется характер неподвижных точек данной функции и хаотичность ее на своем

множестве Жюлиа. Разработан алгоритм построения множества Жюлиа функции $f(z) = z - \frac{z^2 + 1}{2z}$ с использованием информационных технологий. Указаны методические приемы изучения множества Жюлиа данной функции

$f(z) = z - \frac{z^2 + 1}{2z}$, что дает возможность обучаемым освоить интеграцию математических методов с ИКТ. Эта методика может позитивно влиять на развитие их мотивации к изучению математики и информатики, способствует развитию креативности и исследовательских компетенций.

Ключевые слова: нелинейность, множество Жюлиа, визуализация математических объектов, неподвижные и периодические точки, орбита точки, хаотичное отображение.

THEORY AND METHODOLOGY OF PROFESSIONAL EDUCATION

V. S. Sekovanov, E. I. Smirnov, A. S. Babenko, E. M. Selezniyova, A. O. Smirnova, D. V. Elkin

A Method of Visualization of Julia Set with Use of Information Technologies

In the article the Julia set of the rational function are considered $f(z) = z - \frac{z^2 + 1}{2z}$, including the proof of its randomness on the Julia set. At the same time the function f possesses essential dependence on entry conditions, transitive and the set of periodic points f is dense everywhere in L . According to the definition of chaos according to Devani function f is chaotic on L . By means of mathematical methods it is proved that this set is a material axis on the complex plane. Character of motionless points of this function and its randomness on the Julia set is investigated. The algorithm of creation of the Julia set of the

function $f(z) = z - \frac{z^2 + 1}{2z}$ with use of information technologies is developed. Methodical methods of studying of the Julia set of

the given function $f(z) = z - \frac{z^2 + 1}{2z}$ are specified that gives the chance to students to master integration of mathematical

methods with ICT. This method can positively influence the development of their motivation to study mathematics and informatics, promotes development of creativity and research competences.

Keywords: nonlinearity, Julia set, visualization of mathematical objects, motionless and periodic points, point orbit, chaotic display.

Множества Жюлиа появились в начале прошлого века в результате итерирования функций комплексной переменной. Исследования показали, что в большинстве случаев множества Жюлиа являются фракталами. В настоящее время интенсивно исследуются фрактальные множества на комплексной плоскости (см., например, [1–9]). Это связано с их использованием при создании математических моделей в физике, экономике и других науках. Полезны комплексные фракталы и для реализации дидактических целей, поскольку математические исследования органически переплетаются с разработкой алгоритмов, реализуемых с помощью современных информационных и коммуникационных технологий, включая параллельное программирование, что дает прекрасную возможность формирования креативности студентов и развития их исследовательских компетенций.

Следует отметить, что множества Жюлиа и множество Мандельброта часто рассматриваются в учебных пособиях и монографиях схематично, без пояснений, что вызывает затруднения у бакалавров и магистров при знакомстве с элементами фрактальной геометрии.

1. В настоящей работе мы предлагаем методику изучения множества Жюлиа для функции

$$f(z) = z - \frac{z^2 + 1}{2z},$$

включая доказательство ее хаотичности на своем множестве Жюлиа. Кроме того, в

работе поэтапно строится алгоритм построения множества Жюлиа с помощью информационных и коммуникационных технологий (ИКТ). Аналогичные подходы изучения множества Жюлиа для

$$\text{функции } f(z) = z - \frac{z^2 + 1}{2z}$$

нам неизвестны. Мы покажем, что множество Жюлиа для рациональной

$$\text{функции } f(z) = z - \frac{z^2 + 1}{2z} = \frac{z^2 - 1}{2z} = \frac{z}{2} - \frac{1}{2z}, \quad (z \in \bar{C}, \theta \in [0, 2\pi])$$

является вещественной осью ОХ.

Множество Жюлиа для полинома комплексного переменного $f(z)$, обозначаемое $J(f)$, определяется как $J(f) = \partial\{z : f^{(n)}(z) \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty\}$, где ∂ – граница области притяжения бесконечности, а $f^{(n)}(z) = f(f^{(n-1)}(z)), n = 1, 2, \dots$

Покажем, что множество Жюлиа для функции $h(z) = z^2$ есть окружность $|z| = 1$. На самом деле $h^{(1)}(z) = z^2$, $h^{(2)}(z) = (z^2)^2 = z^4 = z^2 \cdot z^2$. Так как $|z^4| = |z^2| \cdot |z^2| = 1$, то $|h^{(2)}(z)| = 1$. Следовательно, $h^{(2)}(z)$ находится на единичной окружности радиуса единичной длины с центром в начале координат. Аналогично можно проверить, что точки $h^{(3)}(z), h^{(4)}(z) \dots h^{(n)}(z) \dots$ также находятся на единичной окружности. Нетрудно проверить, что последовательность $h^{(n)}(z_0) = h(h^{(n-1)}(z_0)) = z_0^{2^n}$, $n = 1, 2, \dots$ стремится к ∞ , если $|z_0| > 1$. При $|z_0| < 1$ данная последовательность будет стремиться к 0 так, что в рассмотренном случае множеством Жюлиа будет окружность единичного радиуса с центром в начале координат.

Мы будем представлять множество Жюлиа рациональной функции как замыкание периодических отталкивающих точек. Справедливо следующее утверждение (см. [2]).

Теорема. Пусть f – полином n -й степени $n \geq 2$. Тогда следующие определения множества Жюлиа эквивалентны:

а) множество Жюлиа есть граница области притяжения всех притягивающих неподвижных точек функции f , включая ∞ ;

б) каждая отталкивающая периодическая точка принадлежит $J(f)$, и $J(f)$ является замыканием отталкивающих периодических точек для функции f .

Найдем для функции $h(z) = z^2$ множество Жюлиа, воспользовавшись пунктом б) вышеприведенной теоремы.

Как уже отмечалось, $h^{(n)}(z) = z^{2^n}$. Пусть периодические точки порядка $p = 1, 2, 3, \dots$ удовлетворяют уравнению $z^{2^p} = z$. Если $z \neq 0$, то, сократив на z , получим, что $z^{2^p-1} = 1$. Следовательно, имеется $2^p - 1$ периодических точек, образующих множество $B = \left\{ e^{\frac{2\pi i q}{2^p-1}} : 0 \leq q \leq 2^p - 2 \right\} = \left\{ \cos \frac{2\pi q}{2^p-1} + i \sin \frac{2\pi q}{2^p-1}, 0 \leq q \leq 2^p - 2 \right\}$. Все эти точки лежат на единичной окружности с центром в начале координат и распределены на ней равномерно. Поскольку $\left| \left(h(z)^{(p)} \right)' \right| = 2^p > 1$, то каждая ненулевая периодическая точка является отталкивающей. Совокупность всех периодических точек функции $h(z)$, очевидно, образует всюду плотное подмножество единичной окружности. Таким образом, согласно характеристическому свойству б), множеством Жюлиа является единичная окружность.

$$\text{Рассмотрим функцию } f(z) = z - \frac{z^2 + 1}{2z} = \frac{z^2 - 1}{2z} = \frac{z}{2} - \frac{1}{2z}.$$

Заметим, что $z_1 = i, z_2 = -i$ – нули функции $\lambda(z) = z^2 + 1$ являются неподвижными притягивающими точками функции $f(z) = z - \frac{z^2 + 1}{2z}$, поскольку $f(z_1) = z_1, f(z_2) = z_2$ и $f'(z) = 1 - \frac{4z^2 - 2z^2 - 2}{4z^2} = \frac{z^2 + 1}{2z^2}$.

Обозначим вещественную ось через L . Заметим, что если $z = rx \in L$, то $f(z) = \frac{rx}{2} - \frac{1}{2rx} \in L$.

Таким образом, точки z и $f(z)$ лежат на прямой L . Следовательно, если $z \in L$, то и $f(z) \in L$.

Рассмотрим теперь два отображения, каждое из которых является гомеоморфизмом комплексных плоскостей $\bar{Z} \rightarrow \bar{W} : w = \varphi(z) = \frac{z+i}{z-i}$ и $z = \varphi^{-1}(w) = \frac{(w+1)i}{w-1}$.

Пусть $l(w) = w^2$. Покажем тогда, что $l = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$ (то есть $w^2 = \varphi(f(\varphi^{-1}(w)))$). Пусть $w = w_0$.

Тогда $z_0 = \varphi^{-1}(w_0) = i \frac{w_0 + 1}{w_0 - 1}$. Далее получим

$$\begin{aligned} z_1 = f(z_0) &= f(\varphi^{-1}(w_0)) = \frac{z_0^2 - 1}{2 \cdot z_0} = \frac{(i)^2 \left(\frac{w_0 + 1}{w_0 - 1} \right)^2 - 1}{2 \frac{(w_0 + 1)i}{w_0 - 1}} = \\ &= \frac{i^2 \left(\frac{w_0^2 + 2w_0 + 1}{w_0^2 - 2w_0 + 1} \right) - 1}{2 \frac{(w_0 + 1)i}{w_0 - 1}} = \frac{-w_0^2 - 2w_0 - 1 - w_0^2 + 2w_0 - 1}{2 \frac{(w_0 + 1)i}{w_0 - 1}} = \frac{-(w_0^2 + 1)}{(w_0^2 - 1)i} = \frac{i(w_0^2 + 1)}{w_0^2 - 1}. \end{aligned}$$

$$\text{Далее имеем: } \varphi(f(\varphi^{-1}(w_0))) = \frac{i \frac{w_0^2 + 1}{w_0^2 - 1} + i}{i \frac{w_0^2 + 1}{w_0^2 - 1} - i} = \frac{w_0^2 + 1 + w_0^2 - 1}{w_0^2 + 1 - w_0^2 + 1} = w_0^2.$$

Таким образом, $\varphi(f(\varphi^{-1}(w))) = w^2$ для каждого $w \in \overline{C}$. Раньше мы установили, что множество Жюлиа для функции $h(z) = z^2$ есть окружность единичного радиуса с центром в начале координат комплексной плоскости C . Таким образом, изучение траекторий точки при отображении f сводится к изучению траектории точки при отображении $l(w) = w^2$.

Обозначим на расширенной комплексной плоскости через S – окружность радиуса единица с центром в начале координат.

Покажем, что отображение $z = \varphi^{-1}(w) = \frac{(w+1)i}{w-1}$ переводит данную окружность на вещественную прямую L . Чтобы убедиться в справедливости данного суждения, найдем образы трех точек при отображении $\varphi^{-1}(w) = \frac{(w+1)i}{w-1}$. Действительно, пусть $w = i$. Тогда $\varphi^{-1}(i) = \frac{i+1}{i-1}i = 1$. Если же $w = 1$, то $\frac{(w+1)i}{w-1} = \infty$. И, наконец, если $w = -1$, то $\frac{(w+1)i}{w-1} = 0$. Таким образом, при отображении $\varphi^{-1}(w) = \frac{(w+1)i}{w-1}$ трем точкам, лежащим на окружности $|w| = 1$, соответствуют три точки на вещественной оси L . Ясно, что дробно-линейное преобразование $\varphi^{-1}(w) = \frac{(w+1)i}{w-1}$ переводит единичную окружность в прямую линию L .

Покажем, что функция $\varphi^{-1}(w) = \frac{(w+1)i}{w-1}$ переводит внешность круга $S^1 = \{w \in \overline{W} : |w| > 1\}$ в верхнюю полуплоскость $P_1 = \{z \in \overline{C} : \text{Im } z > 0\}$, а внутренность круга $S^2 = \{w \in \overline{W} : |w| < 1\}$ – в нижнюю полуплоскость $P_2 = \{z \in \overline{C} : \text{Im } z < 0\}$.

Согласно свойству дробно-линейного отображения, достаточно найти такие две точки $w_1 \in \overline{W}$ и $w_2 \in \overline{W}$, что $\varphi^{-1}(w_1) = \frac{(w_1+1)i}{w_1-1} \in P_1$, а $\varphi^{-1}(w_2) = \frac{(w_2+1)i}{w_2-1} \in P_1$. Возьмем $w_1 = 3$. Тогда $|w_1| > 1$ и $\varphi^{-1}(3) = \frac{(3+1)i}{3-1} = 2i \in P_1$. Если же $w_2 = \frac{i}{2}$, то $|w_2| < 1$ и $\varphi^{-1}\left(\frac{i}{2}\right) = \frac{\left(\frac{i}{2}+1\right)i}{\frac{i}{2}-1} = \frac{i - \frac{1}{2}}{\frac{i}{2}-1} = \frac{2i-1}{i-2} = \frac{-1+2i}{-2+i} = \frac{4}{5} - \frac{3}{5}i \in P_2$.

Предложение 1. Пусть дана функция $f(z) = \frac{z}{2} - \frac{1}{2z}$. Тогда точки z и $f(z)$ лежат в одной и той же полуплоскости относительно прямой L .

Доказательство. Докажем сначала, что функция $f(z) = \frac{z}{2} - \frac{1}{2z}$ переводит каждую точку, лежащую в верхней (нижней) полуплоскости относительно вещественной оси, в точку, лежащую в верхней (нижней) полуплоскости. Возьмем $z = a + bi$, где $b > 0$ ($b < 0$). Тогда

$f(z) = \frac{a+ib}{2} - \frac{1}{2(a+ib)} = \frac{1}{2} \left(a+ib - \frac{a-ib}{a^2+b^2} \right) = \frac{1}{2} \left(a - \frac{a}{a^2+b^2} \right) + \frac{1}{2} i \left(b + \frac{b}{a^2+b^2} \right)$. Так как $\frac{1}{2} \left(b + \frac{b}{a^2+b^2} \right) > 0$ ($\frac{1}{2} \left(b + \frac{b}{a^2+b^2} \right) < 0$), то $f(z)$ принадлежит верхней (нижней) полуплоскости

в зависимости принадлежности точки z плоскостям P_1 (соответственно P_2).

Кроме того, функция $f(z)$ отображает комплексную плоскость $\bar{Z}$ на себя. Действительно, если $z_0 \in \bar{Z}$, то решая уравнение $\frac{z}{2} - \frac{1}{2z} = z_0$, получим, что $z^2 - 2z_0z - 1 = 0$. Откуда находим, что $z_{1,2} = z_0 \pm \sqrt{z_0^2 + 1}$. Взяв, например, $z_1 = z_0 + \sqrt{z_0^2 + 1}$, мы получим, что $f(z_1) = z_0$. Таким образом, каждая точка $z_0 \in \bar{Z}$ имеет, по крайней мере, один прообраз.

Рассмотрим $h(w) = w^2$, $w = \varphi(z) = \frac{z+i}{z-i}$, $z = \varphi^{-1}(w) = \frac{(w+1)i}{w-1}$,

$f(z) = z - \frac{z^2+1}{2z} = \frac{z^2-1}{2z} = \frac{z}{2} - \frac{1}{2z}$. Тогда согласно лемме 1 (см. [7]) будем иметь $\varphi(f^{(n)}(\varphi^{-1}(w))) = w^{2^n}$, поскольку $h^{(n)}(w) = w^{2^n}$.

Предложение 2. Если точка $z \in P_1 \subset \bar{Z}$. Тогда $f^{(n)}(z) \rightarrow i$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. Существует такая точка w , что $|w| > 1$ и $z = \varphi^{-1}(w)$. Поскольку

$\varphi(f^{(n)}(\varphi^{-1}(w))) = w^{2^n}$, то $f^{(n)}(\varphi^{-1}(w)) = \varphi^{-1}(w^{2^n}) = \frac{(w^{2^n}+1)i}{w^{2^n}-1}$. Из последнего равенства вытекает, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(w^{2^n}+1)i}{w^{2^n}-1} = i$.

Предложение 3. Если точка $z \in P_2 \subset \bar{Z}$, тогда $f^{(n)}(z) \rightarrow -i$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство аналогично доказательству предложения 2.

Теорема 1. Прямая L является замыканием периодических отталкивающих точек функции

$$f(z) = \frac{z}{2} - \frac{1}{2z}.$$

Доказательство. Рассмотрим вновь $h(w) = w^2$, $w = \varphi(z) = \frac{z+i}{z-i}$, $z = \varphi^{-1}(w) = \frac{(w+1)i}{w-1}$,

$f(z) = z - \frac{z^2+1}{2z} = \frac{z^2-1}{2z} = \frac{z}{2} - \frac{1}{2z}$. Как уже отмечалось, $w = \varphi(z) = \frac{z+i}{z-i}$ является гомеоморфиз-

мом комплексных плоскостей $\bar{Z}$ и $\bar{W}$, а функция $f(z) = z - \frac{z^2+1}{2z}$ отображает $\bar{Z}$ на себя.

Согласно лемме 1 [6] будем иметь $\varphi(f^{(n)}(\varphi^{-1}(w))) = w^{2^n}$. Поскольку $h^{(n)}(w)$ имеет 2^{2^n-1} неподвижных точки, то согласно лемме 2 [7] $f^{(n)}$ также имеет 2^{2^n-1} неподвижных точек.

Предположим, что точка $z \in L$ имеет период n для функции f . Существует такая точка $w \in S$, что $z = \varphi^{-1}(w)$. Покажем, что данная точка – отталкивающая для функции $f^{(n)}(z)$. В силу вышеизложенного имеем: $\varphi(f^{(n)}(\varphi^{-1}(w))) = w^{2^n}$. Тогда $f^{(n)}(\varphi^{-1}(w)) = \varphi^{-1}(w^{2^n})$. То есть

$f^{(n)}(\varphi^{-1}(w)) = \frac{(w^{2^n} + 1)i}{w^{2^n} - 1}$. Далее находим:

$$\begin{aligned} (f^{(n)}(z))' &= (f^{(n)}(\varphi^{-1}(w)))' = \left(\frac{w^{2^n} + 1}{w^{2^n} - 1} \right)' = i \frac{2^n w^{2^n-1} (w^{2^n} - 1) - 2^n w^{2^n-1} (w^{2^n} + 1)}{(w^{2^n} - 1)^2} = \\ &= i \frac{2^n w^{2^n-1} (-2)}{(w^{2^n} - 1)^2} = -i \frac{2^{n+1} w^{2^n-1}}{(w^{2^n} - 1)^2}. \end{aligned}$$

После преобразований получим: $\left| (f^{(n)}(\varphi^{-1}(w)))' \right| = \frac{2^{n+1}}{|w^{2^n} - 1|^2}$, поскольку точки w^{2^n-1} и $-i$ принадлежат S .

Так как $w^{2^n} \in S$, то $0 \leq |w^{2^n} - 1| \leq 4$. Следовательно,

$$\left| (f^{(n)}(z))' \right| = \left| (f^{(n)}(\varphi^{-1}(w)))' \right| = \frac{2^{n+1}}{|w^{2^n} - 1|^2} > 1. \text{ Таким образом, точка } z \text{ – отталкивающая для функции } f^{(n)}(z).$$

Покажем теперь, что множество периодических точек функции $f(z)$ всюду плотно на L .

Пусть $r \in L$ и U – некоторая окрестность точки r . Тогда существует такая точка $\alpha \in S$, что $r = \varphi^{-1}(\alpha)$. Поскольку множество периодических отталкивающих точек всюду плотно на S для функции $h(w) = w^2$, то существует последовательность $\{\alpha_n^{p_k}\}_{n=1}^\infty \subset S$ (p_k – период точки $\alpha_n^{p_k} \in S$, $k = 1, 2, \dots$), сходящаяся к $\alpha \in S$. Согласно лемме 2 (см. [6]) и только что приведенным рассуждениям каждая точка последовательности $\{r_n^{p_k}\}_{n=1}^\infty \subset L$ будет периодической и отталкивающей для функции

$f(z) = z - \frac{z^2 + 1}{2z}$. Поскольку φ^{-1} гомеоморфизм S , то последовательность периодических отталкивающих точек $\{r_n^{p_k}\}_{n=1}^\infty$ сходится к точке $r \in L$, где L , $r_n^{p_k} = \varphi^{-1}(\alpha_n^{p_k})$.

Поэтому существует такой номер n_0 , что $r_{n_0}^{p_k} \in U$. Таким образом, множество периодических точек функции $f(z)$ всюду плотно на L .

Покажем, что функция $f(z)$ хаотична на вещественной оси L . Установим сначала хаотичность функции $h(z) = z^2$ на S . Заметим, что если $x = e^{i\theta}$, то $h^{(n)}(x) = e^{2^n \cdot \theta \cdot i}$. Возьмем $\delta > 0$, $\varepsilon = \frac{2}{3}$. Пусть

$x \in S$. Найдем такие $n_\delta \in \mathbb{N}$ и $y_{n_\delta} = e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n_\delta}}\right)} \in S$, чтобы выполнялось условие – расстояние

$$\rho(x, y_{n_\delta}) < \delta. \quad \text{Тогда} \quad h^{(n_\delta)}(x) = e^{2^{n_\delta} \cdot \theta \cdot i} \quad \text{и} \quad h^{(n_\delta)}(y_{n_\delta}) = e^{2^{n_\delta} \left(\theta + \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n_\delta}}\right) \cdot i} = e^{2^{n_\delta} \theta + \frac{\pi}{3} \cdot i} \quad \text{и}$$

$$\rho(h^{(n_\delta)}(x), h^{(n_\delta)}(y_{n_\delta})) = 1 > \varepsilon = \frac{2}{3}. \quad \text{Следовательно, } h(z) \text{ обладает существенной зависимостью от}$$

начальных условий на S . Проверим транзитивность отображения $h(z)$ на S . Пусть U и V – открытые множества в S . Нетрудно заметить, что существует такое n , что $h^{(n)}(U) \supset S$. Следовательно, $h^{(n)}(U) \cap V$ непусто и транзитивность $h(z)$ доказана. Всюду плотность периодических точек $h(z)$ на S отмечалась в начале статьи.

Пусть теперь $\delta > 0$, $\varepsilon = \frac{1}{6}$, $r_1 \in L$. Тогда $\varphi(r_1)$ принадлежат S . Обозначим $\varphi(r_1) = x = e^{i\theta}$ и

найдем такие $n_\delta \in N$ и $y_{n_\delta} = e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n_\delta}}\right)}$, чтобы выполнялось условия $\rho(x, y_{n_\delta}) < \delta$ и $\rho(h^{(n_\delta)}(x), h^{(n_\delta)}(y_{n_\delta})) = 1 > \varepsilon = \frac{2}{3}$. Обозначим $h^{(n_\delta)}(x) = w_1$, $h^{(n_\delta)}(y_{n_\delta}) = w_2$. Ясно, что точки

$$w_1, w_2 \in S. \text{ Тогда } f^{(n)}(\varphi^{-1}(w_1)) = \frac{(w_1 + 1)i}{w_1 - 1}, \text{ а } f^{(n)}(\varphi^{-1}(w_2)) = \frac{(w_2 + 1)i}{w_2 - 1}.$$

Далее найдем расстояние между точками $f^{(n)}(\varphi^{-1}(w_1))$ и $f^{(n)}(\varphi^{-1}(w_2))$:

$$\left| f^{(n)}(\varphi^{-1}(w_2)) - f^{(n)}(\varphi^{-1}(w_1)) \right| = \left| i \left(\frac{w_2 + 1}{w_2 - 1} - \frac{w_1 + 1}{w_1 - 1} \right) \right| = \frac{2|w_2 - w_1|}{|w_2 - 1| \cdot |w_1 - 1|}. \quad \text{Поскольку } w_1, w_2 \in S,$$

$$|w_2 - 1| |w_1 - 1| \leq 4 \text{ и } 2|w_2 - w_1| > \frac{2}{3}, \text{ то } \left| f^{(n)}(\varphi^{-1}(w_2)) - f^{(n)}(\varphi^{-1}(w_1)) \right| = \frac{2|w_2 - w_1|}{|w_2 - 1| \cdot |w_1 - 1|} > \frac{1}{6} \text{ и существен-}$$

ная зависимость от начальных условий функции $f(z)$ на L установлена. Покажем, что $f(z)$ транзитивна на L . Пусть U и V – два открытых множества на прямой L . Тогда существуют такие два открытых множества W_1 и W_2 на S , что выполняются соотношения: $U = \varphi^{-1}(W_1)$ и $V = \varphi^{-1}(W_2)$. Поскольку $h(w) = w^2$, то существует такое натуральное число n , что $h^{(n)}(W_1) \supset S$. Далее, поскольку $f^{(n)}(\varphi^{-1}(W_1)) = \varphi^{-1}(h^{(n)}(W_1))$, то $f^{(n)}(\varphi^{-1}(W_1)) \supset L$. Следовательно, $f^{(n)}(\varphi^{-1}(W_1)) \cap V$ непусто и транзитивность $f(z)$ установлена. Выше мы показали, что множество периодических точек функции f всюду плотно в L .

Таким образом, отображение f обладает существенной зависимостью от начальных условий, транзитивно и множество периодических точек f всюду плотно в L . Согласно определению хаоса по Девани (см. [2]) отображение f хаотично на L .

2. Следующим шагом в изучении множества Жюлиа от функции $f(z) = z - \frac{z^2 + 1}{2z}$ будет построе-

ние алгоритма, с помощью которого происходит визуализация данного множества на мониторе компьютера.

Опишем сначала идею алгоритма построения множества Жюлиа для функции

$$f(z) = z - \frac{z^2 + 1}{2z} = \frac{z^2 - 1}{2z} = \frac{z}{2} - \frac{1}{2z}: \text{ вычисляем корни уравнения } f(z) = z \Leftrightarrow z^2 + 1 = 0.$$

Далее исследуем орбиту каждой точки z , принадлежащей комплексной плоскости, которую имитирует монитор компьютера (то есть находим итерацию $z_n = f^{(n)}(z)$ точки z , где n – натуральное число, стабилизирующее орбиту исходной точки), и оцениваем расстояние от точки z_n до корней уравнения $f(z) = z$ (точки $z_1 = i$ и точки $z_2 = -i$).

Если расстояние от точки z_n до точки $z_1 = i$ меньше, чем ее расстояние до точки $z_2 = -i$, то точку z окрашиваем в красный цвет. Если расстояние от точки z_n до точки $z_1 = i$ больше, чем ее расстояние до точки $z_2 = -i$, то точку z окрашиваем в зеленый цвет. Разделяющая красный и зеленый цвета прямая линия окажется вещественной осью, которая будет множеством Жюлиа функции $f(z) = z - \frac{z^2 + 1}{2z}$.

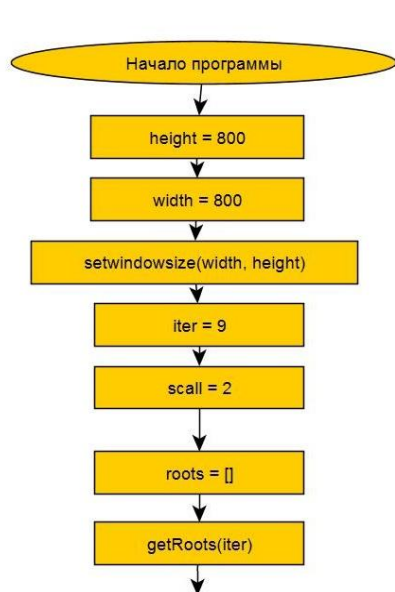


Рис. 1. Инициализация программы

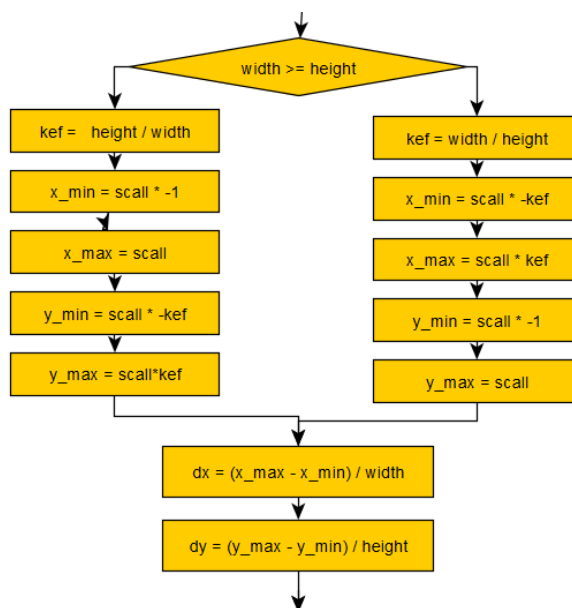


Рис. 2. Масштабирование

Первый этап указан на рисунке 1. На данном этапе устанавливаются высота и ширина экрана, число итераций ($iter = 9$), масштаб $-2 \leq \text{Re } z \leq 2$, $-2 \leq \text{Im } z \leq 2$ ($scall = 2$), выделяется массив для хранения корней уравнения и с помощью функции `getRoots` вычисляются корни уравнения $z^2 + 1 = 0$ (которые будут неподвижными точками функции $f(z) = z - \frac{z^2 + 1}{2z}$).

Второй этап указан на рисунке 2. На данном этапе происходит масштабирование – выбор шага для прохода по экрану компьютера, имитирующего комплексную плоскость.

На третьем этапе (рис. 3) осуществляется анализ всех точек комплексной плоскости и устанавливается цвет точки исходя из работы функции `getColotForPoint()` (рис. 4). Именно: рассматривается каждая точка экрана и устанавливается ее цвет, в соответствии с работой функции `getColotForPoint()`. Функция `getColotForPoint()` (рис. 4) действует следующим образом: если расстояние от точки z_n до точки $z_1 = i$ меньше, чем ее расстояние до точки $z_2 = -i$, то точку z окрашиваем в красный цвет. Если расстояние от точки z_n до точки $z_1 = i$ больше, чем ее расстояние до точки $z_2 = -i$, то точку z окрашиваем в зеленый цвет. Вещественная ось будет границей, разделяющей красный и зеленый цвета, и окажется множеством Жюлиа функции $f(z) = z - \frac{z^2 + 1}{2z}$ (рис. 4).

Отметим еще, что для полной реализации алгоритма используется для вычисления итераций функция: `function fx(z:complex, iter: integer)` (рис. 5).

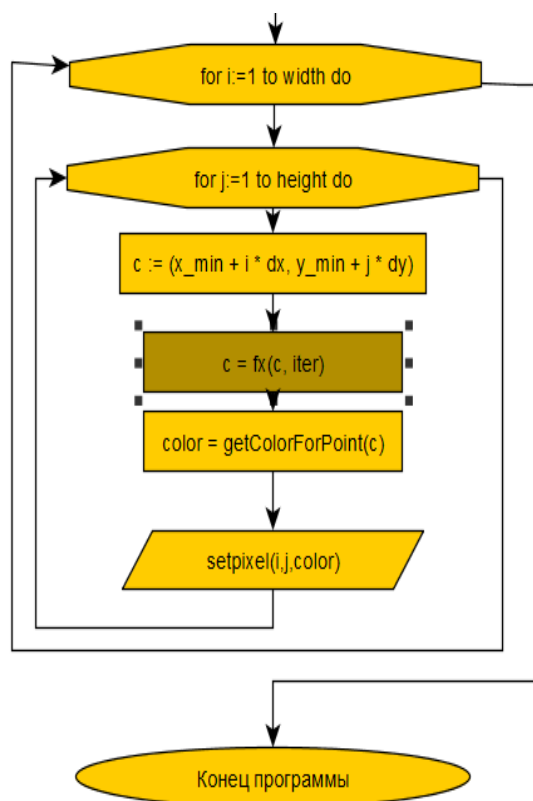


Рис. 3. Анализ орбит точек

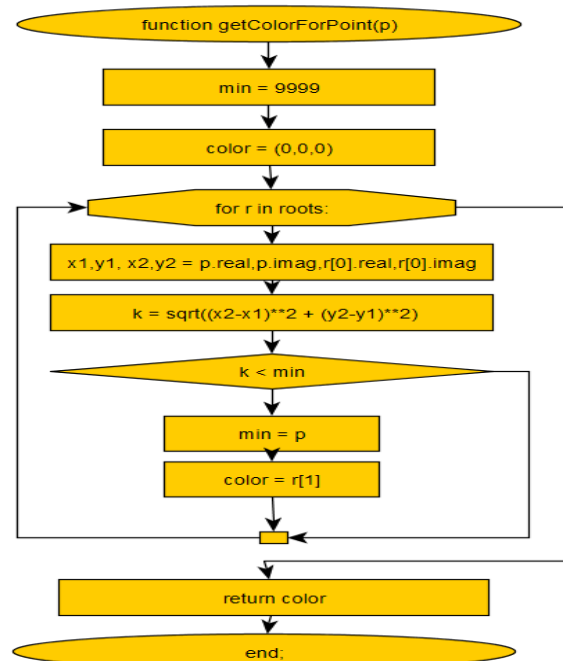


Рис. 4. Определение цвета точки

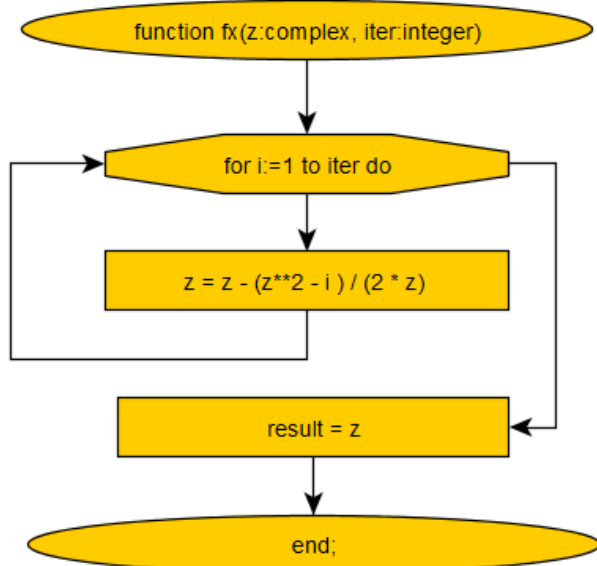


Рис. 5. Вычисление итераций функции

$$f(z) = z - \frac{z^2 + 1}{2z}$$

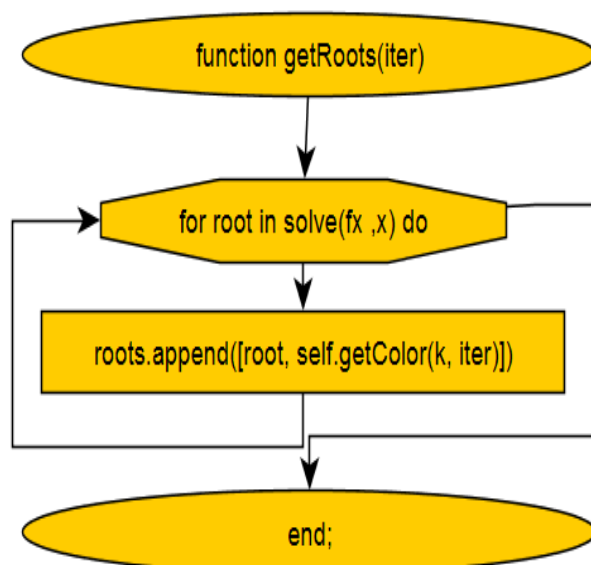


Рис. 6. Нахождение корней уравнения

В полной реализации алгоритма задействована еще функция – `function getRoots(iter)` (рис. 6). В данной функции используется функция `solve()`, которая позволяет вычислять корни выше указанного уравнения; реализация функции (входит в библиотеку `SymPy` на языке программирования `Python`, аналог функции `solve` в `Mathcad`).

После завершения работы программы мы получим на экране компьютера, множество Жюлиа – прямая линия (вещественная ось), которая разделяет красный и зеленый цвета (рис. 7).



$$f(z) = z - \frac{z^2 + 1}{2z}$$

Рис. 7. Множество Жюлиа для функции

В заключение отметим, что разработанная методика изучения множеств Жюлиа от функции $f(z) = z - \frac{z^2 + 1}{2z}$ дает возможность обучаемым познать интеграцию математических методов с ИКТ, что позитивно влияет на их мотивацию к изучению математики и информатики, развивает креативность и исследовательские компетенции.

Библиографический список

1. Бабенко, А. С., Секованов, В. С. Развитие креативных качеств студентов при изучении метода итераций [Текст] / А. С. Бабенко, В. С. Секованов // Математика в образовании: сб. статей. – Вып. 4 / под ред. И. С. Емельяновой. – Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2008. – С. 52–54.
2. Божокин, С. В., Паршин, Д. А. Фракталы и мультифракталы [Текст] / С. В. Божокин, Д. А. Паршин. – М.: Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.
3. Гринченко, В. Т., Мацыпура, В. Т., Снарский, А. А. Введение в нелинейную динамику: Хаос и фракталы [Текст] / В. Т. Гринченко, В. Т. Мацыпура, А. А. Снарский. – М.: Изд-во ЛКИ, 2007.
4. Кроновер Ричард М. Фракталы и хаос в динамических системах [Текст] / пер. с англ.; под ред. Т. Э. Крэнкеля. – М.: ПостМаркет, 2000.
5. Морозов, А. Д. Введение в теорию фракталов [Текст] / А. Д. Морозов. – М.: Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002.
6. Секованов, В. С. О множествах Жюлиа некоторых рациональных функций [Текст] / В. С. Секованов // Вестник Костромского государственного университета им. Н. А. Некрасова. – 2012. – Т. 18. – № 2.

7. Секованов, В. С. Элементы теории фрактальных множеств [Текст]: учебное пособие. – 5-е изд. / В. С. Секованов. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2013.

8. Смирнов, Е. И. О непрерывности полуаддитивного функционала [Текст] / Е. И. Смирнов // Математические заметки. – 1976. – Т. 19. – № 4.

9. Шредер, М. Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая [Текст] / М. Шредер. – Ижевск: Научно-издательский центр «Регулярная и хаотичная динамика», 2001.

Bibliograficheskiy spisok

1. Babenko, A. S., Sekovanov, V. S. Razvitie kreativnykh kachestv studentov pri izuchenii metoda iteracij [Tekst] / A. S. Babenko, V. S. Sekovanov // Matematika v obrazovanii: sb. statej. – Vyp. 4 / pod red. I. S. Emel'janovoj. – Cheboksary: Izd-vo Chuvash. un-ta, 2008. – S. 52–54.
2. Bozhokin, S. V., Parshin, D. A. Fraktaly i mul'tifraktaly [Tekst] / S. V. Bozhokin, D. A. Parshin. – M.: Izhevsk: NIC «Regul'arnaja i haoticheskaja dinamika», 2001.
3. Grinchenko, V. T., Macypura, V. T., Snarskij, A. A. Vvedenie v nelinejnuju dinamiku: Haos i fraktaly [Tekst] / V. T. Grinchenko, V. T. Macypura, A. A. Snarskij. – M.: Izd-vo LKI, 2007.

4. Kronover Richard M. Fraktaly i haos v dinamicheskikh sistemah [Tekst] / per. s angl. ; pod red. T. Je. Krjenkelja. – M. : PostMarket, 2000.
5. Morozov, A. D. Vvedenie v teoriju fraktalov [Tekst] / A. D. Morozov. – M. ; Izhevsk: Institut komp'juternyh issledovanij, 2002.
6. Sekovanov, V. S. O mnozhestvah Zhjulia nekotoryh racional'nyh funkcij [Tekst] / V. S. Sekovanov // Vestnik Kostromskogo gosudarstvennogo universiteta im. N. A. Nekrasova. – 2012. – T. 18. – № 2.
7. Sekovanov, V. S. Jelementy teorii fraktal'nyh mnozhestv [Tekst]: uchebnoe posobie. – 5-e izd. / V. S. Sekovanov. – M. : Knizhnyj dom «LIBROKOM», 2013.
8. Smirnov, E. I. O nepreryvnosti poluadditivnogo funkcionala [Tekst] / E. I. Smirnov // Matematicheskie zametki. – 1976. – T. 19. – № 4.
9. Shreder, M. Fraktaly, haos, stepennye zakony. Miniatjury iz beskonechnogo raja [Tekst] / M. Shreder. – Izhevsk : Nauchno-izdatel'skij centr «Reguljarnaja i haotichnaja dinamika», 2001.