

Е. И. Смирнов

Синергия исследования «проблемной зоны» базового учебного элемента содержания математического образования

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 16–18–10304)

Эффективность математического образования как нелинейной, сложной и открытой системы, формирование и развитие функциональных возможностей человека всецело определяются в процессе актуализации и фундирования опыта решения сложных задач в освоении математики в контексте реализации личностных предпочтений в познавательной деятельности и творческой самостоятельности. Одним из путей актуализации способов решения сложных задач является адаптация современных достижений науки к школьной и вузовской практике. Возможность решения сложных задач возникает при выявлении «проблемных зон» математического образования и построении обобщенных конструктов сущности базовых учебных элементов, связанных с «проблемной зоной». При этом средствами математического и компьютерного моделирования удается выстроить этапы адаптации и технологические конструкты актуализации и проявления синергии в обучении математике на основе диалога культур. Дидактическим механизмом освоения сущности обобщенного конструкта оказывается реализация модели кластера фундирования сущности, оснащенной комплексами мотивационно-прикладных задач современного математического знания и использующего информационно-коммуникационные технологии разного уровня: дистанционные среды, системы компьютерной алгебры и динамической геометрии, малые средства информатизации, кроссплатформенные среды. Лонгитюдное исследование «проблемных зон» позволяет эффективно развивать интеллектуальные операции мышления, насыщенность межкультурных коммуникаций, творческую самостоятельность и самоорганизацию личности школьника.

Ключевые слова: математическое образование, синергия, кластеры фундирования, компьютерное моделирование, решение сложных задач.

E. I. Smirnov

Synergy of Researching «a Problem Zone» of a Basic Educational Element of Mathematical Education Content

Efficiency of mathematical education as non-linear, complex and open system, formation and development of the person's functional capabilities are fully defined in the course of updating and founding experience of the solution of difficult problems in mastering mathematics in the context of implementation of personal preferences in cognitive activity and creative independence. One of ways of updating methods of solving difficult problems is adaptation of modern achievements in science to school and higher school practice. The possibility to solve difficult problems is in case of detection of «problem zones» of mathematical education and creation of the generalized constructs of the entity of the basic educational elements connected with «the problem zone». At the same time means of mathematical and computer simulation make possible to arrange stages of adaptation and technological constructs of updating and manifestation of synergy in mathematics training on the basis of the dialogue of cultures. The didactic mechanism of implementing of the entity of the generalized construct is realization of the model of the cluster of entity founding equipped with complexes of motivation – application-oriented tasks of the modern mathematical knowledge and using information and communication technologies of the different level: distant environments, systems of computer algebra and dynamic geometry, small means of informatization cross-platform environments. The longitude research of «problem zones» allows developing effectively intellectual operations of thinking, saturation of cross-cultural communications, creative independence and self-organization of the identity of the school student.

Keywords: mathematical education, synergy, clusters of founding, computer simulation, solution of difficult problems.

Введение. Исследователи развития нелинейных динамических систем (физических, биологических, социальных) делают вывод о том, что сложность является интегрирующей характеристикой способности системы к самоорганизации при достижении определенных критических уровней ее развития (Ст. Бир, Н. Винер, Г. Г. Малинецкий, Дж. фон Нейман, В. В. Орлов, И. С. Утробин и др. [6, 8, 17]). Эффективность математического образования как нелинейной,

сложной и открытой системы, формирование и развитие функциональных возможностей человека всецело определяются в процессе актуализации и фундирования опыта *решения сложных задач* в освоении математики в контексте реализации личностных предпочтений в познавательной деятельности и творческой самостоятельности. Так, П. А. Френч и Д. Функе [19] определяют *решение сложных задач* как многошаговую поведенческую и когнитивную активность,

направленную на преодоление большого числа заранее неизвестных препятствий между нечеткими, динамически изменяющимися целями и условиями. Содержание математического образования, как в школе, так и в вузе, изобилует сложными, многоступенчатыми абстракциями базовых учебных элементов и процедур, что, естественно, создает основу для формального их освоения без должной организации и обеспечения адекватных когнитивных процессов. Одним из путей решения данной проблемы в обучении математике зарубежные системы образования (в последние десятилетия этим путем идет и наше российское математическое образование) считают упрощение содержания математической деятельности, снижение уровня образовательных стандартов. Так, в России немаловажным показателем качества математического образования является уменьшение порогового значения балла по математике для получения аттестата о среднем образовании, который падал до 20 баллов в 2014 г., 27 баллов в 2015–2017 гг. В настоящей статье предлагается технология создания и исследования «проблемных зон» освоения математики, базирующаяся на проявлении синергии в процессе выявления и адаптации к наличному состоянию опыта обучающихся, сложного знания обобщенной сущности учебных элементов и процедур «проблемной зоны».

Актуализация и исследование подобных «проблемных зон» в обучении математике создает прецедент для уровневого освоения сложных учебных элементов, определяет устойчивые точки опоры в образовательном пространстве формализованных конструктов сложного знания, позволяет визуализировать интегративные связи математических знаний из разных областей, реализует диалог математической, информационной, естественно-научной и гуманитарной культур. Такая когнитивная деятельность обучающихся оказывается непосредственно связанной с исследованием и адаптацией современных достижений в науке с использованием информационно-коммуникационных технологий и интеграцией знаний из разных областей к наличному состоянию их математического опыта. Это создает условия для повышения учебной и профессиональной мотивации обучающихся, качества освоения математических знаний и действий, эффективного развития интеллектуальных операций мышления с возможностью саморазвития и проявления творческой самостоятельности личности.

Методология, технологии и результаты

Предельные процессы пронизывают реальную жизнь, приложения наук, обоснованность экономических и социальных закономерностей, функционирования техники и производств и в итоге определяют прогресс человечества. Базовые школьные учебные элементы – производная, интеграл, ряд, стохастические процессы, физические и биологические закономерности – основываются на рассмотрении пределов функций разных типов. Однако важнейшее понятие, определяющее понимание природных процессов и мировоззрение обучающихся (ввиду его сложности и абстрактности), рассматривается в средней школе на описательном феноменологическом уровне. Возможности профилизации старшей школы позволяют углубленно рассмотреть и исследовать предел функции (например, в математических, инженерных, экономических классах) как базовый учебный элемент «проблемной зоны» математического образования.

Технология выявления и исследования «проблемных зон» обучения математике

Технология выявления и исследования «проблемных зон» обучения математике позволяет интегрировать знания из различных областей наук, создает прецедент исследовательской деятельности школьников, актуализирует синергетические эффекты в процессе освоения сложного знания [15]. «Проблемная зона» математического образования – это комплекс содержательных, процессуальных и личностно-адаптационных компонентов обучения математике, основанных на вскрытии противоречий и проблем когнитивной деятельности в конкретно определенной области и нацеленных на поиск и исследование сущностей ее сложных учебных элементов.

Критерии выявления «проблемных зон» в обучении математике основаны на особенностях решения сложных задач [11], имеют следующие характеристики:

– в динамике освоения математических знаний и процедур есть возможность *вскрытия противоречий и явной неадекватности восприятия*, невозможность переноса связей и процедур учебных элементов в частном их проявлении на более общую конструкцию, актуальность построения контрпримеров, присутствие доли неопределенности и непредсказуемости, ограниченность объема учебных элементов, требующих разнообразных решений, построенных на основе эмпирических, а не только теоретических обобщений, возможность развития дивергентного мышления обучающихся и понимания функцио-

нирования нечетких множеств и fuzzy-logics (Л. Заде [4]);

– процесс выявления сущности учебных элементов в сложных «проблемных зонах» основан на *множественности целеполагания и возможности математического моделирования обобщенного конструкта* и разумной конечности этапов адаптации обобщенной сущности к наличному знаниевому комплексу «проблемной зоны». Эффективные правила (*фундирующие модулы* [14]) поэтапного развертывания сущности могут быть выделены, но они будут с неизбежностью достаточно вариативны на основе *наглядного моделирования* [13] и принципиально зависят от контекста;

– необходимы *разнообразные поисковые пробы с использованием информационных технологий* (экспериментальные срезы, варьирование условий и параметров функционирования «проблемной зоны», сравнительный анализ конкретных проявлений, компьютерное моделирование, аналогии, анализ через синтез (С. Л. Рубинштейн) и т. п.) – реальные взаимодействия и *диалог математической, информационной, естественно-научной и гуманитарной культур*, а не только теоретическая деятельность с ее абстрактными моделями. Результат этого поиска не может быть известен заранее. Алгоритмы деятельности (строгие однозначные предписания по ее выполнению) рассматриваются как самый частный вид исследовательских стратегий. Более общее значение имеют эвристики разной степени неопределенности;

– результаты исследования «проблемной зоны» и процессы взаимодействия с ней *не могут быть предсказаны полностью*, исчерпывающим образом; для этого взаимодействия характерна множественность результатов – наряду с прямыми, прогнозируемыми результатами образуются разнообразные побочные, непредсказуемые продукты.

Задачи исследования «проблемной зоны» [16]:

– освоить средствами математического и компьютерного моделирования содержательные конструкты приемов и этапов адаптации обобщенного научного знания к наличному состоянию школьных математических знаний и способов учебной деятельности обучающихся;

– выявить и обосновать новые математические результаты в ходе освоения и исследования этапов проявления сущности обобщенного конструкта (построить спираль фундирования сущности); построить графы согласования учебных

элементов школьной математики с элементами обобщенных конструкций; обеспечить наглядность моделирования и высокий уровень учебной мотивации школьников в контексте актуализации приложений и конкретизации сущности обобщенного конструкта;

– отразить и актуализировать тезаурус синергии математического образования в ходе исследовательской деятельности обучающихся: флуктуации, точки бифуркации, аттракторы, бассейны притяжения и т. п.;

– развивать дивергентное мышление и творческую самостоятельность обучающихся на фоне освоения интегративных конструктов математических знаний и процедур, учета вероятных и невероятных обстоятельств, конструирования содержания, этапов, базовых и вариативных характеристик объекта проектирования;

– развивать умения адаптироваться и развиваться в социальных коммуникациях и когнитивной деятельности на основе диалога математической, информационной, естественно-научной и гуманитарной культур.

Технология исследования «проблемной зоны» в обучении математике с синергетическими эффектами основана на поэтапном раскрытии сложной сущности обобщенного конструкта «проблемной зоны» средствами математического и компьютерного моделирования в условиях диалога и единства математической, информационной, естественно-научной и гуманитарной культур [10].

Характеристика параметров технологии исследования «проблемной зоны»: предел функции

Проблема: сложность визуализации и абстрактность процедур, трудности в понимании логической записи ε - δ -языка Коши.

Сущность обобщенного конструкта сложного знания: пусть X, Y – топологические пространства, $f: X \rightarrow Y$, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0 \Leftrightarrow \forall U(y_0) \exists V^0(x_0) \forall x (x \in V^0(x_0) \Rightarrow f(x) \in U(y_0))$$

Кластер фундирования обобщенного конструкта (предел функции) с актуализацией атрибутов синергии: представляет собой дидактическую модель фундирования сущности обобщенного конструкта из 4 фаз: *первоначального уровня* освоения сущности – предел функции на интуитивно-наглядном уровне; *функционального этапа* осознания и коррекции функций, параметров и условий предельного процесса; *операционного этапа* осознания и обобщенности времен-

ной и функциональной последовательности действий освоения сущности предела функции; *оценочного этапа* эмпирической верификации результатов, количественного и качественного анализа действий средствами математического моделирования и компьютерного дизайна; *интегративного этапа*, направленного на умение переводить ситуацию освоения сущности на процессы моделирования, обобщения и переноса. Каждый этап интегрирован с двумя спиралями фундирования средств оснащения процессов развертывания сущности обобщенного конструкта: мотивационно-прикладным сопровождением процессов освоения сущности и математическим и компьютерным моделированием проявления синергетических эффектов и атрибутов.

Иновации: потенциал синергии реализован визуализацией динамики функциональных зависимостей параметров предельного процесса средствами математического и компьютерного моделирования (использован ClassPad400 и MathCad для исследования предела рациональных и трансцендентных функций в одномерном, двумерном и трехмерном случаях) – построение поляр, аттракторов, бассейнов притяжения, флуктуации начальных параметров; нахождение $\min N(\varepsilon)$ и реализация сценария деловой игры в исследовательской деятельности малых групп. Разработан кластер фундирования сущности понятия предела функции с преемственностью содержания, форм, средств, методов и технологий в контексте интеграции компьютерного и математического моделирования процессов проявления синергии, актуализации и единства математических знаний из разных областей, мотивационно-прикладного сопровождения процессов проявления сущности.

Технологические конструкты когнитивной деятельности

Компоненты, актуализация и организация процессов адаптации «проблемной зоны» школьной математики (*предел функции*) к содержанию обобщенного конструкта научного знания (вариативность дефиниций и условий существования, верификация аналогий и ассоциаций обобщенного конструкта, компьютерное и математическое моделирование конкретных проявлений сущности обобщенного конструкта, противоречия и доступность математического аппарата и методов, актуализация атрибутов синергии и интеграции знаний, поиск устойчивых кластеров эмпирических обобщений (уроки-лекции, видеоклипы, лабораторно-расчетные занятия, ресурсные занятия, компьютерный дизайн и вы-

числительные процедуры, презентации, деловые игры, научные конференции и семинары):

– Мотивационное поле: наглядное моделирование (уроки-лекции, видеоклипы, проектная деятельность, презентации, деловые игры) мотивационно-прикладных ситуаций различного толкования понятия предела функции и предельных процессов (динамика ограниченного роста популяции, логистическое уравнение, множество Мандельброта, площадь криволинейной трапеции):

- частичные пределы последовательности (объем, структура, верхний и нижний пределы), теорема о покрытии [12], лемма Больцано-Вейерштрасса, визуализация пределов в трехмерном пространстве;
- динамика ограниченного роста популяции, логистическое уравнение Т. Мальтуса, сценарий П. Ферхюльста, константа М. Фейгенбаума [18] средствами компьютерного и математического моделирования;
- снежинка Коха (построение, вычисление длины и площади, вариации и природные эффекты) [5];
- множества Мандельброта и Жюлиа (компьютерные алгоритмы построения, орбиты и аттракторы, фрактальные, гладкие и заполняющие множества Жюлиа, природные аналоги) [7].

Данная фаза соответствует первому этапу проявления синергии в обучении математике [15] и адекватно реализуется в 10–12 мероприятиях урочной или внеурочной деятельности.

– **Задачи для актуализации «проблемной зоны» для малых групп школьников** (определение состава малых групп, распределение ролей, актуализация практико-ориентированной исследовательской деятельности):

1.1. Компьютерное и математическое моделирование нахождения параметров предела рациональных последовательностей с нахождением $\min N(\varepsilon)$ (построение, вычисление, свойства, вариации, лабораторно-расчетные занятия, использование ClassPad400 [1], выявление закономерностей и презентации).

1.2. Существование и нахождение предела трансцендентной функции с нахождением $\min \delta(\varepsilon)$ (компьютерное и математическое моделирование, вариации, прикладные задачи, лабораторно-расчетные занятия, использование ClassPad400, выявление закономерностей и презентации).

1.3. Нахождение «площади» поверхности цилиндра Шварца в регулярном случае ($m < n^2$,

$m = n^2$, $m > n^2$) для логистического роста числа слоев m ($m = f^n(a_0) \cdot n^2$ и $m, n \rightarrow \infty$, где $f(a_0) = xa_0(1-a_0)$ – логистическое отображение, адекватное сценарию П. Ферхюльста) (компьютерное и математическое моделирование, построение, вычисление, вариации, прикладные задачи, лабораторно-расчетные занятия, использование ClassPad400, кроссплатформенной среды Qt Creator, выявление закономерностей и презентации).

1.4. Компьютерное и математическое моделирование нахождения площадей поверхностей сферы, конуса, цилиндра, тора по методу Г. Минковского [3] (построение, вычисление, вариации, прикладные задачи, лабораторно-расчетные занятия, использование ClassPad400, систем компьютерной алгебры Mathematica, Maple, MathCad, MathLab, выявление закономерностей и презентации).

1.5. Компьютерное и математическое моделирование «складывания» прямой, плоскости и пространства с синергетическим эффектом появления фракталов: множество или пыль Кантора, композиция симметрий от комплекса прямых (образующая – логарифмическая спираль), фрактальные портреты комплексов прямых типа «елочка» [9].

1.6. Компьютерное и математическое моделирование нахождения предела пространственной последовательности M_n ($x(n)$, $y(n)$, $z(n)$) с построением поляр, бассейнов притяжения, аттракторов (построение, вычисление, вариации, прикладные задачи, лабораторно-расчетные занятия, использование ClassPad400, систем компьютерной алгебры Mathematica, Maple, MathCad, MathLab, систем динамической геометрии GeoGebra, Aftograph, выявление закономерностей и презентации).

Данная фаза соответствует этапу 1–2 проявления синергии и адекватно реализуется в 3–4 мероприятиях урочной или внеурочной деятельности.

Множественное целеполагание процессов исследования обобщенного конструкта научного знания (предел функции) – выявление содержания, этапов фундирования сущности обобщенного конструкта (предела функции), формализации, историогенеза, наличие образцов проявления сущности на эталонном и ситуативном уровнях; наглядное моделирование интеграции (графы согласования) математических, информационных, гуманитарных и естественно-научных знаний на этапах проявления сущности; создание ситуаций

интеллектуального напряжения и самоорганизации обучающихся, актуализация неопределенности и точек бифуркации математических процедур, механизмов самоопределения и самоактуализации в проблемных ситуациях в ходе освоения компонентов сущности обобщенного конструкта; множественный опыт решения микропроблем математического образования в режиме «warming up» и развития надситуационной активности (эмоциональное переживание, рефлексия, наглядное моделирование, инсайт, верификация решения, перенос); создание творческой среды в процессе освоения сущности обобщенного конструкта (стимулирование ситуации успеха; работа в малых группах и диалог культур; толерантность к неопределенности; готовность к дискуссиям и множественности решений проблемы; выявление и популяризация образцов творческого поведения и его результатов); сбор и разнообразие форм и методов представления информации, вероятностно-статистический, контентный, графический, кластерный, математический анализ данных, выявление закономерностей, аналогий, ассоциаций, динамики исследуемых процессов, явлений и фактов; освоение статистических пакетов и офисных редакторов, малых средств информатизации, систем компьютерной алгебры и Web-поддержки; анализ возможностей ИКТ-средств для проверки адекватности решения сложных задач математическими методами; развитие дивергентного мышления на фоне освоения интегративных конструктов, учета вероятных и невероятных обстоятельств, конструирования содержания, этапов, базовых и вариативных характеристик объекта проектирования; теоретическое и эмпирическое обобщение знаний и методов, интеграция знаний и методов на фоне получения нового качества взаимодействия, актуализация и становление в «зонах ближайшего развития» личностного опыта; умения адаптироваться и развиваться в социальных коммуникациях на основе диалога математической, информационной, естественно-научной и гуманитарной культур; оценка истинности гипотез, прогноза и стратегий, их модификация, оценка методов и процедур нахождения результатов, варьирование условий и данных задачи; учет вероятных и невероятных обстоятельств, оценка их эффективности, умение ставить и решать задачи в условиях неопределенности; самоанализ эффективности стратегий и методов решения, выбор оптимального пути решения проблемы; самостоятельная постановка задачи и выбор методов ее решения, надситуативный уровень мышления, стремление к преодолению стереотипов, гармонизи-

зация рефлексивных выходов, новый творческий продукт, оценка и прогноз дальнейших действий, мотивация самоактуализации.

Данная фаза соответствует 1–4 этапам проявления синергии и адекватно реализуется в мероприятиях урочной или внеурочной деятельности.

Актуализация атрибутов синергии (бифуркации, аттракторы, флуктуации, бассейны притяжения) в процессе исследования обобщенного конструкта (предел функции). *Формы:* дистанционное обучение проектных групп, лабораторно-расчетные занятия, многоэтапные математико-информационные занятия, научные конференции и семинары, сетевое взаимодействие и дискуссионные форумы. *Средства:* математическое и компьютерное моделирование, QT Creator – кроссплатформенная свободная IDE для разработки на C++, педагогические программные продукты, малые средства информатизации ClassPad400, WebQuest как средство интеграции Web-технологий с учебными предметами, Wiki-sites, Messenger, Skype. *Технологии:* графы согласования математических знаний и процедур, работа в малых группах, WebQuest как технология самоорганизации в коллективном творчестве, метод проектов, Wiki-технология, наглядное моделирование, фундирование опыта личности.

Данная фаза соответствует 1–4 этапам проявления синергии и адекватно реализуется в мероприятиях урочной или внеурочной деятельности.

Эффективный диалог математической, информационной, естественно-научной и гуманитарной культур на основе компьютерного и математического моделирования компонентов и этапов адаптации современного научного знания к процессам исследования обобщенного конструкта (предел функции). Диалог гуманитарной, информационной, математической и естественно-научной культур в образовательном пространстве будем рассматривать как взаимодействие, взаимовлияние, взаимообогащение областей знания, которое дает представление о разных способах познания и осознания действительности (рациональном естественно-научном и иррациональном гуманитарном) на основе открытости информационных сред, принципиально различных, несоизмеримых, но взаимопроницающих типах нелинейного мышления (логическом и интуитивном), способах восприятия информации (дигитальном и визуальном) формирует у обучающихся целостное представ-

ление о природе, обществе, человеке, является фактором развития постнеклассических ценностей, междисциплинарного системного знания [2]. Процесс проявления синергии знаний и процедур реализуется поэтапно согласно выделенным уровням актуализации диалога культур в направлении развертывания фундирующих дидактических процедур оснащения и освоения сущности обобщенного конструкта «проблемной зоны» и получения вероятностно гарантированных результатов обучения математике:

– *структурно-логический уровень* интеграции знаний и процедур различных дисциплин в контексте диалога и единства многообразия культур в освоении обучающихся (в малых группах, деловых играх, сетевых взаимодействиях, презентациях, научных конференциях и семинарах) образцов проявления синергии на эталонном и ситуативном уровнях исследования конкретных естественно-научных и гуманитарных проблем математическими и компьютерными методами (распределение ролей в малых группах, построение и актуализация графов согласования межпредметных знаний и процедур, множественность формализации и конкретизации сущности обобщенного конструкта, освоение на практико-ориентированном уровне приемов логического и интуитивного мышления, варьирование модальностей восприятия информации – знаково-символической, образно-геометрической, вербальной, конкретно-деятельностной и тактильно-кинестетической);

– *уровень актуализации единства и особенностей диалога культур* в многообразии межкультурной коммуникации в продуктивном освоении этапов развертывания сущности обобщенного конструкта (предел функции). Это проявляется в углубленном исследовании конкретной проблемы современного научного знания на основе многообразия проявлений математических структур (геометрических, алгебраических, топологических, стохастических), использования многообразия средств компьютерного моделирования (систем динамической геометрии – GeoGebra, Математический конструктор, Aftograph, компьютерной алгебры – Mathcad, MathLab, Maple, Mathematica, малых средств информатизации – ClassPad400, кроссплатформенной среды Qt Creator, педагогические программные продукты, Web 2.0., Wiki и др.), естественно-научных и гуманитарных приложений на основе математического и компьютерного моделирования. При этом основой диалога культур являются проявления сущности обобщенного конструкта на дан-

ном этапе изучения. Дополнительно могут быть реализованы такие формы, как проектная деятельность, WebQuest, тренинги;

– *уровень самоорганизации и саморазвития межкультурных взаимодействий* в контексте актуализации сущности обобщенного конструкта (появление побочных продуктов, преобразование форм и методов, варьирование параметров и условий диалога культур, появление устойчивого интереса и ценностного отношения к другим культурам, разработка интегративных курсов и программ с целями и результатами достижения синергетических эффектов).

Данная фаза соответствует 1–4 этапам проявления синергии и адекватно реализуется в мероприятиях урочной или внеурочной деятельности.

Следующая таблица представляет распределение мероприятий по исследованию «проблемной зоны» базового учебного элемента «Предел функции» в профильных классах старшей школы (например, профиль углубленного изучения математики или инженерно-технологический профиль).

Таблица 1

Формы, методы, средства, технологии	10 класс		11 класс	
	Этап 1	Этап 2	Этап 3	Этап 4
Урок-лекция	•			•
Видеоклипы	•		•	•
Ресурсные занятия	•			•
Лабораторно-расчетные занятия	•		•	
Презентации	•	•	•	•
Деловые игры	•			•
Проектные методы		•	•	•
WebQuest				•
Web2.0, адаптивные интерактивные среды дистанционного обучения		•	•	
Программные продукты	•	•	•	•
Комплексы мотивационно-прикладных, исследовательских задач	•	•		•
Элективные и факультативные курсы	•			•
Qt Creator, GeoGebra, MathCad, ClassPad400	•	•	•	•

Аналогично могут быть исследованы «проблемные зоны» базовых учебных элементов: площадь поверхности, производная и дифференцируемость функции, неподвижные точки и сжимающие отображения. Как показывает рассмотренный пример, лонгитюдное исследование «проблемных

зон» предъявляет повышенные требования к их отбору и количеству, в то же время развивающий эффект от освоения школьниками сложного знания в контексте современных достижений в науке и диалога математической, информационной, естественно-научной и гуманитарной культур трудно переоценить.

Результаты. Таким образом, разработана технология исследования «проблемной зоны» математического образования школьников с проявлением синергетических эффектов и атрибутов. Выявлены сущность, критерии отбора и задачи исследования «проблемной зоны», а также реализованы и конкретизированы технологические конструкты для освоения базового учебного элемента «Предел функции». Построен кластер фундирования сущности обобщенного конструкта учебного элемента с актуализацией атрибутов и этапов проявления синергии в процессе обучения математике. В частности, исследованы на основе множественного целеполагания проявления бифуркационных переходов и флуктуации предельных процессов, визуализированы и исследованы аттракторы и бассейны притяжения итерационных процессов в различных координатных пространствах в направлении усложнения знаний и процедур. Интеграция математических, информационных, естественно-научных и гуманитарных знаний в контексте диалога и единства культур реализована как дидактический механизм актуализации и проявления синергии в обучении математике с использованием компьютерного и математического моделирования.

Заключение. Выявление и исследование «проблемных зон» в обучении математике школьников средствами компьютерного и математического моделирования позволяет осваивать обобщенные конструкты базовых учебных элементов в контексте диалога культур и интеграции знаний из различных областей наук. При этом открытость образовательной среды, сложность математических конструкций, множественность целеполагания и возможность получения побочных продуктов создают основу для эффективного развития интеллектуальных операций мышления, повышают учебную и профессиональную мотивацию, креативность и самоорганизацию личности в контексте межкультурных коммуникаций.

Библиографический список

1. Богун, В. В., Смирнов, Е. И. Лабораторный практикум по математическому анализу с графическим калькулятором [Текст]: учебное пособие /

В. В. Богун, Е. И. Смирнов. – Ярославль : Канцлер, 2010. – 185 с.

2. Дворяткина, С. Н. Развитие вероятностного стиля мышления студентов в обучении математике на основе диалога культур [Текст] : автореф. дис. ... д-ра пед. наук : 13.00.02 / С. Н. Дворяткина. – Елец., 2012. – 48 с.

3. Дубровский, В. Н. В поисках определения площади поверхности [Текст] / В. Н. Дубровский. – М. : Квант, 1978. – № 5. – С. 31–34.

4. Заде, Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений [Текст] / Л. Заде. – М. : Мир, 1976. – 166 с

5. Кроновер, Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории [Текст] / Р. М. Кроновер. – М. : Постмаркет, 2000. – 352 с

6. Малинецкий, Г. Г., Потапов, А. Б., Подлазов, А. В. Нелинейная динамика: Подходы, результаты, надежды [Текст] / Г. Г. Малинецкий, А. Б. Потапов, А. В. Подлазов. – М. : Эдиториал УРСС, 2006. – 280 с.

7. Мандельброт, Б. Б. Фрактальная геометрия природы [Текст] / пер. с англ. ; Б. Б. Мандельброт. – М. : Ин-т компьютерных исследований, 2002. – 656 с.

8. Орлов, В. В. Развитие материи как закономерный процесс [Текст] / В. В. Орлов // Развитие материи как закономерный процесс. – Пермь, 1978.

9. Осташков В. Н. Диалоги о фракталах [Текст] : монография / В. Н. Осташков. – Тюмень : Изд-во ТюмГНГУ, 2011. – 285 с.

10. Осташков, В. Н., Смирнов, Е. И., Белоногова, Е. А. Синергия образования в исследовании аттракторов и бассейнов притяжения нелинейных отображений [Текст] / В. Н. Осташков, Е. И. Смирнов, Е. А. Белоногова // Ярославский педагогический вестник. – Том II. – 2016. – № 6. – С. 146–155.

11. Подъяков, А. Н. Психология обучения в условиях новизны, сложности, неопределенности. Психологические исследования [Текст] / А. Н. Подъяков. – М. : Высшая школа экономики, 2015. – С. 6–10.

12. Смирнов, Е. И. Теорема о покрытии в математическом анализе [Текст] / Е. И. Смирнов // Ярославский педагогический вестник. – 1998. – № 3(15). – С. 104–109.

13. Смирнов, Е. И. Технология наглядно-модельного обучения математике [Текст] : монография / Е. И. Смирнов. – Ярославль : Изд-во ЯГПУ, 1997. – 323 с.

14. Смирнов, Е. И., Абагурова, В. С. Направления и пути развертывания фундирующих модусов развития личности будущего педагога [Текст] / Е. И. Смирнов, В. С. Абагурова // Ярославский педагогический вестник. – 2015. – Т. 2. – № 6. – С. 37–43.

15. Смирнов, Е. И., Богун, В. В., Уваров, А. Д. Синергия математического образования: Введение в анализ [Текст] : монография / Е. И. Смирнов, В. В. Богун, А. Д. Уваров. – Ярославль : Изд-во «Канцлер», 2016. – 216 с.

16. Смирнов, Е. И., Уваров, А. Д., Смирнов, Н. Е. Компьютерный дизайн нелинейного роста «площадей» нерегулярного цилиндра Шварца [Текст] / Е. И. Смирнов, А. Д. Уваров, Н. Е. Смирнов // Евразийское научное обозрение. – 2017. – № 8(30). – С. 35–55.

17. Утробин, И. С. Роль категории сложности в перестройке философии [Текст] / И. С. Утробин // Стратегия ускорения и философия науки. – Пермь, 1990.

18. Федер, Е. Фракталы [Текст] / пер. с англ. ; Е. Федер. – М. : Мир, 1991. – 254 с.

19. Функе, И., Френш, П. А. Решение сложных задач: исследования в Северной Америке и Европе [Текст] / И. Функе, П. А. Френш // Иностранная психология. – 1995. – Т. 3. – № 5. – С. 42–47.

Bibliograficheskij spisok

1. Bogun, V. V., Smirnov, E. I. Laboratornyj praktikum po matematicheskomu analizu s graficheskim kal'kuljatorom [Tekst] : uchebnoe posobie / V. V. Bogun, E. I. Smirnov. – Jaroslavl' : Kancler, 2010. – 185 s.

2. Dvorjatkina, S. N. Razvitie verojatnostnogo stilja myshlenija studentov v obuchenii matematike na osnove dialoga kul'tur [Tekst] : avtoref. dis. ... d-ra ped. nauk : 13.00.02 / S. N. Dvorjatkina. – Elec., 2012. – 48 s.

3. Dubrovskij, V. N. V poiskah opredelenija ploshhadi poverhnosti [Tekst] / V. N. Dubrovskij. – M. : Kvant, 1978. – № 5. – S. 31–34.

4. Zade, L. Ponjatije lingvisticheskoj peremennoj i ego primenenie k prinjatiju priblizhennyh reshenij [Tekst] / L. Zade. – M. : Mir, 1976. – 166 s

5. Kronover, R. M. Fraktaly i haos v dinamicheskix sistemah. Osnovy teorii [Tekst] / R. M. Kronover. – M. : Postmarket, 2000. – 352 s

6. Malineckij, G. G., Potapov, A. B., Podlazov, A. V. Nelinejnaja dinamika: Podhody, rezul'taty, nadezhdy [Tekst] / G. G. Malineckij, A. B. Potapov, A. V. Podlazov. – M. : Jeditorial URSS, 2006. – 280 s.

7. Mandel'brot, B. B. Fraktal'naja geometrija prirody [Tekst] / per. s angl. ; B. B. Mandel'brot. – M. : In-t komp'juternyh issledovanij, 2002. – 656 s.

8. Orlov, V. V. Razvitie materii kak zakonomernyj process [Tekst] / V. V. Orlov // Razvitie materii kak zakonomernyj process. – Perm', 1978.

9. Ostashkov V. N. Dialogi o fraktalah [Tekst] : monografija / V. N. Ostashkov. – Tjumen' : Izd-vo TjumGNGU, 2011. – 285 s.

10. Ostashkov, V. N., Smirnov, E. I., Belonogova, E. A. Sinergija obrazovanija v issledovanii attraktorov i bassejnov pritjazhenija nelinejnyh otobrazhenij [Tekst] / V. N. Ostashkov, E. I. Smirnov, E. A. Belonogova // Jaroslavskij pedagogicheskij vestnik. – Tom II. – 2016. – № 6. – S. 146–155.

11. Pod#jakov, A. N. Psihologija obuchenija v uslovijah novizny, slozhnosti, neopredelennosti. Psihologicheskie issledovanija [Tekst] / A. N. Pod#jakov. – M. : Vysshaja shkola jekonomiki, 2015. – S. 6–10.

12. Smirnov, E. I. Teorema o pokrytii v matematicheskom analize [Tekst] / E. I. Smirnov // *Jaroslavskij pedagogicheskij vestnik*. – 1998. – № 3(15). – S. 104–109.

13. Smirnov, E. I. Tehnologija nagljadno-model'nogo obuchenija matematike [Tekst]: monografija / E. I. Smirnov. – Jaroslavl': Izd-vo JaGPU, 1997. – 323 s.

14. Smirnov, E. I., Abaturova, V. S. Napravlenija i puti razvertyvaniya fundirujushhih modusov razvitija lichnosti budushhego pedagoga [Tekst] / E. I. Smirnov, V. S. Abaturova // *Jaroslavskij pedagogicheskij vestnik*. – 2015. – T. 2. – № 6. – S. 37–43.

15. Smirnov, E. I., Bogun, V. V., Uvarov, A. D. Sinergija matematicheskogo obrazovanija: Vvedenie v analiz [Tekst]: monografija / E. I. Smirnov, V. V. Bogun, A. D. Uvarov. – Jaroslavl': Izd-vo «Kancler», 2016. – 216 s.

16. Smirnov, E. I., Uvarov, A. D., Smirnov, N. E. Komp'juternyj dizajn nelinejnogo rosta «ploshhadej» nereguljarnogo cilindra Shvarca [Tekst] / E. I. Smirnov, A. D. Uvarov, N. E. Smirnov // *EvrAzijskoe nauchnoe obozrenie*. – 2017. – № 8(30). – S. 35–55.

17. Utrobin, I. S. Rol' kategorii slozhnosti v perestrojke filosofii [Tekst] / I. S. Utrobin // *Strategija uskoreniya i filosofija nauki*. – Perm', 1990.

18. Feder, E. Fraktaly [Tekst] / per. s angl. ; E. Feder. – M.: Mir, 1991. – 254 s.

19. Funke, I., Frensh, P. A. Reshenie slozhnyh zadach: issledovanija v Severnoj Amerike i Evrope [Tekst] / I. Funke, P. A. Frensh // *Inostrannaja psihologija*. – 1995. – T. 3. – № 5. – S. 42–47.

Reference List

1. Bogun V. V., Smirnov E. I. A laboratory workshop on the mathematical analysis with the graphic calculator: manual. – Jaroslavl: Kantsler, 2010. – 185 p.

2. Dvoryatkina S. N. Development of probable style of students' thinking in training in mathematics on the basis of a dialogue of cultures: Author's thesis. ... Candidate of Pedagogical Sciences: 13.00.02. – Yelets, 2012. – 48 p.

3. Dubrovsky V. N. In search of determination of the surface area. – M.: Kvant, 1978. – № 5. – P. 31–34.

4. Zade L. Concept of a linguistic variable and its application to acceptance of approximate solutions. – M.: Patterns, 1976. – 166 p.

5. Kronover R. M. Fractals and chaos in dynamic systems. Bases of the theory. – M.: Post-market, 2000. – 352 p.

6. Malinetsky G. G., Potapov A. B., Podlazov A. V. Non-linear dynamics: Approaches, results, hopes. – M.: Editorial of URSS, 2006. – 280 p.

7. Mandelbrot B. B. Fractal geometry of the nature. – M.: Institute of computer researches, 2002. – 656 p.

8. Orlov V. V. Matter development as a natural process. – Perm, 1978.

9. Ostashkov V. N. Dialogues about fractals: monograph. – Tyumen: TyumSNGU publishing house, 2011. – 285 p.

10. Ostashkov V. N., Smirnov E. I., Belonogova E. A. Sinergy of education in a research of attractors and pools of attraction of nonlinear displays // *Jaroslavl pedagogical bulletin*. – Volume II. – 2016. – № 6. – P. 146–155.

11. Podjyakov A. N. Psychology of training in the conditions of novelty, complexity, uncertainty. Psychological researches. – M.: Higher School of Economics, 2015. – P. 6–10.

12. Smirnov E. I. The theorem of covering in the mathematical analysis // *Jaroslavl pedagogical bulletin*. – 1998. – № 3(15). – P. 104–109.

13. Smirnov E. I. Technology of evident and model training in mathematics: monograph. – Jaroslavl: YSPU publishing house, 1997. – 323 p.

14. Smirnov E. I., Abaturova V. S. The directions and ways of expansion of the founding modes of development of the future teacher's identity // *Jaroslavl pedagogical bulletin*. – 2015. – T. 2. – № 6. – P. 37–43.

15. Smirnov E. I., Bogun V. V., Uvarov A. D. Sinergy of mathematical education: Introduction to the analysis: monograph. – Jaroslavl: Kantsler publishing house, 2016. – 216 p.

16. Smirnov E. I., Uvarov A. D., Smirnov N. E. Computer design of nonlinear growth of «areas» of the irregular cylinder Schwartz // *Euroasian scientific review*. – 2017. – № 8(30). – P. 35–55.

17. Utrobin I. S. Role of complexity category in reorganization of philosophy // *the Strategy of acceleration and philosophy of science*. – Perm, 1990.

18. Feder E. Fractals. – M.: Mir, 1991. – 254 p.

19. Funke I., Frensh P. A. Solution of difficult tasks: researches in North America and Europe // *Foreign psychology*. – 1995. – T. 3. – № 5. – P. 42–47.