УДК 530.1:514

В. Н. Осташков, Е. И. Смирнов, Е. А. Белоногова

Синергия образования в исследовании аттракторов и бассейнов притяжения нелинейных отображений

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 16–18–10304)

В статье рассмотрены содержательные конструкты нелинейных отображений плоскости на себя, составленные из гомотетий, геометрия их аттракторов и бассейнов притяжения в контексте проявления синергетических эффектов в математическом образовании. Выявлены этапы и диалог математической, информационной, естественно-научной и гуманитарной культур в ходе реализации ресурсных занятий на основе наглядного моделирования. Отмечается, что при исследовании сложных систем и решении сложных задач важным звеном является построение иерархии наглядных моделей путем актуализации бифуркационных переходов к структурам более высоких порядков организации. При этом показано, что математическое образование как сложная и открытая социальная система несет в себе огромный потенциал самоорганизации и позитивного проявления синергетических эффектов в разных направлениях: развитие и воспитание личности, упорядоченность содержания и структуры когнитивного опыта, коммуникации и социальное взаимодействие субъектов на основе диалога культур, исследовательская деятельность как неотъемлемый атрибут современного образования, эффективная система саморегуляции личностных черт обучающегося.

Ключевые слова: синергия математического образования, наглядное моделирование, ресурсные занятия, нелинейные отображения.

V. N. Ostashkov, E. I. Smirnov, E. A. Belonogova

Education Sinergy in Research of Attractors and Basins of Nonlinear Mapping Attraction

Substantial constructs of nonlinear mappings of the plane on themselves made from homothetys, geometry of their attractors and basins of attraction in the context of manifestation of synergy effects in mathematical education are considered. Stages and the dialogue of mathematical, information, natural-science and humanitarian cultures are revealed during implementation of resource lessons on the basis of visual modeling. It is noted that in case of a research of complex systems and solutions of complex problems the important link is creation of hierarchy of evident models by updating bifurcation transitions to structures of higher organization orders. At the same time it is shown that mathematical education as a complex and open social system has a great potential of self-organization and positive manifestation of synergy effects in different directions: development and education of the personality, orderliness of the content and structure of cognitive experience, communication and social interaction of subjects on the basis of the dialogue of cultures, research activities as the integral attribute of modern education, the effective system of self-control of personality features of the student.

Keywords: mathematical education synergy, visual modeling, resource lessons, nonlinear mapping.

Введение. Наш мир многоликий, изменчивый, нелинейный и порой непредсказуемый в своей открытости и хаосе переноса вещества, энергии, информации и духа. Образование личности подрастающего поколения должно адекватно отражать этот мир в контексте появления синергетического эффекта перехода от хаоса к порядку. Синергия образования как необходимый атрибут актуализации и антиципации процессов самоорганизации и развития личности проявляется, в том числе посредством решения сложных задач. Отметим, что процессы исследования сложных систем генетически основаны на диалоге математической, естественно-научной, информационной, гуманитарной культур, которые выстраиваются в иерархии переходов от более низких к более высоким структурам организации сложного. При этом задача образования личности состоит в том, чтобы эти переходы были актуализированы семантическим, семиотическим, имитационным и социальным контекстами в духе А. А. Вербицкого [15] и наглядным моделированием объектов и процессов, следуя Е. И. Смирнову [12]. Отметим, что образование личности характеризуется развертыванием фундирующих модусов развития в ходе освоения предметной деятельности со сложными системами (С. Л. Рубинштейн [13], В. Д. Шадриков [10], А. Н. Подъяков [17], Е. И. Смирнов [19] и др.). Таким образом, синергия образования и ее атрибуты должны проявляться как в содержании предметного (в нашем случае – математического) образования, так и в развертывании процессуально-технологических сценариев и личностном развитии индивидуума. В настоящей статье синергия математического образования представлена в содержательном плане и детализации семантических конструктов бифуркации, аттракторов, бассейнов притяжения и итерационных процессов в исследовании нелинейных отображений.

Методология, методы и конструкты. Наглядное моделирование в обучении математике как концепция, теория, метод и технология разработано Е. И. Смирновым [12] и призвано решать задачи активного включения личности обучаемого в когнитивный процесс на основе моделирования сложных объектов, процедур и ситуаций в математическом образовании, ведущий к становлению и развитию интеллектуальной операции «понимания». Результатом наглядно-модельного обучения математике является актуализация девиза: «Я понял!». Как организовать педагогические условия, средства, технологии, содержание обучения математике, чтобы большинство обучающихся могло сказать: «Я понял!»? Без активности мышления учеников, без психолого-педагогического обоснования использования средств, выстраивания этапов, фаз обучения, без переструктуризации и отбора содержания обучения математике, в том числе освоения и развертывания различных комплексов математических и прикладных задач с применением информационно-коммуникационных технологий, выстраиваемых в фундирующие цепочки, невозможно добиться необходимого эффекта в освоении существа математических понятий, процедур и ситуаций. Что же такое наглядное моделирование? Наглядное моделирование – это выявление сущности математических понятий, процедур и ситуаций на основе моделирования в обучении математике, необходимо ведущее к пониманию. Главное при этом – адекватность априорной модели и результатов мыслительной деятельности обучающихся, осознанные и ведущие к пониманию.

Наглядное моделирование – это интерактивная триада: личность – модель – понимание. Необходимые атрибуты наглядного моделирования: взаимопереходы знаковых систем (вербальной, знаково-символической, образно-графической и конкретно-деятельностной); устойчивость восприятия математических знаний; адекватность априорной и результативной моделей; отбор и актуализация базовых учебных элементов; сензитивность модальностей восприятия; активность когнитивных процессов. Необходимо знание особенностей психического развития каждого ученика, видов и иерархии моделей, средств оптимизации логических структур, закономерностей восприятия знаковых систем и оперирования ими, средств диагностики состояния личности и интеллектуальных операций, контролирующих и оценивающих процедур, самосовершенствование и переподготовка педагога.

В связи со сказанным выше актуальной является проблема такой организации процесса обучения математике, когда представления, возникающие в мышлении обучаемых, отражают основные, существенные, ключевые стороны предметов, явлений и процессов, в том числе посредством адекватного моделирования математического знания. Именно формирование этих узловых, опорных качеств объекта восприятия (перцептивная модель) и представляет собой суть процесса наглядного моделирования. Такой подход a priori предполагает моделирование объекта восприятия с опорой на нейрофизиологические механизмы памяти, закономерности восприятия, ментальные возможности и аффективные состояния личности. При этом особую значимость приобретают модели, фиксирующие процедуру математических действий в процессе исследовательской активности.

Таким образом, наглядность – не только особое свойство психических процессов, но и свойство математического объекта в рамках учебного исследования. Наглядность математического объекта (или перцептивного образа) определяется, как уже отмечалось, факторами восприятия, представления, мнемическими процессами в их единстве на основе диагностируемого целеполагания. Следующие критерии определяют существо наглядности математического объекта:

− диагностируемое целеполагание целостности и дифференциации структуры и этапов построения модели математического объекта (моделирование, кодирование, схематизация, замещение);

− понимание обучаемым сущности математического объекта (адекватность восприятия) на основе процессов моделирования;

− устойчивость перцептивного образа и представления при непосредственном восприятии математического объекта;

− познавательная и творческая активность обучаемого на основе комфортности и успешности обучения [12].

При исследовании сложных систем и решении сложных задач важным звеном является построение иерархии наглядных моделей путем актуализации бифуркационных переходов к структурам более высоких порядков организации. Математическое образование как сложная и открытая социальная система несет в себе огромный потенциал самоорганизации и позитивного проявления синергетических эффектов в разных направлениях: развитие и воспитание личности, упорядоченность содержания и структуры когнитивного опыта, коммуникации и социальное взаимодействие субъектов на основе диалога культур, исследовательская деятельность как неотъемлемый атрибут современного образования, эффективная система саморегуляции личностных черт обучающегося. *Синергия математического образования при этом будет рассматриваться нами как симбиоз эффектов саморазвития личности в условиях флуктуации предметных результатов и стохастических нелинейных процессов самоорганизации сложных открытых систем при воздействии внешних параметров (образовательные системы в полной мере соответствуют данной категории) посредством согласованных действий разных факторов и начал в трех контекстах: семиотическом, имитационном и социальном применительно к состояниям системы, далеким от равновесия*.

История развития человечества наглядно демонстрирует эффективность формирования и развития функциональных возможностей человека в процессе актуализации и фундирования опыта *решения сложных задач* (РСЗ) (в терминологии А. Н. Подъякова [17] – *комплексное решение проблем*) в контексте реализации личностных предпочтений в познавательной деятельности и творческой самостоятельности. Данный подход особенно важен для математического образования, где естественным образом возникающие многоступенчатые абстракции предметного содержания создают условия для таких обобщений фундирующих модусов и требуют выявления и актуализации особенностей личностных предпочтений обучаемых с целью повышения качества освоения и генерализации предметного содержания. Вместе с А. Н. Подъяковым [17] отметим следующие особенности в решении сложных задач:

− в развитии сложной системы есть доля неопределенности и непредсказуемости; множества разнообразных описаний и решений; их построение на основе эмпирических, а не только теоретических обобщений, которые нецелесообразно фиксировать в виде строгих и точных понятий и устойчивых классификаций; необходимость развитости дивергентного мышления и понимания функционирования нечетких множеств и fuzzy-logics (Л. Заде [18]);

− сложная система характеризуется внутренней динамикой существенного – изменениями собственных системообразующих свойств и зависимостей, то есть изменениями не только на уровне конкретных проявлений, но и на уровне своей сущности. Эффективные правила (фундирующие модусы [19]) поэтапного развертывания сущности могут быть выделены, но они будут с неизбежностью достаточно вариативны на основе наглядного моделирования [12] и принципиально зависимы от контекста;

− теоретические модели сколь угодно высокого уровня принципиально ограничены. Для эффективного исследования сложных динамических систем необходимы разнообразные поисковые пробы (экспериментальные срезы, сравнительный анализ конкретных проявлений, компьютерное моделирование, аналогии, анализ через синтез (С. Л. Рубинштейн) и т. п.) – реальные взаимодействия с системой, а не только теоретическая деятельность с ее абстрактными моделями;

− при исследовании сложной системы необходима вариативность целеполагания: постановка разнообразных, разнотипных и разноуровневых целей, которые могут конкурировать между собой. Одним из основных эмоциональных состояний человека при исследовании сложных систем является неуверенность, сомнение, готовность принять двоякие (на основе прогноза и случайные) результаты действий и т. д.;

− результаты деятельности человека со сложной системой не могут быть предсказаны полностью, исчерпывающим образом. Для этого взаимодействия характерна множественность результатов. Получение продуктов с заранее заданными свойствами невозможно. Наряду с прямыми, прогнозируемыми результатами, образуются разнообразные побочные, непредсказуемые продукты.

Таким образом, сложные, открытые, неравновесные, стохастические образовательные системы как компонент содержания математического образования, будучи оснащены инновационными технологиями и методиками, могут явиться тем механизмом самоорганизации и саморазвития личности, необходимость которых так востребована в современном российском обществе.

Будем рассматривать далее динамические системы – математические абстракции, позволяющие изучать эволюцию системы в непрерывном или дискретном времени. Примером непрерывной динамической системы является совокупность изменений погодных характеристик: температуры, давления, влажности, которые подчинены системе дифференциальных уравнений [3, 5, 8, 9]. Эту систему впервые исследовал численно Э. Лоренц в 1963 г. [2]. Кроме непрерывных динамических систем, существуют дискретные изменения в дискретные моменты времени, когда математическая модель опирается на отображения [1, 3, 5, 7]; при этом некоторые эффекты предпочтительнее исследовать не на потоках, а на отображениях. В работе [9] М. Эно сообщает, что предложенный им странный аттрактор квадратичного преобразования плоскости был задуман как дискретный аналог странного аттрактора Лоренца. Кроме того, Эно установил, что локально этот странный аттрактор устроен как декартово произведение отрезка и канторова множества. Множество всех точек плоскости, орбиты которых притягиваются к странному аттрактору Эно, составляют некий бассейн притяжения с довольно сложной геометрией. Геометрию бассейнов притяжения весьма проблематично исследовать аналитически. В таких случаях на помощь приходят численные методы.

В данной работе на геометрическом материале приводятся исследовательские конструкты проявления синергетических эффектов нелинейных отображений плоскости на себя, исследуются их аттракторы и бассейны притяжения.

Исследовательская деятельность обучающихся может быть организована как работа в малых группах в технологии ресурсных занятий [14] на основе диалога математической, информационной, естественно-научной и гуманитарной культур и предполагать следующие этапы:

− подготовительный (наличие образцов (на эталонном и ситуативном уровнях) решения и наглядного моделирования учебных и научных проблем с детализацией, математическим анализом и особенностями, презентацией исследовательских этапов, методов и процедур; постановка и поиск решения исследовательской задачи, актуализация и освоение информационных «зон ближайших и отдаленных ассоциаций», сбор и разнообразие форм и методов представления информации, вероятностно-статистический, контентный, графический, кластерный, математический анализ данных, выявление закономерностей, аналогий, ассоциаций, динамики исследуемых процессов, явлений и фактов);

− содержательно-технологический (построение плана решения задачи, концептуальной, предметной, информационной и математической моделей, анализ возможностей ИКТ-средств поддержки; актуализация множественности решений на основе однозначности данных; интуиция и прогноз результатов, поиск и алгоритм решения, инсайт, фиксация и верификация процедур и алгоритмов, презентация результатов; теоретическое и эмпирическое обобщение знаний и методов, интеграция знаний и методов на фоне получения нового качества взаимодействия, актуализация и становление в «зонах ближайшего развития» личностного опыта);

− оценочно-коррекционный (проверка гипотез, их модификация, оценка методов и процедур нахождения результатов, варьирование условий и данных задачи; учет вероятных и невероятных обстоятельств, оценка их эффективности, умение ставить и решать задачи в условиях неопределенности; оценка истинности гипотез, прогноза и стратегий; самоанализ эффективности стратегий и методов решения, выбор оптимального пути решения проблемы);

− обобщающе-преобразующий (анализ и перенос теоретических и эмпирических обобщений и рефлексивный контроль характеристик сформированности индивидуального стиля педагогической деятельности; самостоятельная постановка задачи и методов ее решения, надситуативный уровень мышления, стремление к преодолению стереотипов, гармонизация рефлексивных выходов, новый творческий продукт, оценка и прогноз дальнейших действий, мотивация самоактуализации); системная интеграция предметных, информационных, математических и профессиональных знаний на основе наглядного моделирования в постановке и решении исследовательских задач профессиональной деятельности.

Орбиты и аттракторы. Пусть $x0 \in \mathbb{R}m$ – произвольная точка, α – отображение пространства $\mathbb{R}m$ на себя. Тогда бесконечная последовательность

$x0 \mapsto x1 \mapsto x2 \mapsto \ldots \mapsto xn \mapsto \ldots$,

$xn = \alpha(xn–1)$, $n \in \mathbb{N}$, называется орбитой точки x0. Аттрактор орбиты Ω есть множество F, к которому притягивается Ω. Множество всех точек, орбиты которых притягиваются к данному аттрактору, называется бассейном притяжения этого аттрактора.

Циклы. Пусть f – отображение пространства $\mathbb{R}m$ на себя, $x0 \in \mathbb{R}m$, $n \in \mathbb{N}$,

$x_n = f(x_{n-1}) = f^{\circ n}(x_0)$, $\Omega = \{x_n\}_{n=0}^{\infty}$. Если для некоторого $n \in \mathbb{N}$ выполняется равенство $x_n = x_0$, то орбита Ω называется циклом; периодом цикла называется наименьшее n, при котором выполняется равенство $x_n = x_0$. Цикл периода 1 состоит из неподвижной точки a. Она является аттрактором, если $|J(a)| < 1$ (здесь J(a) – якобиан отображения f в точке a). Неподвижная точка a называется репеллером (отталкивающей точкой), если $|J(a)| > 1$, то есть орбита любой достаточно близкой к a точки x удаляется от a. Если $|J(a)| = 1$, то точка a может быть любой (притягивающей, отталкивающей, ни той, ни другой).

Треугольник Серпинского. Исследование динамических дискретных (и непрерывных) систем тесно связано с понятиями хаоса и фрактала. Примером их взаимосвязи служит треугольник Серпинского, который является результатом следующего дискретного динамического процесса [1, 2, 6].

Пусть $\Delta \subset \mathbb{R}2$ – треугольник ABC; α, β, γ – гомотетии с коэффициентом k = 0,5 и центрами A, B, C соответственно. Рассмотрим итерационный процесс построения бесконечной последовательно- $\Omega = \{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ сти точек

− орбиты $x_0 \mapsto x_1 \mapsto x_2 \mapsto \ldots \mapsto x_n \mapsto \ldots$

− точки x_0, на n-м шаге которого случайно, с вероятностью p = 1/3, выбирается гомотетия $f \in M = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ и строится образ $x_{n+1} = f(x_n)$ точки x_n (Рис. 1).

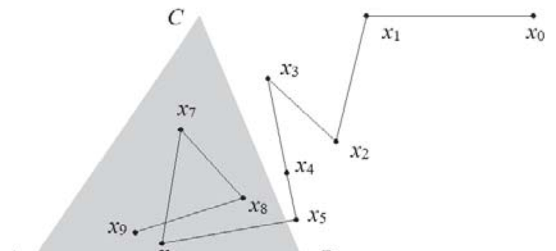

Рис. 1

Численный эксперимент показывает, что орбита произвольной точки стремится к треугольнику Серпинского (Рис. 2).

Так как в каждой итерации преобразование *f* является случайным, то любые две орбиты с одной и той же стартовой точкой x_0 не совпадают друг с другом, любая орбита является случайной, ее поведение непредсказуемо (даже в первой итерации). Такое свойство является необходимым признаком хаотичности динамической системы.

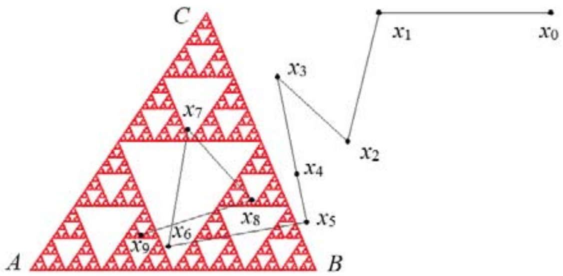

Рис. 2

Отметим, что фрактальная размерность $\dim_M F$ треугольника Серпинского является дробным числом $\log_2 3$.

Фрактальные антенны. Известны разработки широкополосных антенн на основе фрактальных структур в радио и телевидении. Антенна, вырезанная из фольги в форме треугольника Серпинского, работает лучше вибраторной, поскольку является более широкополосной и компактной. Физические принципы работы таких антенн интенсивно исследуются, но уже сейчас налажен их серийный выпуск (например, фирма Fractus SA, имеющая в интернете доступный сайт). О фрактальных антеннах исчерпывающе изложено в книге [6] профессора А. А. Потапова.

Принцип максимальной удаленности, в отличие от принципа рандомизации, положенного в основу построения треугольника Серпинского (и многих других фракталов), заключается в следующем.

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ – подобия плоскости с центрами $A_1, A_2, \ldots, A_m$. Для произвольной точки X вычислим расстояния $\rho_k = \rho(A_k, X)$, $k = 1..m$ и возьмем в качестве ρ наибольшее из расстояний ρ_k, $k = 1..m$. *Принцип максимальной удаленности* заключается в том, что если $\rho = \rho_i$, то $f = \alpha_i$.

Применим этот принцип к треугольнику $\Delta = ABC$, взяв в качестве подобий гомотетии α, β, γ с коэффициентом $k = 0,5$ и центрами A, B, C соответственно. Пусть x_0 – стартовая точка, представленная на Рис. 3. Поскольку она удалена от вершины B дальше, чем от вершин A, C, то в данном случае $f = \beta$, $x_1 = f(x_0) = \beta(x_0)$, $x_2 = f(x_1) = \gamma(x_1)$, $x_3 = f(x_2) = \beta(x_2)$, …

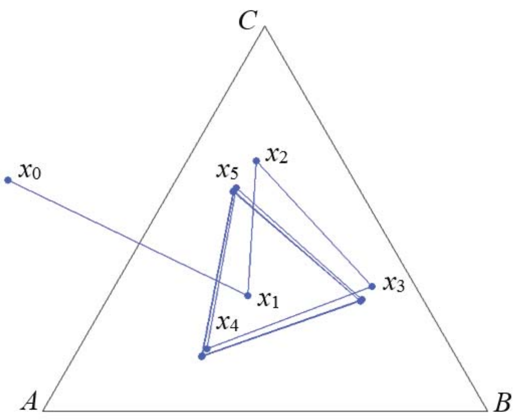

Рис. 3

Барицентрические координаты

Напомним, что точка C делит отрезок AB в отношении λ, если $\vec{C} = \frac{1}{1+\lambda}\vec{A} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\vec{B}$.

Это означает, что

$C \in AB \Leftrightarrow C = xA + yB$, $x + y = 1$.

Аналогично, для любой точки M, принадлежащей плоскости треугольника $\Delta = ABC$, справедливо равенство $M = xA + yB + zC$, $x + y + z = 1$.

Это позволяет записывать

$M = (p: q: r) = (x, y, z)$,

где $x = \frac{p}{p+q+r}$, $y = \frac{q}{p+q+r}$, $z = \frac{r}{p+q+r}$.

Пример 1. Пусть G – *центроид* (точка пересечения медиан) треугольника Δ. Тогда $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (0, 0, 1)$, $G = (1: 1: 1) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Пример 2. Пусть $M = (p: q: r)$, $K = CM \cap AB$. Тогда $K = (p: q: 0)$.

Пример 3. Пусть прямые g, h пересекаются в точке M и имеют соответственно уравнения $a_1x + b_1y + c_1z = 0$, $a_2x + b_2y + c_2z = 0$. Тогда $M = (p : q : r)$,

$$p = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix},\ q = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix},\ r = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Пример 4. Пусть $M_1 = (p_1 : q_1 : r_1)$, $M_2 = (p_2 : q_2 : r_2)$ – любые точки. Тогда прямая M_1M_2 имеет уравнение $ax + by + cz = 0$, где

$$a = \begin{vmatrix} q_1 & r_1 \\ q_2 & r_2 \end{vmatrix},\ b = \begin{vmatrix} r_1 & p_1 \\ r_2 & p_2 \end{vmatrix},\ c = \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix}.$$

Бимедианы. Относительно треугольника $\Delta = ABC$, $A = (1: 0: 0)$, $B = (0: 1: 0)$, $C = (0: 0: 1)$.

Если $M = (x: y: z)$, то, например, чевиана CM пересекает сторону AB в точке $M = (x: y: 0)$. Пусть $C_1 = (2: 1: 0)$, $C_2 = (1: 2: 0)$, тогда чевианы CC_1, CC_2 называются *бимедианами* треугольника Δ. Аналогично определяются бимедианы треугольника Δ, проведенные к сторонам BC, CA. Ниже мы увидим, что бимедианы треугольника Δ, близкого к равностороннему, тесно связаны с аттракторами отображения, построенного в согласии с *принципом максимальной удаленности*.

Пусть $M = (x, y, z)$, $x + y + z = 1$. Тогда для гомотетий α, β, γ $\alpha(M) = \left(\frac{x+1}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2}\right)$, $\beta(M) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y+1}{2}, \frac{z}{2}\right)$, $\gamma(M) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z+1}{2}\right)$.

Предположим, что преобразование f имеет цикл периода 3. Тогда, очевидно, $f^{\circ 3} \in \{\gamma\beta\alpha, \beta\alpha\gamma, \alpha\gamma\beta, \beta\gamma\alpha, \gamma\alpha\beta, \alpha\beta\gamma\}$. Пусть, например, $f^{\circ 3} = \gamma\beta\alpha$. Тогда $(x, y, z) \overset{\alpha}{\mapsto} \left(\frac{x+1}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2}\right) \overset{\beta}{\mapsto} \left(\frac{x+1}{4}, \frac{y+2}{4}, \frac{z}{4}\right) \overset{\gamma}{\mapsto} \left(\frac{x+1}{8}, \frac{y+2}{8}, \frac{z+4}{8}\right)$.

Следовательно, точка M будет неподвижной в отображении $f^{\circ 3}$, если $(x, y, z) = \left(\frac{x+1}{8}, \frac{y+2}{8}, \frac{z+4}{8}\right)$ $\Leftrightarrow x = \frac{x+1}{8}$, $y = \frac{y+2}{8}$, $z = \frac{z+4}{8}$.

Решением этих уравнений служит точка $C' = \left(\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{4}{7}\right) = (1:2:4) \in \tau'$. Отсюда следует, что цикл τ' состоит из точек

$A' = \beta(C') = (4: 1: 2)$, $B' = \gamma(A') = (2: 4: 1)$, $C' = \alpha(A') = (1: 2: 4)$.

Если же $f^{\circ 3} = \beta\gamma\alpha$, то получим другой цикл τ'', состоящий из точек $A'' = (4: 2: 1)$, $B'' = (1: 4: 2)$, $C'' = (2: 1: 4)$ (Рис. 4).

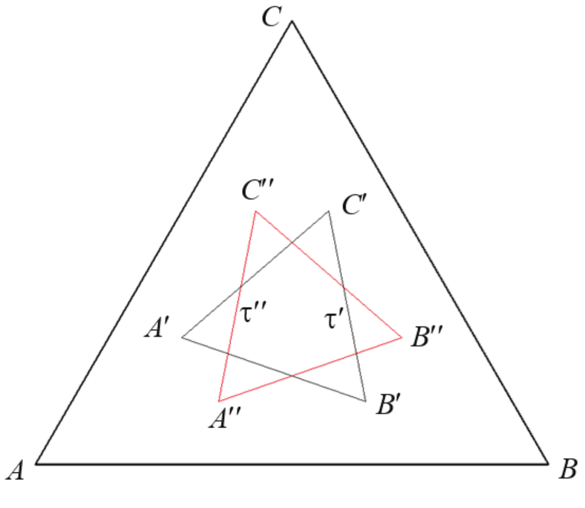

Рис. 4

Очевидно, точки B', C' лежат на бимедиане треугольника Δ. Стало быть, точки циклов τ′, τ″ лежат на пересечении соответствующих бимедиан треугольника Δ.

З а д а ч а 1. Доказать, что площадь S треугольника Δ в 7 раз больше площади S' треугольника $A'B'C'$.

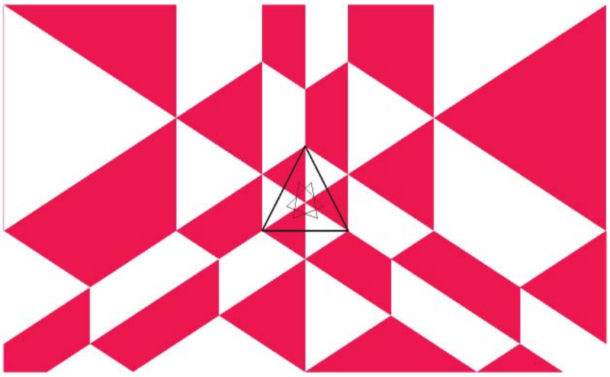

Рис. 5

Р е ш е н и е. Пусть O – любая точка вне плоскости треугольника Δ. Тогда искомое отношение равно отношению объема пирамиды $OABC$ к объему пирамиды $OA'B'C'$: S: S' =

$$\vec{A}\vec{B}\vec{C} : \vec{A'}\vec{B'}\vec{C'} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} : \tfrac{1}{7^3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 7.$$

Бассейны притяжения $Bass_1$, $Bass_2$ (Рис. 5) аттракторов τ′, τ″ трудно описать аналитически, поэтому мы вынуждены построить их численно. Из Рис. 5 подмечаем, что обход цикла τ′ совершается в положительном направлении (против часовой стрелки), а обход цикла τ″ – в отрицательном направлении. Этим фактом мы и воспользуемся для построения бассейнов притяжения. Если после достаточно большого числа N итераций взять три последовательные точки P, Q, R орбиты $\Omega(X)$ стартовой точки X, то эти три точки окажутся достаточно близко к точкам одного из аттракторов τ′ или τ″. Пусть $\vec{n} = \vec{p}\times\vec{q}$ – векторное произведение векторов $\vec{p} = \vec{PQ}$, $\vec{q} = \vec{QR}$, $V = \vec{p}\,\vec{q}\,\vec{n}$ – тройное произведение. Тогда если $V > 0$, то $X \in Bass_1$ и точке X приписывается цвет № 1; если $V < 0$, то $X \in Bass_2$ и точке X приписывается цвет № 2. При изображении на дисплее бассейнов притяжения нужно выделить некоторый участок (например, прямоугольной формы) и (разумнее всего) стартовую точку смещать по участку с шагом, равным пикселю, всякий раз окрашивая ее в цвет № 1 или № 2.

Если стартовая точка X удалена от центра треугольника Δ на расстояние d, то после $n \in \mathbb{N}$ итераций орбита $\Omega(X)$ приблизится к своему аттрактору на расстояние $\rho \propto 2^{-n}d$. Пусть $k \in \mathbb{N}$, $\varepsilon = 10^{-k}$, тогда орбита Ω(X) попадает в ε-окрестность одной из точек цикла τ′ при условии

$$\rho < \varepsilon \Rightarrow 2^{-n}d < 10^{-k} \Rightarrow n\ln 2 - \ln d > k\ln 10 \Rightarrow n > \frac{k\ln 10 + \ln d}{\ln 2}.$$

Если $d = 10^l$, то $n > (k + l)\,\mathrm{ld}\,10$. Например, если $k = 12$, $l = 2$, то $n > 50$. Следовательно, можно положить $N = 50$. Для более быстрого счета можно число ε увеличить, положив $\varepsilon = h$, где h – расстояние от точки $C' = (\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{4}{7})$ до ближайшей высоты треугольника Δ.

Пусть $A = (-1; 0)$, $B = (1; 0)$, $C = (0, \sqrt{3})$. Тогда

$$C' = \tfrac{1}{7}A + \tfrac{2}{7}B + \tfrac{4}{7}C =$$
$$= \tfrac{1}{7}(-1; 0) + \tfrac{2}{7}(1; 0) + \tfrac{4}{7}(0; \sqrt{3}) =$$
$$= (-\tfrac{1}{7} + \tfrac{2}{7}; \tfrac{4}{7}\sqrt{3}) = (\tfrac{1}{7}, \tfrac{4}{7}\sqrt{3}).$$

Следовательно, можно положить $\varepsilon = 0{,}1425 \approx \frac{1}{7}$, $\varepsilon < \frac{1}{7}$. Тогда

$$\rho < \varepsilon \Rightarrow 2\text{–}nd < \varepsilon \Rightarrow n\ln 2 - \ln d > \ln 7 \Rightarrow n > \frac{\ln 7 + \ln d}{\ln 2}.$$

Например, если d = 100, то n > 10.

Обобщение. Пусть $\Delta \subset \mathbb{R}m$ – правильный m-симплекс, то есть многогранник с вершинами

A0 = (1, 0, …, 0),

A1 = (0, 1, …, 0),

…………………

Am = (0, 0, …, 1),

X = (x0, x1,…, xm) = (xk), k = 0..m, x0 + x1 + … + xm = 1, – произвольная точка, α – гомотетия с коэффициентом 1/2 и центром A = (ak), Σak = 1. Тогда α отображает X в Y = α(X) = (yk), $y_k = \frac{x_k + a_k}{2}$, k = 0..m.

Пусть α0, α1, …, αm – гомотетии с центрами A0, A1, …, Am и коэффициентом 1/2. Определим отображение f пространства $\mathbb{R}$m на себя, применив принцип наибольшей удаленности: если точка X = (xk) удалена от вершины Ak дальше, чем от других вершин симплекса Δ, то положим f (X) = αk(X), при этом

$$\alpha_k(X) = (\frac{x_0}{2}, ..., \frac{x_k+1}{2}, ..., \frac{x_m}{2}).$$

Рассмотрим гомотетию fm+1 = αm∘ … ∘ α1∘ α0, которая есть композиция (последовательное выполнение) гомотетий α0, α1, …, αm, и найдем аттрактор C отображения f. Очевидно, центр B гомотетии f °m+1 принадлежит C. Это означает, что гомотетия f °m+1 отображает точку B = (b0, b1,…, bm), b0 + b1 + … + bm = 1 на себя:

$$B = (\frac{b_0+2^0}{2^m}, ..., \frac{b_k+2^k}{2^m}, ..., \frac{b_m+2^m}{2^m}).$$

Следовательно, $B = (b_k) = (\frac{2^k}{2^m - 1})$, k = 0..m.

В частности, если m = 1, то $B = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$;

если m = 2, то $B = (\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{4}{7})$;

если m = 3, то $B = (\frac{1}{15}, \frac{2}{15}, \frac{4}{15}, \frac{8}{15})$ (Рис. 6);

если m = 4, то $B = (\frac{1}{31}, \frac{2}{31}, \frac{4}{31}, \frac{8}{31}, \frac{16}{31})$.

Искомый аттрактор есть цикл C = {B, α0(B), …, f °m+1 (B)} порядка m + 1.

Любая перестановка в отображении f °m+1 = αm ∘ … ∘ α1 ∘ α0 гомотетий α1, …, αm дает новый цикл. Следовательно, f имеет m! аттракторов – циклов длины m + 1, которые суть образы цикла C при симметриях симплекса Δ (для m = 3 см. Рис. 7, 8).

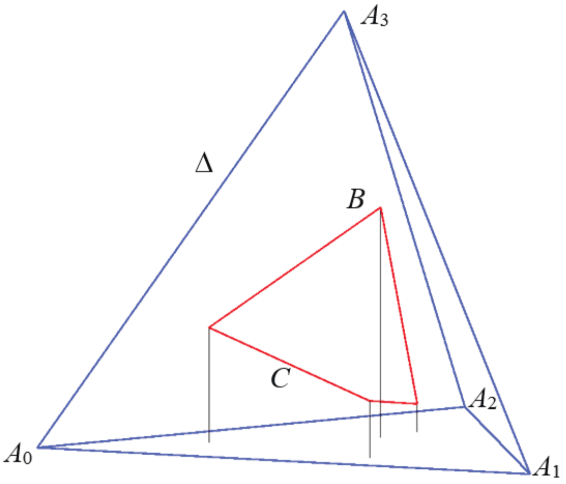

Рис. 6

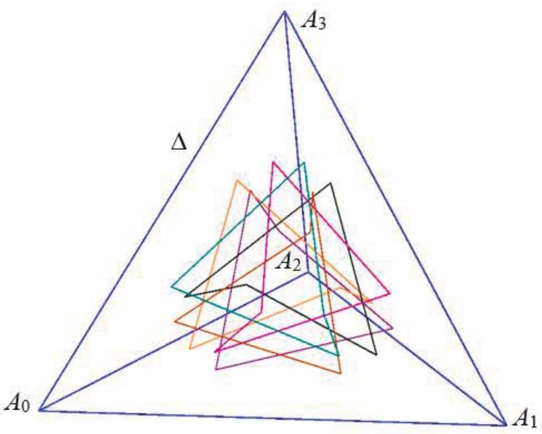

Рис. 7

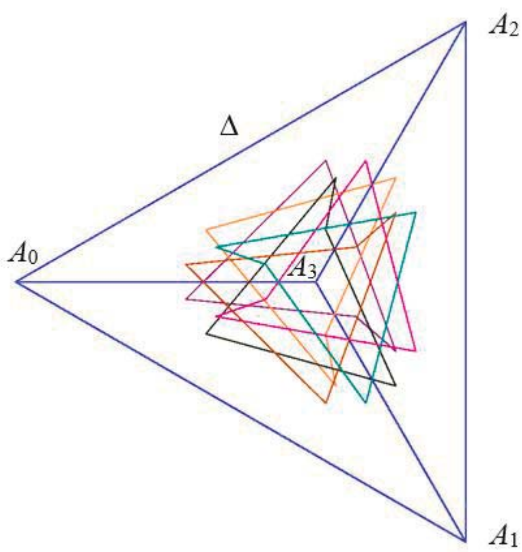

Рис. 8

Задача 2. Найти отношение объема V симплекса Δ к объему V′ тетраэдра Δ′, вершинами которого являются точки цикла C.

Решение данной задачи аналогично решению задачи 2. Пусть O – любая точка вне гиперплоскости симплекса Δ. Тогда искомое отношение равно

$$\frac{V}{V'} = \det E : \frac{1}{(2^{m+1}-1)^{m+1}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2^2 & 2^3 & ... & 2^{m-1} & 2^m \\ 2^m & 1 & 2 & 2^2 & 2^3 & ... & 2^{m-1} \\ 2^{m-1} & 2^m & 1 & 2 & 2^2 & 2^3 & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 2^{m-k+2} & 2^{m-k+3} & ... & 2^m & 1 & ... & 2^{m-k+1} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 2 & 2^2 & 2^3 & ... & 2^{m-1} & 2^m & 1 \end{vmatrix} =$$

$$=1:\frac{1}{(2^{m+1}-1)^{m+1}}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2^2 & 2^3 & \dots & \dots & 2^m \\ 0 & 1-2^{m+1} & * & * & * & \dots & * \\ 0 & 0 & 1-2^{m+1} & * & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1-2^{m+1} & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1-2^{m+1} \end{vmatrix} =$$

$$=(-1)^m(2^{m+1}-1).$$

Квадрат. Пусть α1, α2, α3, α4 – гомотетии с центрами в вершинах квадрата A1A2A3A4 и коэффициентом k = 0,5. Принцип максимальной удаленности применим к квадрату Q и выясним аттракторы возникающего при этом нелинейного отображения f. Аттракторами этого отображения являются инволютивные пары {P, R}, {Q, S}, где $P=\frac{1}{3}A_1+\frac{2}{3}A_3$, $Q=\frac{1}{3}A_2+\frac{2}{3}A_4$, $R=\frac{1}{3}A_3+\frac{2}{3}A_1$, $S=\frac{1}{3}A_4+\frac{2}{3}A_2$.

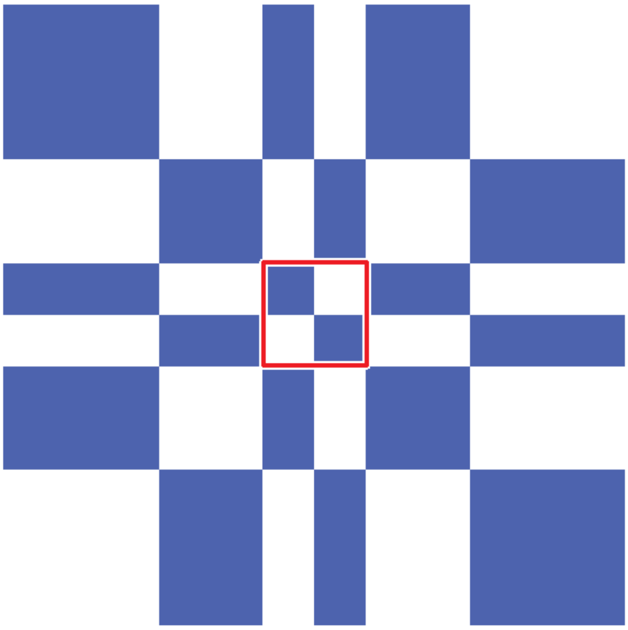

Рис. 9

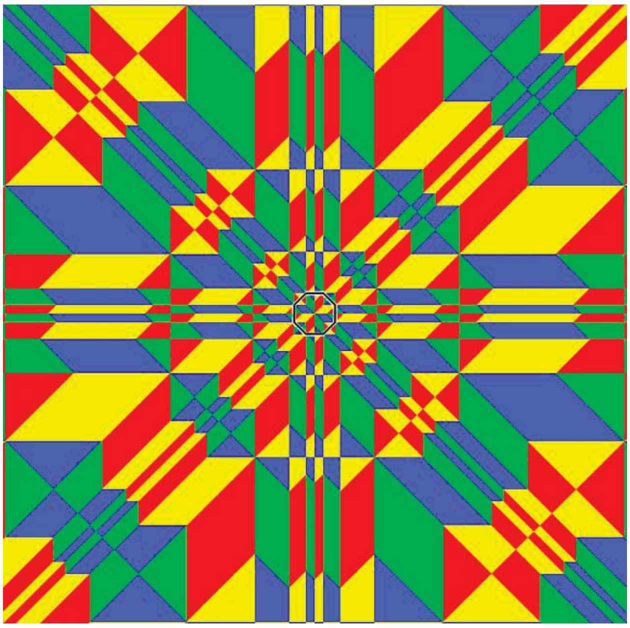

Рис. 10

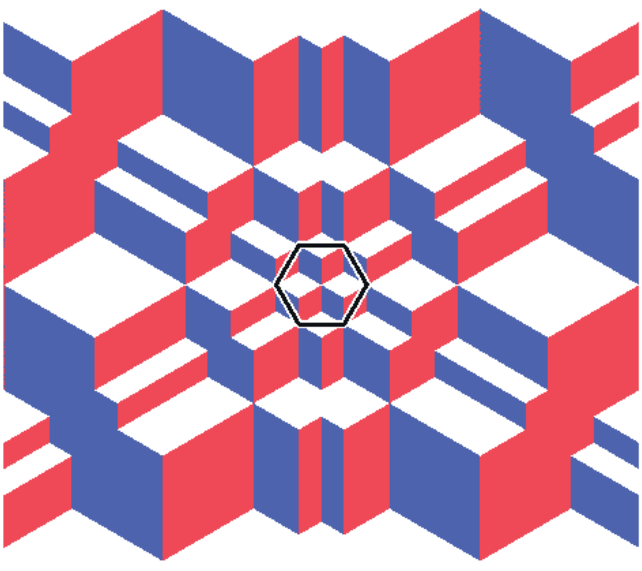

Рис. 11

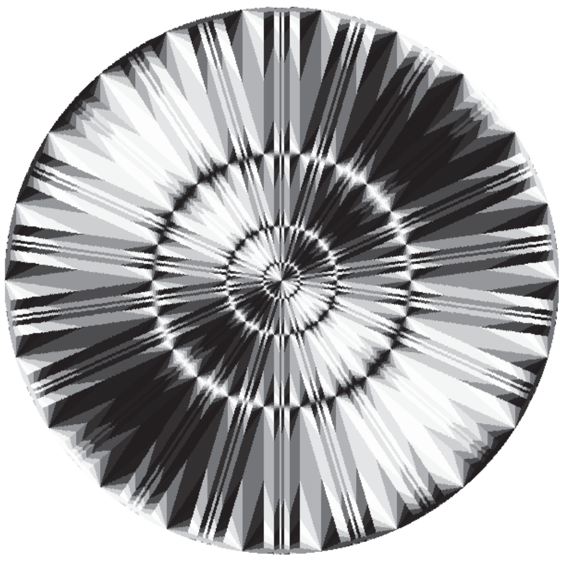

Рис. 12

Действительно, если точка X принадлежит квадрату K3 с диагональю OA3, где O – центр квадрата Q, то f = α1. Очевидно, точка Y = α1(X) принадлежит квадрату K1 с диагональю OA1; поэтому f = α3, Z = α3(Y) ∈ K3. Поскольку f – сжимающее отображение, то пара {P, R} – аттрактор отображения f. Аналогично доказывается, что {Q, S} – аттрактор f.

На Рис. 9 изображены бассейны Bass1, Bass2 притяжения двух аттракторов отображения f. Заметим, что в случае квадрата для любой точки M плоскости можно аналитически записать условия принадлежности этой точки тому или иному бассейну притяжения. Поскольку квадрат имеет 4 оси симметрии, то достаточно выяснить искомое условие для точек первого квадранта $\{(x, y) \in \mathbb{R}2 \mid x > 0, y > 0\}$. Преобразование $x' = \log2 (x + 1)$, $y' = \log2 (y + 1)$ превращает изображенный на Рис. 9 паркет в бесконечную шахматную доску. Обозначив целую часть числа x через [x], запишем: $[x'] + [y'] \equiv 0 \bmod 2 \Rightarrow (x, y) \in$ Bass1, $[x'] + [y'] \equiv 1 \bmod 2 \Rightarrow (x, y) \in$ Bass2.

На Рис. 10–12 представлены бассейны притяжения нелинейных отображений, порожденных правильными соответственно 8-, 6-, 22-угольниками

Заключение. Технология ресурсных занятий в исследовании сложных проблем эффективно проявляет синергию математического образования, ведущую к самоорганизации и развитию способностей и творческой активности. Отметим, что рассмотренные нелинейные отображения и связанные с ними аттракторы и бассейны притяжения могут быть обобщены: существование альтернативных антенн в форме фракталов, аттракторы и бассейны притяжения, орнаменты, порождаемые многоугольниками и подобные представления в трехмерном пространствевесьма значимы в дизайне.

Библиографический список

1. Кроновер, Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории [Текст] / Р. М. Кроновер. – М. : Постмаркет, 2000. – 252 с.
2. Лоренц, Э. Детерминированное непериодическое течение [Текст] / Э. Лоренц // Странные аттракторы. – М. : Мир, 1981. – С. 88–117.
3. Мандельброт, Б. Б. Фрактальная геометрия природы [Текст] / Б. Б. Мандельброт. – М. : Институт компьютерных исследований, 2002. – 656 с.
4. Олемской, А. И., Флат, А. Я. Использование концепции фрактала в физике конденсированной среды [Текст] / А. И. Олемской, А. Я. Флат // УФН. – 1993. – Т. 163. – № 12. – С. 1–50.
5. Осташков, В. Н. Диалоги о фракталах: Научное издание [Текст] / В. Н. Осташков. – Изд. 2-е, исп. и доп. – Тюмень : Изд-во ТГНГУ, 2012. – 296 с.
6. Потапов, А. А. Фракталы в радиофизике и радиолокации: Топология выборки. Изд. 2-е, перераб. и доп. [Текст] / А. А. Потапов. – М. : Университетская книга, 2005. – 848 с.: ил.
7. Федер, Е. Фракталы [Текст] / Е. Федер. – М. : Мир, 1991. – 256 с.
8. Шустер, Г. Детерминированный хаос: Введение [Текст] / Г. Шустер ; пер. с англ. – М. : Мир, 1988. – 240 с., ил.
9. Henon M. A two-dimensional mapping with a strange attractor. – Comm. Math. Phys. 50, 69 (1976).
10. Шадриков, В. Д. От индивида к индивидуальности [Текст] : монография / В. Д. Шадриков. – М. : Институт психологии РАН, 2009. – 656 с.
11. Подготовка учителя математики: Инновационные подходы [Текст] / под ред. В. Д. Шадрикова. – М. : Гардарики, 2002. – 383 с.
12. Смирнов, Е. И. Технология наглядно-модельного обучения математике [Текст] : монография / Е. И. Смирнов. – Ярославль : Изд-во ЯГПУ, 1997. – 323 с.
13. Рубинштейн, С. Л. О мышлении и путях его исследования [Текст] / С. Л. Рубинштейн. – М. : АН СССР, 1958.
14. Смирнов, Е. И. Фундирование опыта в профессиональной подготовке и инновационной деятельности педагога [Текст] : монография / Е. И. Смирнов. – Ярославль : Канцлер, 2012. – 654 с.
15. Вербицкий, А. А. Активное обучение в высшей школе: контекстный подход [Текст] / А. А. Вербицкий. – М. : Высшая школа, 1991. – 207 с.
16. Хакен, Г. Синергетика [Текст] / Г. Хакен. – М. : Мир, 1980. – 404 с
17. Подъяков, А. Н. Психология обучения в условиях новизны, сложности, неопределенности. Психологические исследования [Текст] / А. Н. Подъяков. – М. : Высшая школа экономики, 2015. – С. 6–10.
18. Заде, Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений [Текст] / Л. Заде. – М. : Мир, 1976. – 166 с.
19. Смирнов, Е. И., Абатурова, В. С. Направления и пути развертывания фундирующих модусов развития личности будущего педагога [Текст] / Е. И. Смирнов, В. С. Абатурова // Ярославский педагогический вестник. Серия психолого-педагогических наук. – Ярославль : Изд-во ЯГПУ. – 2015. – Т. 2. – № 6. – С. 37–43.

Bibliograficheskij spisok

1. Kronover, R. M. Fraktaly i haos v dinamicheskih sistemah. Osnovy teorii [Tekst] / R. M. Kronover. – M. : Postmarket, 2000. – 252 s.
2. Lorenc, Je. Determinirovannoe neperiodicheskoe techenie [Tekst] / Je. Lorenc // Strannye attraktory. – M. : Mir, 1981. – S. 88–117.

3. Mandel'brot, B. B. Fraktal'naja geometrija prirody [Tekst] / B. B. Mandel'brot. – M. : Institut komp'juternyh issledovanij, 2002. – 656 s.

4. Olemskoj, A. I., Flat, A. Ja. Ispol'zovanie koncepcii fraktala v fizike kondensirovannoj sredy [Tekst] / A. I. Olemskoj, A. Ja. Flat // UFN. – 1993. – T. 163. – № 12. – S. 1–50.

5. Ostashkov, V. N. Dialogi o fraktalah: Nauchnoe izdanie [Tekst] / V. N. Ostashkov. – Izd. 2-e, isp. i dop. – Tjumen' : Izd-vo TGNGU, 2012. – 296 s.

6. Potapov, A. A. Fraktaly v radiofizike i radiolokacii: Topologija vyborki. Izd. 2-e, pererab. i dop. [Tekst] / A. A. Potapov. – M. : Universitetskaja kniga, 2005. – 848 s.: il.

7. Feder, E. Fraktaly [Tekst] / E. Feder. – M. : Mir, 1991. – 256 s.

8. Shuster, G. Determinirovannyj haos: Vvedenie [Tekst] / G. Shuster ; per. s angl. – M. : Mir, 1988. – 240 s., il.

9. Henon M. A two-dimensional mapping with a strange attractor. – Comm. Math. Phys. 50, 69 (1976).

10. Shadrikov, V. D. Ot individa k individual'nosti [Tekst] : monografija / V. D. Shadrikov. – M. : Institut psihologii RAN, 2009. – 656 s.

11. Podgotovka uchitelja matematiki: Innovacionnye podhody [Tekst] / pod red. V. D. Shadrikova. – M. : Gardariki, 2002. – 383 s.

12. Smirnov, E. I. Tehnologija nagljadno-model'nogo obuchenija matematike [Tekst] : monografija / E. I. Smirnov. – Jaroslavl' : Izd-vo JaGPU, 1997. – 323 s.

13. Rubinshtejn, S. L. O myshlenii i putjah ego issledovanija [Tekst] / S. L. Rubinshtejn. – M. : AN SSSR, 1958.

14. Smirnov, E. I. Fundirovanie opyta v professional'noj podgotovke i innovacionnoj dejatel'nosti pedagoga [Tekst] : monografija / E. I. Smirnov. – Jaroslavl' : Kancler, 2012. – 654 s

15. Verbickij, A. A. Aktivnoe obuchenie v vysshej shkole: kontekstnyj podhod [Tekst] / A. A. Verbickij. – M. : Vysshaja shkola, 1991. – 207 s.

16. Haken, G. Sinergetika [Tekst] / G. Haken. – M. : Mir, 1980. – 404 s

17. Pod#jakov, A. N. Psihologija obuchenija v uslovijah novizny, slozhnosti, neopredelennosti. Psihologicheskie issledovanija [Tekst] / A. N. Pod#jakov. – M. : Vysshaja shkola jekonomiki, 2015. – S. 6–10.

18. Zade, L. Ponjatie lingvisticheskoj peremennoj i ego primenenie k prinjatiju priblizhennyh reshenij [Tekst] / L. Zade. – M. : Mir, 1976. – 166 s.

19. Smirnov, E. I., Abaturova, V. S. Napravlenija i puti razvertyvanija fundirujushhih modusov razvitija lichnosti budushhego pedagoga [Tekst] / E. I. Smirnov, V. S. Abaturova // Jaroslavskij pedagogicheskij vestnik. Serija psihologo-pedagogicheskih nauk. – Jaroslavl' : Izd-vo JaGPU. – 2015. – T. 2. – № 6. – S. 37–43.