

А. А. Кытманов, В. А. Лазарева, С. А. Тихомиров

### Системы научных вычислений как инструмент синергии в математическом образовании инженера

«Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 16–18–10304)»

В статье рассматривается применение систем научных вычислений в качестве инструмента наглядно-модельного подхода в образовании для студентов технических специальностей. Авторы анализируют сложившуюся ситуацию в области преподавания технических дисциплин и сопоставляют с необходимостью понимания студентами преподаваемого материала. В этом аналитическом контексте применение систем научных вычислений в образовании рассматривается как необходимый элемент при подготовке к лекционным занятиям и при реализации практических заданий и лабораторных работ. В качестве примера использования систем научных вычислений для эффективной интеграции современных и традиционных методов в обучении рассматривается система компьютерной алгебры SageMath, обладающая большими возможностями для создания визуализаций и разработки заданий различных типов по широкому спектру дисциплин в области математики и информатики, кроме того, позволяющая успешно реализовывать и контролировать проектные задания в малых группах. Также приводятся примеры построения заданий на основе систем научных вычислений для дисциплины, преподаваемой студентам технических специальностей.

Ключевые слова: системы научных вычислений, системы компьютерной алгебры, наглядно-модельный подход, наглядное моделирование, средства визуализации.

A. A. Kytmanov, V. A. Lazareva, S. A. Tikhomirov

### Scientific Computing Systems as a Part of the Visual-Model Approach to Education

The article discusses the use of scientific computing systems as a part of the cognitive-visual approach in teaching students majoring in engineering. The authors study the question whether the existing engineering teaching techniques are effective enough for student comprehension. In this context the application of scientific computing systems is deemed vital for lecture comprehension, practical and laboratory task performance. As an example of use of scientific computing systems for effective integration of modern and traditional methods in training, the system of computer algebra SageMath having great opportunities for creation of visualization and development of tasks of various types on a wide range of disciplines in the field of mathematics and informatics, besides allowing to implement and control successfully detailed designs in small groups is considered. Moreover, the authors provide sample tasks for engineering students based on the application of scientific computing systems.

Keywords: scientific computing systems, computer algebra systems, a visual-model approach, visual modeling, means of visualization.

#### Описание проблематики

В условиях динамично развивающегося современного общества требования к профессионализму специалистов изменяются очень быстро. Рынки труда сегодня ориентированы на специалиста нового качества, компетентного, мобильного и конкурентоспособного, ответственного, готового к активным действиям по получению, усвоению, анализу и передаче профессионально значимой информации, способного к принятию решения и оценке его эффективности, умеющего проектировать свою деятельность и осуществлять дальнейшее самообразование. В связи с этим перед системой высшего образования ставится проблема совершенствования форм, средств, методов обучения, а также поиска инновационных путей их использования в учебной деятельности.

Как отмечает В. С. Белоголов [9], моделирование информационной среды обучения является одной из важных проблем современного образования. С этой целью рассматриваются язык (текст, рисунок, формула), базовые формы (модели, навыки, инструменты, связи, образы, тексты, задания), способы представления знаний, а также в совокупности различные типы информационных сред.

Моделирование как средство научного познания стало развиваться в XX в., получив признание практически во всех отраслях современной науки: техническом конструировании, строительстве и архитектуре, астрономии и физике, химии и биологии и, наконец, в общественных науках. В настоящее время термин «модель» имеет множество значений [5].

Л. С. Выготский и А. Р. Лурия, говоря об особенностях психического развития человека, замечают, что, как в процессе исторического развития человек изменяет не свои естественные органы, а орудия, так и в процессе своего психического развития он совершенствует работу интеллекта, главным образом, за счет развития особых технических «вспомогательных средств – мышления и поведения». Психическое развитие человека осуществляется через усвоение всего предшествующего опыта, культуры, включающей, в том числе, и различные знаково-символические системы.

Одним из важных условий формирования полноценных знаний является использование разных языков для выражения одного и того же содержания как способа отделения содержания от формы [11], то есть умение выражать свойства и отношения объектов через символические модели.

Б. Д. Эльконин пишет, что если понятие – это продукт обучения, то модель – это необходимая форма понятия. А «работа» понятия в форме модели – это мысленное преобразование реальности.

По построенной модели происходит анализ всех составляющих ее элементов, что, в свою очередь, приводит к системности мышления.

Н. И. Поливанова и И. В. Ривина характеризуют системность мышления следующим образом: «Она показывает способность человека рассматривать объект или задачу как систему связанных элементов, устанавливать принцип строения этой системы, а также переносить найденный принцип на решение других задач».

То есть можно сказать, что для моделирования необходима способность к системному мышлению, так как именно эта способность позволяет разложить данное (задачу, объект или объект в неких условиях) на взаимосвязанные элементы, обнаруживать эту связь, а значит и обнаруживать свойства данного объекта.

Особую роль моделирование играет в учебном процессе. Как справедливо отмечают Е. И. Смирнов, В. В. Богун и В. Н. Осташков [18], «... актуальной является проблема такой организации процесса обучения математике, когда представления, возникающие в мышлении обучаемых, отражают основные, существенные, ключевые стороны предметов и явлений, процессов, в том числе посредством разумного моделирования математического знания... в настоящий период необходимо дать единую трактовку

наглядного обучения математике, разработать приемы деятельности учителя в процессе наглядного обучения, исследовать специфику наглядности в обучении математике в школах и вузах, используя положительный опыт передовых учителей и ученых».

Одним из перспективных направлений в конструировании специальной информационной среды обучения математическим наукам являются методы подачи информации, основанные на относительном равноправии вербального, геометрического и формульного способов представления информации, которые, с точки зрения наглядно-модельного подхода [18], продуктивно задействуют резервы визуального мышления при широком и целенаправленном использовании познавательной функции наглядности, образовательное и воспитательное значение которой достаточно велико. Совокупность условий обучения, которые предполагают наличие как традиционно наглядных, так и специальных средств и приемов, позволяющих активизировать работу зрения с целью получения продуктивных результатов, Н. А. Резник называет визуальной учебной средой или визуальной средой обучения.

Исследования важных проблем, касающиеся применения наглядности и визуализации математической информации, представлены в работах В. В. Богуна, М. И. Башмакова, В. А. Далингера, Н. М. Ежовой, Д. Д. Ефремовой, Н. В. Иванчук, О. О. Князевой, Н. С. Малецкой, В. Н. Осташкова, Н. А. Резник, П. Г. Сатьянова, Е. И. Смирнова, А. Я. Цукаря, М. А. Чошанова, Н. В. Щукиной и др. Однако вопросы методики использования средств визуализации в процессе изучения различных разделов математики, предусмотренного Федеральными государственными образовательными стандартами высшего образования, требуют дальнейшего изучения.

В настоящее время в силу сложившихся обстоятельств возникают противоречия между

- необходимостью развития математической компетентности студентов и недостаточной разработанностью соответствующего дидактического и методического обеспечения;

- огромным объемом накопленных наукой психофизиологических и дидактических знаний об особенностях и закономерностях процесса обучения математике и недостаточной их востребованностью в практике обучения студентов;

- многофункциональными возможностями когнитивно-визуального подхода к обучению ма-

тематике студентов и неразработанностью его теоретико-методологических основ;

– возрастающими возможностями компьютерных средств визуализации и отсутствием эффективных методик их использования в процессе обучения [3].

При работе со знаками, различными графическими изображениями возникает проблема не только в том, чтобы заучить и зрительно запомнить, как пишется тот или другой знак, обозначается та или иная формула. Часто приходится тратить много времени на понимание знаковой записи формулы, а также на запоминание формулы, если не понятно, что за ней стоит, что она, собственно, выражает и обозначает [7].

Проблема активизации познавательной деятельности студентов всегда была одной из наиболее актуальных в практике обучения, поэтому постоянно ведется поиск инструментария, позволяющего эффективно использовать совместную познавательную деятельность преподавателя и студентов [12]. Под влиянием современных тенденций нынешние студенты стали менее восприимчивы к «стандартным» технологиям обучения. Кроме этого, доступ в интернет и возможность использования математических вычислительных систем позволяет получать решение стандартных математических задач средствами вычислительной техники. Так, например, особой популярностью у студентов пользуется бесплатный онлайн-процессор знаний Wolfram|Alpha (<http://www.wolframalpha.com/>), который обладает системой интеллектуального построения математического кода по тексту, введенному в свободной форме.

Так или иначе, студенты уже используют такие средства вычисления, но в минимальном функционале. Поэтому вполне актуально внедрение в образовательный процесс подобных ресурсов – как в качестве средства визуализации на лекционных занятиях, так и в качестве инструментов выполнения практических и лабораторных заданий.

Отметим также, что такие ресурсы являются удобной платформой для их использования в различных форматах работы при обучении.

При проектировании курсов и подготовке лабораторных работ и практических занятий все чаще возникает потребность в нетрадиционных технологиях (для примера: проектная деятельность, кейсовый метод, деловые игры и прочие активно-интерактивные технологии). Преподава-

телю важно в данном случае не только подготовить необходимый материал, но и подать его.

### Системы научных вычислений

В качестве эксперимента по одной из дисциплин физико-математической специальности предполагается представление студентам теоретического материала с параллельным использованием средств визуализации – систем компьютерной алгебры.

Компьютерная алгебра (символьные вычисления) – раздел математики, который включает алгоритмизацию аналитических методов решения задач, их компьютерную реализацию и предполагает, что исходные данные, как и результаты решения, сформулированы в аналитическом (символьном) виде, допускающем параметрическое задание.

Системы компьютерной алгебры (СКА) позволяют проводить математические исследования; разрабатывать и анализировать алгоритмы; проводить математическое моделирование и компьютерный эксперимент; анализировать и обрабатывать данные; визуализировать, реализовывать научную и инженерную графику; разрабатывать графические и расчетные приложения. При этом, поскольку такие системы содержат операторы для базовых вычислений, почти все алгоритмы, отсутствующие в стандартных функциях, можно реализовать посредством написания собственной программы.

Также к системам символьной математики сегодня прибегают теоретики (так называемые чистые, а не прикладные математики), например для проверки своих гипотез [14].

Данные системы (например, Maple, Mathematica, SageMath) не требуют от преподавателей и студентов конкретно умения программировать на тех или иных языках программирования, отлаживать программы, отслеживать ошибки и тратить неограниченное количество времени на получение результата. В математических пакетах применяется принцип конструирования модели, а не традиционное «искусство программирования», что заметно упрощает сам процесс внедрения систем компьютерной алгебры в образовательный процесс студентов технических специальностей, как для преподавателей, так и для студентов. Более того, такие рутинные операции, как раскрытие скобок, преобразование выражений, нахождение корней уравнений, производных и неопределенных интегралов, компьютер самостоятельно осуществляет в символьном виде, причем практически без вмеша-

тельства пользователя, поэтому применение именно СКА представляется наиболее подходящим в качестве инструмента визуализации в учебном процессе на физико-математических специальностях в высших учебных заведениях.

### Использование систем компьютерной алгебры на занятиях лекционного типа

Использование систем компьютерной алгебры позволит видоизменить саму технологию подачи учебного материала, а также, по возможности, применить такой когнитивно-визуальный подход как для теоретической и практической частей отдельной дисциплины, так и для самостоятельной работы с теоретико-методологическим обоснованием.

В качестве примера использования интерактивных инструментов систем символьных вычислений ниже приведено построение кривых второго порядка с помощью анимации в пакете Wolfram Mathematica.

*Тема:* «Кривые второго порядка. Эксцентриситет. Конические сечения».

Эксцентриситет – числовая характеристика кривой второго порядка, показывающая степень его отклонения от окружности.

Несмотря на то, что невырожденные кривые второго порядка (эллипс, гипербола, парабола) имеют разные канонические уравнения, они имеют одно «происхождение», которое можно продемонстрировать посредством их общего уравнения в полярных координатах:

$$\rho(\varphi) = \frac{p}{1 \pm e \cos \varphi},$$

где  $e$  – эксцентриситет, а  $p$  – фокальный параметр.

Зафиксировав в данном уравнении  $p$  и меняя  $e$ , будем получать различные кривые второго порядка, а именно

- при  $e = 0$  – окружность,
- при  $0 < e < 1$  – эллипс,
- при  $e = 1$  – параболу,
- при  $e > 1$  – гиперболу.

Проиллюстрируем данный факт с помощью анимации в пакете Wolfram Mathematica, задающейся простым кодом:

```
Manipulate [PolarPlot [1/(1 - e*Cos [t]), {t, 0, 2 Pi}, PlotRange -> 10, PlotStyle -> Directive [Blue]], {e, 0, 1.5, Appearance -> «Open»}]
```

Меняя значения эксцентриситета на панели сверху, будем получать графики различных кривых второго порядка.

Значениям  $e=0$  и  $e=0.8$  соответствуют окружность и эллипс.

Значениям  $e=1$  и  $e=1.2$  – парабола и гипербола.

Приведенный ниже код (взят с <http://demonstrations.wolfram.com/>) реализует анимацию геометрической иллюстрации кривых второго порядка как конических сечений:

```
Manipulate [
  Show [Graphics3D [Opacity [0.8], Cone [{{0, 0, -2.001}, {0, 0, 0}}, 2.001],
    Cone [{{0, 0, 2.001}, {0, 0, 0}}, 2.001]],
  PlotRange -> {{-2, 2}, {-2, 2}, {-2, 2}}, Axes -> True],
  ContourPlot3D [-a*x + 0 y + (1 - Abs [a])*z - d == 0, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}, {z, -2, 2}, Boxed -> False,
  BoundaryStyle -> None, ContourStyle -> Opacity [0.7, Yellow], MeshFunctions ->
  Function [x, y, z], ((x - 0)^2 + (y - 0)^2 - ((z - 0)*1)^2) - (-a*x + 0 y + (1 - Abs [a])*z - d),
  MeshStyle -> {{Thick, Darker [Green, 0.5]}}, Mesh -> {{0}},
  PlotRange -> {{-2, 2}, {-2, 2}, {-2, 2}}, MaxRecursion -> 10]],
  Boxed -> boxed, Axes -> osy, ImageSize -> {400, 400}, SphericalRegion -> True], «plane shift»,
  {{d, 0, «»}, -2, 2, 0.02, Appearance -> «Labeled», ImageSize -> Tiny}, «», «plane slope»,
  {{a, 0, «»}, -1, 1, 0.02, Appearance -> «Labeled», ImageSize -> Tiny}, «», «», «display axes», {{osy, True, «»}, {True, False}}, «»,
  «display the bounding box», {{boxed, False, «»}, {True, False}},
  Bookmarks -> {«degenerate conic: a point»:> {a = 0., d = 0},
  «degenerate conic: a straight line»:> {a = -0.5, d = 0},
  «degenerate conic: a pair of intersecting lines»:> {a = -0.68, d = 0},
  «elliptical cross\ [Hyphen]section»:> {a = -0.16, d = 0.66},
  «hyperbolic cross\ [Hyphen]section»:> {a = -0.78, d = 0.52},
  «parabolic cross\ [Hyphen]section»:> {a = -0.5, d = 0.52}},
  SaveDefinitions -> True]]
```

Меняя параметры сдвига и наклона секущей плоскости, мы можем получить все типы кривых второго порядка (точка, прямая, пара пересекающихся прямых, окружность, эллипс, парабола и гипербола).

Таким образом, снабжение курса интерактивными инструментами не только позволит повысить интерес студентов к математике, но и помочь лучше ее понять, а также освоить азы программирования в специализированных программных пакетах.

Применение средств визуализации математической информации в процессе обучения позволит не только наглядно продемонстрировать построение графиков на основе изучаемых формул, показать зависимость переменных в формулах в режиме реального времени и пр., но и сформировать понимание у студентов цели доказательства той или иной конкретной теоремы.

Зачастую студенты естественно-научных направлений подготовки, изучающие на первых курсах основы алгебры, математический анализ и многое другое, не понимают, для чего это изучается. На более старших курсах, когда студенты снова встречаются с теми же формулами, приходит осознание, для чего все это доказывалось ранее (например, «Алгебра» и «Теория вероятностей» на 1–2 курсах и «Криптография» на 3–4 курсах). Иными словами, необходимо смещение акцента от теоретического материала и набора типовых задач к заданиям, иллюстрирующим когнитивно-визуальную связь математики с профессиональной областью.

Таким образом, с помощью визуализации в процессе обучения уже на младших курсах применимость изучаемого в будущем станет более объяснимой и непротиворечивой, что, в свою очередь, может сработать на результат. Чем яснее понимание того, для чего, что и как делается, тем больше вероятность позитивного результата.

### **Использование систем компьютерной алгебры на занятиях практического (лабораторного) типа**

В качестве инструмента построения подобных занятий рассмотрим пример системы SageMath ([sagemath.org](http://sagemath.org)) и ее облачной платформы SageMathCloud ([cloud.sagemath.com](http://cloud.sagemath.com)). Изначально система разрабатывалась под операционную систему Linux, работает также под ОС Windows с помощью виртуальной машины.

Sage – это бесплатное и свободно распространяемое математическое программное обеспечение с открытыми исходными кодами для исследовательской работы и обучения в самых различных областях, включая алгебру, геометрию, теорию чисел, криптографию, численные вычисления и др.

Одной из основных целей Sage является создание доступной, бесплатной и открытой альтернативы таким системам компьютерной алгебры, как Maple, Mathematica, Magma и MatLab.

Существенная часть Sage написана на языке программирования Python.

Работа в Sage может быть осуществлена несколькими путями:

Notebook (графический интерфейс, также интерфейс Notebook); интерактивная командная строка (интерактивная оболочка); программы (создание интерпретируемых и компилируемых программ в Sage); скрипты (создание самостоятельных скриптов на Python, использующих библиотеки Sage).

Предполагаемая аудитория пользователей Sage – это школьники старших классов, студенты, учителя, профессора и математики-исследователи.

Своей целью разработчики Sage ставят предоставление программного обеспечения, которое было бы полезно для изучения и исследований с помощью математических конструкций в алгебре, геометрии, теории чисел, численных вычислениях и т. д. Sage упрощает интерактивное экспериментирование с помощью математических объектов.

Sage эффективен в вычислениях, поскольку использует высокооптимизированное программное обеспечение, как, например, GMP, PARI, GAP, and NTL.

Исходный код свободно доступен, а это дает пользователям возможность понять, что именно выполняется системой, и легко дополнять ее. Так же, как математики приобретают более глубокое понимание теоремы, углубляясь в ее доказательство, люди, выполняющие вычисления, в силах понять, как эти вычисления производятся, прочитают документированный исходный код. При использовании вычислений Sage в публикациях для читателей можно настроить доступ к Sage и ко всему исходному коду. Также есть возможность архивации и перераспределения используемой версии Sage.

Sage легко компилируется из исходных кодов под GNU/Linux, OS X и Windows, что предоставляет пользователям возможность модифицировать и оптимизировать систему под свои предпочтения.

Также Sage обеспечивает простые и надежные интерфейсы для многих других систем компьютерной алгебры, включая PARI, GAP, Singular, Maxima, KASH, Magma, Maple, and Mathematica.

Sage создан для объединения и расширения возможностей существующего математического программного обеспечения.

Sage хорошо документирован: имеется доступ к учебному пособию, руководству по программированию, справочному руководству и how-to, включающим многочисленные примеры и обобщение математической основы.

Также есть возможность расширения: объявление новых типов данных, расширение встроенных, использование кода, написанного во множестве языков.

Основной язык реализации Sage – это Python, однако код, который должен обрабатываться быстро, написан на компилируемом языке.

Идеология SageMath состоит, в частности, в интеграции различных free, open source систем вычислений и языков программирования.

Приведем пример построения работы с использованием платформы SageMath.

Лабораторная работа по дисциплине «Теоретико-числовые методы в криптографии» (специальности 090301.65, 090900.62) состоит из трех этапов и содержит следующие задания:

1. Реализация функций работы с большими числами.

2. Реализация динамической библиотеки на C++ для работы с большими числами.

3. Реализация обертки библиотеки для высокоуровневого языка.

На каждом этапе необходимо разработать программу и оформить отчет о выполненной работе. Привести алгоритмы и тесты.

Также допускается работа в группах.

Выполнять подобное задание очень удобно при помощи системы SageMath, поскольку в ней имеется возможность работы в облачной среде SageMathCloud, что позволяет редактировать вычисления дистанционно, при этом не храня по множеству копий на компьютере. Также облачная платформа поддерживает коллективную удаленную работу над проектом, что очень важно для активных методов обучения, имеет свой компилятор, а также поддерживает различные компиляторы таких популярных языков, как C++, C#, Fortran, Java, Perl, R, Xml. Взаимодействие пользователей системы, работающих над проектом, и корректировка проектов может осуществляться одновременно, при этом сохраняются исправленные копии корректировок всех пользователей. Кроме того, преподаватель, являясь членом группы проекта, может контролировать не только ко-

нечный результат, но и весь ход выполнения работы.

В настоящее время мы можем наблюдать общемировую тренд перехода на свободно распространяемое программное обеспечение с открытым исходным кодом (free, open source) [16, 17].

Система компьютерной алгебры SageMath относится к такому типу ПО и обладает большими возможностями для создания визуализаций и разработки заданий различных типов по широкому спектру дисциплин в области математики и информатики. Кроме этого, имеющаяся облачная система позволяет успешно реализовать и контролировать проектные задания в малых группах.

Таким образом, использование систем научных вычислений позволяет интегрировать современные и традиционные методы в обучении, что, в свою очередь, дает возможность сделать представление учебного материала более понятным, доступным и интересным.

#### Библиографический список

1. Арнхейм, Р. Визуальное мышление. Хрестоматия по общей психологии. Психология мышления [Текст] / Р. Арнхейм; под ред. Ю. Б. Гиппенрейтер, В. В. Петухова. – М.: МГУ, 1981. – 107 с.
2. Арнхейм, Р. Искусство и визуальное восприятие [Текст] / Р. Арнхейм. – М.: Прогресс, 1974. – 392 с.
3. Картежников, Д. А. Визуальная учебная среда как условие развития математической компетентности студентов экономических специальностей [Текст]: автореф. дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Картежников Дмитрий Александрович. – Омск, 2007. – 196 с.
4. Славская, К. А. Процесс мышления и актуализация знаний [Текст] / К. А. Славская // Вопросы психологии. – М., 1959. – 452 с.
5. Выготский, Л. С. Собрание сочинений [Текст] / Л. С. Выготский. – М.: Педагогика, 1983. – 641 с.
6. Выготский, Л. С. Хрестоматия: Развитие абстракции. Психология мышления [Текст] / Л. С. Выготский, А. Р. Лурия; под ред. Ю. Б. Гиппенрейтер, В. А. Спиридонова, М. В. Фаликман. – М.: АСТ: Астрель, 2008. – 358 с.
7. Громько, Ю. В. Метапредмет «Знак» [Текст] / Ю. В. Громько. – М.: Пушкинский институт, 2001. – 288 с.
8. Цымбал, С. Н. Теория и методика обучения: Формирование рефлексивного опыта студентов физико-математического факультета [Текст] / С. Н. Цымбал // Вестник ТГПУ. Сер. Естественные и точные науки. – 2007. – № 6 (69). – С. 70–75.
9. Белоголов, В. С. О языке, способах, формах и путях передачи знаний в информационной среде обучения [Электронный ресурс] / В. С. Белоголов // Электронный журнал: МГТУ, 2009. – Режим доступа: <http://itc.mstu.edu.ru/www/ntk2002.nsCall>.

10. Тихоненко, А. В. Моделирование как один из методических приемов обучения решению текстовых задач в начальной школе [Электронный ресурс] / А. В. Тихоненко // Электронный журнал. – Наука-Про. – 2010. – № 15. – Режим доступа: [http://www.naukapro.ru/ot2005/2\\_008.htm](http://www.naukapro.ru/ot2005/2_008.htm).
11. Формирование приемов математического мышления [Текст]: научный сборник / под ред. Н. Ф. Талызиной. – М., 1995. – С. 29–119.
12. Учебно-методическое пособие: Современные технологии обучения в ВУЗе [Текст] / под ред. М. А. Малышевой. – НИУ ВШЭ. – СПб., 2011. – С. 134.
13. Официальный сайт компании Mathematica [Электронный ресурс] / WolframResearch, Inc. – 2016. – Режим доступа: <https://www.wolfram.com/mathematica>.
14. Татарников, О. С. Программы для символьной математики [Электронный ресурс] / О. С. Татарников // Электрон. журн. – Компьютер-Пресс. – 2014. – № 7. – Режим доступа: <http://compress.ru/article.aspx?id=16152>.
15. William A. Stein Sage Mathematics Software (Version 4.3) / William A. Stein et al., [Sage], 2016.
16. SageMath: Manual [Электронный ресурс] // The Sage Development Team. – 2009. – Режим доступа: <http://www.sagemath.org>.
17. Облачная платформа системы SageMath: SageMathCloud – 2016. – Режим доступа: [cloud.sagemath.com](http://cloud.sagemath.com).
18. Смирнов, Е. И., Осташков, В. Н., Богун, В. В. Наглядное моделирование в обучении математике: Теория и практика [Текст]: учебное пособие / Е. И. Смирнов, В. Н. Осташков, В. В. Богун. – Ярославль, 2010. – 498 с.
6. Vygotskij, L. S. Hrestomatija: Razvitie abstrakcii. Psihologija myshlenija [Tekst] / L. S. Vygotskij, A. R. Lurija; pod. red. Ju. B. Gippenrejtter, V. A. Spiridonova, M. V. Falikman. – M.: AST: Astrel', 2008. – 358 s.
7. Gromyko, Ju. V. Metapredmet «Znak» [Tekst] / Ju. V. Gromyko. – M.: Pushkinskij institut, 2001. – 288 s.
8. Cymbal, S. N. Teorija i metodika obuchenija: Formirovanie reflektivnogo opyta studentov fiziko-matematicheskogo fakul'teta [Tekst] / S. N. Cymbal // Vestnik TGPU. Ser. Estestvennye i tochnye nauki. – 2007. – № 6 (69). – S. 70–75.
9. Belogolov, B. C. O jazyke, sposobah, formah i putjah peredachi znanij v informacionnoj srede obuchenija [Jelektronnyj resurs] / B. C. Belogolov // Jelektronnyj zhurnal: MGTU, 2009. – Rezhim dostupa: <http://itc.mstu.edu.ru/www/ntk2002.nsCall>.
10. Tihonenko, A. V. Modelirovanie kak odin iz metodicheskikh priemov obuchenija resheniju tekstovykh zadach v nachal'noj shkole [Jelektronnyj resurs] / A. V. Tihonenko // Jelektronnyj zhurnal. – NaukaPro. – 2010. – № 15. – Rezhim dostupa: [http://www.naukapro.ru/ot2005/2\\_008.htm](http://www.naukapro.ru/ot2005/2_008.htm).
11. Formirovanie priemov matematicheskogo myshlenija [Tekst]: nauchnyj sbornik / pod red. N. F. Talyzinoj. – M., 1995. – S. 29–119.
12. Uchebno-metodicheskoe posobie: Sovremennye tehnologii obuchenija v VUZe [Tekst] / pod. red. M. A. Malyshevoj. – NIU VShJe. – SPb., 2011. – S. 134.
13. Oficial'nyj sajt kompanii Mathematica [Jelektronnyj resurs] / WolframResearch, Inc. – 2016. – Rezhim dostupa: <https://www.wolfram.com/mathematica>.
14. Tatarnikov, O. S. Programmy dlja simvol'noj matematiki [Jelektronnyj resurs] / O. S. Tatarnikov // Jelektron. zhurn. – Komp'juterPress. – 2014. – № 7. – Rezhim dostupa: <http://compress.ru/article.aspx?id=16152>.
15. William A. Stein Sage Mathematics Software (Version 4.3) / William A. Stein et al., [Sage], 2016.
16. SageMath: Manual [Jelektronnyj resurs] // The Sage Development Team. – 2009. – Rezhim dostupa: <http://www.sagemath.org>.
17. Oblachnaja platforma sistemy SageMath: SageMathCloud – 2016. – Rezhim dostupa: [cloud.sagemath.com](http://cloud.sagemath.com).
18. Smirnov, E. I., Ostashkov, V. N., Bogun, V. V. Nagljadnoe modelirovanie v obuchenii matematike: Teorija i praktika [Tekst]: uchebnoe posobie / E. I. Smirnov, V. N. Ostashkov, V. V. Bogun. – Jaroslavl', 2010. – 498 s.

#### Bibliograficheskij spisok

1. Arnhejm, R. Vizual'noe myshlenie. Hrestomatija po obshhej psihologii. Psihologija myshlenija [Tekst] / R. Arnhejm; pod red. Ju. B. Gippenrejtter, V. V. Petuhova. – M.: MGU, 1981. – 107 s.
2. Arnhejm, R. Iskusstvo i vizual'noe vosprijatie [Tekst] / R. Arnhejm. – M.: Progress, 1974. – 392 s.
3. Kartezhnikov, D. A. Vizual'naja uchebnaja sreda kak uslovie razvitija matematicheskoi kompetentnosti studentov jekonomicheskikh special'nostej [Tekst]: avtoref. dis. ... kand. ped. nauk: 13.00.02 / Kartezhnikov Dmitrij Aleksandrovich. – Omsk, 2007. – 196 s.
4. Slavskaja, K. A. Process myshlenija i aktualizacija znanij [Tekst] / K. A. Slavskaja // Voprosy psihologii. – M., 1959. – 452 s.
5. Vygotskij, L. S. Sobranie sochinenij [Tekst] / L. S. Vygotskij. – M.: Pedagogika, 1983. – 641 s.