УДК 37

Г. Г. Хамов, Л. Н. Тимофеева

Развитие творческой активности студентов при изучении теоретико-числового материала

В статье представлены примеры задач арифметического содержания, которые могут быть включены в комплекс исследовательских практико-ориентированных задач по дисциплине «Теория чисел» для студентов математических факультетов. Комплексы исследовательских практико-ориентированных задач – одно из основных средств формирования исследовательских умений будущего учителя математики. С помощью такого комплекса осуществляется организация активной творческой деятельности студентов. Теоретико-числовой материал обладает большим потенциалом для данной деятельности благодаря тесной связи со школьным курсом математики; наличию огромного количества нестандартных задач, которые включаются в задания олимпиад по математике различного уровня.

Кроме того, задания арифметического (теоретико-числового) характера включаются в материалы Единого государственного экзамена по математике.

Овладение студентами методами решения исследовательских практико-ориентированных задач позволяет также научить их методам конструирования новых задач, что не только усилит творческую активность, но и позволит использовать эти умения при написании выпускных квалификационных работ, соответствующих современным требованиям. В статье приведены примеры задач, в решении которых используются свойства теории делимости, простых чисел, деления с остатком, подробно рассмотрены методы исследования неопределенных уравнений частного и общего вида.

Ключевые слова: исследовательские задачи, творческая деятельность, натуральное число, целое число, делимость чисел, простые числа, взаимно простые числа, деление с остатком, неопределенное уравнение, четные числа, нечетные числа.

G. G. Khamov, L. N. Timofeeva

Development of Students' Creative Activity in Studying Number-Theoretic Material

The article presents examples of tasks arithmetic content that can be included in a complex research practice oriented tasks for the subject «Theory of number» for students of mathematical faculties. Complexes of research practice oriented tasks are one of the main means of forming research skills of future teachers of mathematics. Organization of students' active creative activity is realized with the help of this complex. Number-theoretic material has great potential for this activity because of its close connection with the school course in mathematics; the presence of a huge number of non-standard tasks are included in job competitions in mathematics at various levels.

Moreover, the task of the arithmetic (number-theoretic) character is included in the materials of the Unified state examination in mathematics.

When students master methods of solving research practice oriented tasks it also allows you to teach them methods of designing new tasks that will not only enhance creativity, but will also allow you to use these skills in the writing of final qualifying works in accordance with modern requirements. The article gives examples of tasks in which properties are used of the theory of divisibility, prime numbers, division with the remainder discussed in detail methods of investigation of the private and public type equations.

Keywords: research tasks; creative activities; natural number; whole number; divisibility of numbers; prime numbers; relatively prime numbers; division with remainders; indefinite equation; even numbers; odd numbers.

В монографии Е. И. Смирнова [1] обосновано положение, в котором главным средством проявления инновационной деятельности педагога и механизмом формирования исследовательского поведения обучаемого в процессе освоения учебного предмета является комплекс исследовательских практико-ориентированных задач, при этом выявлены обоснованные критерии отбора исследовательских практико-ориентированных задач, описаны этапы и уровни становления и развития творческой активности педагога при использовании комплекса.

Большое значение в профессиональной подготовке будущего учителя имеет арифметическая составляющая, формирование которой осуществляется, в основном, при изучении теоретико-числовых тем, что особенно актуально для учителей старших классов, которым придется столкнуться с проблемой подготовки учеников к решению задач творческого характера, связанных с этой темой. Поэтому данное направление должно быть отражено в комплексе исследовательских практико-ориентированных задач.

Некоторые виды исследовательских практико-ориентированных задач арифметического содержания рассмотрены в работах [2, 6], при этом описаны методы их решения, методика конструирования новых задач с другими числовыми данными и содержательной частью. Овладение студентами методикой составления новых задач будет способствовать не только формированию и развитию их творческой активности, исследовательских умений в области математики, повышению мотивации обучения, но и подготовке выпускной квалификационной работы, соответствующей современным требованиям относительно наличия в ней необходимой части оригинального текста.

Представленный далее учебный материал соответствует критериям отбора исследовательских практико-ориентированных задач [1, с. 358] и может быть использован при составлении комплекса такого вида задач.

Задача 1. Может ли число вида $25p+1$, p – простое, быть полным квадратом?

Число $25p+1$ при делении на 5 дает остаток 1, следовательно, квадрат целого числа, равный данному, также должен давать при делении на 5 остаток 1, что возможно, если само число при делении на 5 дает остаток 1 или 4. Таким образом, $25p+1=(5x+1)^2$ (1) или $25p+1=(5x+4)^2$. (2)

Из уравнения (1) получаем: $5p=x(5x+2)$, так как числа 5 и $5x+2$ взаимно просты, то $x=5$ и $p=5x+2=27$ – число не простое.

Уравнение (2) преобразуется к виду $5p=(x+1)(5x+3)$, решением которого является $x=4$, $p=23$. $25p+1=24^2$.

В целях развития творческой активности студентам можно предложить для исследования задачу с квадратом другого числа (вместо 5) и более общего вида.

Задача 2. При каком натуральном числе a и простом числе p число вида a^2p+1 является квадратом натурального числа?

Для решения задачи 2 необходимо исследовать уравнение $a^2p+1=y^2$. Так как число a^2p+1 при делении на a дает остаток 1, то число y^2 при делении на a должно давать тот же остаток, поэтому $y=ax+r$, $1\le r\le a-1$, $r^2\equiv 1(\bmod a)$.

Получаем уравнение: $a^2p+1=(ax+r)^2$ (3)

Квадрат целого числа $ax+r$ при делении на число a обязательно будет давать 1 при $r=1$, $r=a-1$, в некоторых случаях и при других значениях для числа r.

Для решения поставленной задачи надо исследовать уравнение (3) для всех возможных значений числа r.

При выборе нечетного числа a получим при $r=1$: $a^2p+1=(ax+r)^2 \Leftrightarrow ap=x(ax+2)$, так как числа a, $ax+2$ взаимно просты, $ax+2>a$ и p – простое число, то $x=a$ и $p=a^2+2$. (4)

Например, при $a=3$: $p=11$, $9\cdot 11+1=10^2$.

$$a^2p+1=(ax+a-1)^2 \Leftrightarrow$$

При $r=a-1$: $ap=ax^2+2(a-1)x+a-2$

$$\Leftrightarrow ap=(x+1)(ax+a-2),$$

так как числа a и $a(x+1)-2$ взаимно просты и p – простое, то $x+1=a$ и $p=a^2-2$. (5)

Например, при $a=3$: $p=7$, $x=2$, $9\cdot 7+1=8^2$.

Таким образом, при $a=3$ задача имеет два решения: $p=7;11$.

Для четного числа a также определяются числа r в промежутке $1\le r\le a-1$, квадраты которых при делении на a дают остаток 1 и исследуются уравнения (3) для этих чисел.

Например, при $r=1$:

$a^2p+1=(ax+1)^2 \Leftrightarrow kp=x(kx+1), a=2k$. (6)

Так как числа k и $kx+1$ взаимно просты и p – простое число, то из равенства (6) следует $x=k$ и $p=k^2+1$. (7)

Например, при $a=8$: $k=4$, $p=17$.

При $r=a-1$ из уравнения (3) получаем:

$ap=(x+1)(ax+a-2)$

$\Leftrightarrow kp=(x+1)[k(x+1)-1], 2k=a.$

Так как числа k и $k(x+1)-1$ взаимно просты и p – простое число, то $x+1=k$ и $p=k^2-1$ (8).

Если, например, $a=8$, то $k=4$ и $k^2-1=15$ – число не простое, то при $r=7$, $a=8$ уравнение (3) решения не имеет.

Заметим, что при $a=8$ уравнение (3) надо исследовать еще для случаев $r=3;5$ (решений нет).

Для конструирования разрешимой задачи 2 и соответствующего уравнения (3) могут быть использованы формулы (4), (5), (7), (8), с помощью которых подбираются числа a, p. Например, равенству (7) удовлетворяют 10 простых чисел, расположенных в первой тысяче натуральных чисел.

Задача 3. Найдите n-значное натуральное число, которое уменьшится в m раз при зачеркивании первой цифры.

Искомое число $10^{n-1}x+y$, где x – его первая цифра $1\le x\le 9$, y – $(n-1)$-значное число, которое получается после зачеркивания первой цифры. Исходя из условия задачи, составляем уравнение: $10^{n-1}x+y=my \Leftrightarrow 10^{n-1}x=(m-1)y$. (9)

Из уравнения (9) следует, что число $m-1$ является делителем числа $10^{n-1}x$, что является основой для подбора чисел n, m, x при составлении задач с конкретными числовыми данными.

При этом, так как число y – $(n-1)$-значное, то есть $y\ge 10^{n-2}$, $x\le 9$, то из формулы (9) следует, что $m\le 91$.

Примеры:

Найдите четырехзначное натуральное число, которое уменьшится в 91 раз при зачеркивании первой цифры.

Уравнение (9) имеет вид $10^3x=90y$. Число $1000x$ должно делиться на 90, то есть $x=9$, искомое число 9100.

При $m=31$ получаем три решения: 3 100, 6 200, 9 300.

Задача 4. При каких натуральных значениях числа a найдутся четырехзначные числа, которые, будучи приписанными к числу a^2, дадут число, являющееся квадратом натурального числа?

Для решения поставленной задачи надо установить, при каких натуральных значениях для a уравнение

$$x^2-a^2 10^4=y \Leftrightarrow (x-100a)(x+100a)=y. \quad (10)$$

имеет решения, при этом число y, по условию задачи, четырехзначно. Так как $x>100a$, то наименьшее значение $x=100a+1$, тогда $y=200a+1<10^5$ и $a\le 49$.

Полученный результат может быть использован для составления задач с конкретными числовыми данными.

Примеры:

При $a=17$ имеем $x^2-289\cdot 10^4=y \Leftrightarrow (x-1700)(x+1700)=y$, y – четырехзначное число. Два решения: $x_1=1701$, $y_1=3401$, $1701^2=2893401$; $x_2=1702$, $y_2=6804$, $1702^2=2896804$.

При $a=49$ задача имеет одно решение: $x=4901$, $y=9801$, $4901^2=24019801$.

Аналогичные исследования можно провести для двузначных, шестизначных и т. д. чисел.

Задача 5. Может ли сумма натуральных степеней числа 2017 быть равной степени числа 2017?

Для ответа на поставленный в задаче вопрос исследуем уравнение:

$$2017^{x_1}+2017^{x_2}+\ldots+2017^{x_n}=2017^y, \quad (11)$$

при этом полагаем, что $x_1\le x_2\le\ldots\le x_n$. Тогда из равенства (11) имеем

$$2017^{x_1}\left(1+2017^{x_2-x_1}+\ldots+2017^{x_n-x_1}\right)=2017^y,$$

так как $y>x_1$, то число $1+2017^{x_2-x_1}+\ldots+2017^{x_n-x_1}$ должно делиться на 2017, а так как число 2017 – простое, то это возможно при $n=2017$ и $x_1=x_2=\ldots=x_n$, при этом $y=x_1+1$. Задача имеет решение также при n, делящемся на 2017.

Задача может быть сформулирована для любого конкретного простого числа.

Рассмотрим некоторые примеры задач, решаемых исследованием четности и нечетности входящих в формулы чисел.

Задача 6. Может ли число вида 2^x-2017, x – натуральное число, быть квадратом натурального числа?

Составляем уравнение $2^x-2017=y^2$. (12)

Число y^2, а следовательно, и y, нечетные. Полагая $y=2t+1$, $t\ge 0$, получим

$$2^x-4t(t+1)=2018. \quad (13)$$

При $x\ge 2$ левая часть уравнения (13) делится на 4, а правая не делится и уравнение (12) в целых числах неразрешимо.

Для самостоятельного исследования может быть предложена более общая задача: может ли число вида 2^x-a, x – натуральное число, $a=4k+1$, $k\ge 0$, быть квадратом натурального числа?

Ответ: $x=1$, $a=1$, $y=1$.

Задача 7. Решите в целых числах уравнение

$$3x^2-4y^2=2017. \quad (14)$$

Из уравнения (14) следует, что число x – нечетно. Полагая $x=2t+1$, получаем

$$3x^2-4y^2=2017 \Leftrightarrow 12t(t+1)-4y^2=2014.$$

Левая часть полученного уравнения делится на 4, а правая не делится, и данное уравнение в целых числах неразрешимо.

Для составления аналогичного вида неразрешимых в целых числах уравнений может быть использовано уравнение общего вида

$$(4k+3)x^2 - 4y^2 = 4s+1 \Leftrightarrow (4k+3)4t(t+1)$$
$$-4y^2 = 4(s-k)-2, \quad x = 2t+1,$$

неразрешимое в целых числах.

Пример:

При $s = 504$, $k = 1$: $7x^2 - 4y^2 = 2017$.

Рассмотренные примеры показывают значительные возможности для составления новых задач с другими числовыми данными и организации соответствующей исследовательской деятельности студентов.

Библиографический список

1. Смирнов, Е. И. Фундирование опыта в профессиональной подготовке и инновационной деятельности педагога [Текст] : монография / Е. И. Смирнов. – Ярославль : Изд-во ЯГПУ им. К. Д. Ушинского, 2012. – 646 с.

2. Хамов, Г. Г., Тимофеева, Л. Н. О методах составления некоторых типов задач и их использования как средства организации исследовательской деятельности студентов [Текст] / Г. Г. Хамов, Л. Н. Тимофеева // Наука и школа. – 2014. – № 1. – С. 48–51.

3. Хамов, Г. Г., Тимофеева, Л. Н. Использование теории многочленов для составления и решения диофантовых уравнений в процессе изучения теоретико-числового материала [Текст] / Г. Г. Хамов, Л. Н. Тимофеева // Ярославский педагогический вестник. – 2014. – Том II. – № 4. – С. 36–40.

4. Хамов Г. Г., Тимофеева Л. Н. О формировании мотивационно-ценностного компонента математической подготовки будущего учителя / [Текст] / Г. Г. Хамов, Л. Н. Тимофеева // Ярославский педагогический вестник. – 2015. – № 5. – С. 108–112.

5. Хамов, Г. Г., Тимофеева, Л. Н. О совершенствовании профессиональной подготовки будущего учителя математики [Текст] / Г. Г. Хамов, Л. Н. Тимофеева // Международный научно-исследовательский журнал. – 2016. – № 1 (43). – Ч. 4. – С. 57–60.

6. Хамов, Г. Г., Тимофеева, Л. Н. Методика конструирования арифметических задач при изучении теоретико-числовых тем [Текст] / Г. Г. Хамов, Л. Н. Тимофеева // Ярославский педагогический вестник. – 2016. – № 3. – С. 84–87.

Bibliograficheskij spisok

1. Smirnov, E. I. Fundirovanie opyta v professional'noj podgotovke i innovacionnoj dejatel'nosti pedagoga [Tekst] : monografija / E. I. Smirnov. – Jaroslavl' : Izd-vo JaGPU im. K. D. Ushinskogo, 2012. – 646 s.

2. Hamov, G. G., Timofeeva, L. N. O metodah sostavlenija nekotoryh tipov zadach i ih ispol'zovanija kak sredstva organizacii issledovatel'skoj dejatel'nosti studentov [Tekst] / G. G. Hamov, L. N. Timofeeva // Nauka i shkola. – 2014. – № 1. – C. 48–51.

3. Hamov, G. G., Timofeeva, L. N. Ispol'zovanie teorii mnogochlenov dlja sostavlenija i reshenija diofantovyh uravnenij v processe izuchenija teoretiko-chislovogo materiala [Tekst] / G. G. Hamov, L. N. Timofeeva // Jaroslavskij pedagogicheskij vestnik. – 2014. – Tom II. – № 4. – C. 36–40.

4. Hamov G. G., Timofeeva L. N. O formirovanii motivacionno-cennostnogo komponenta matematicheskoj podgotovki budushhego uchitelja / [Tekst] / G. G. Hamov, L. N. Timofeeva // Jaroslavskij pedagogicheskij vestnik. – 2015. – № 5. – C. 108–112.

5. Hamov, G. G., Timofeeva, L. N. O sovershenstvovanii professional'noj podgotovki budushhego uchitelja matematiki [Tekst] / G. G. Hamov, L. N. Timofeeva // Mezhdunarodnyj nauchno-issledovatel'skij zhurnal. – 2016. – № 1 (43). – Ch. 4. – C. 57–60.

6. Hamov, G. G., Timofeeva, L. N. Metodika konstruirovanija arifmeticheskih zadach pri izuchenii teoretiko-chislovyh tem [Tekst] / G. G. Hamov, L. N. Timofeeva // Jaroslavskij pedagogicheskij vestnik. – 2016. – № 3. – C. 84–87.

Reference List

1. Smirnov E. I. Founding of experience in professional training and innovative activity of the teacher: monograph. – Yaroslavl : YSPU named after K. D. Ushinsky publishing house, 2012. – 646 p.

2. Khamov G. G., Timofeeva L. N. About methods of drawing up some types of tasks and their uses as means of the organization of students' research activity // Science and school. – 2014. – № 1. – p. 48–51.

3. Khamov G. G., Timofeeva L. N. Use of the theory of polynomials for drawing up and the solution of the diophantine equations in the course of studying of number-theoretic material // Yaroslavl pedagogical bulletin. – 2014. – Volume II. – № 4. – p. 36–40.

4. Khamov G. G., Timofeeva L. N. About formation of a motivational and valuable component of mathematical training of a future teacher // Yaroslavl pedagogical bulletin. – 2015. – № 5. – p. 108–112.

5. Khamov G. G., Timofeeva L. N. About improvement of professional training of future mathematics teacher // International research magazine. – 2016. – № 1 (43). – P. 4. – p. 57–60.

6. Khamov G. G., Timofeeva L. N. Mehods of designing of arithmetic tasks when studying theoretic-numerical subjects // Yaroslavl pedagogical bulletin. – 2016. – № 3. – p. 84–87.