УДК 378.046.4; 372.8

С. Н. Дворяткина, Р. А. Мельников

Технологическое обеспечение процессов самоорганизации и саморазвития будущих учителей математики в системе дополнительного профессионального образования

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 16–18–10304)

В статье актуализируется проблема технологического сопровождения процессов самоорганизации и саморазвития будущих учителей математики в системе дополнительного профессионального образования, которая, с одной стороны, обеспечивает совершенствование знаний специалистов для выполнения нового вида профессиональной деятельности, а с другой – получение дополнительной квалификации. Базовым методологическим положением технологического сопровождения процессов самоорганизации и саморазвития будущих учителей математики явились идеи и принципы синергетического подхода. Авторами разработан и представлен проект дополнительной профессиональной программы профессиональной переподготовки «Синергия математического образования в процессе реализации школьного и профессионального обучения», который был реализован посредством предложенной Е. И. Смирновым четырехэтапной инновационной технологии проявления синергии в математическом образовании. Процесс становления основ самоорганизации и профессиональной самореализации слушателей, а также получения синергетических эффектов подробно проиллюстрирован в ходе актуализации, выявления и разрешения проблемы построения математических моделей для анализа и изучения сложных открытых социальных явлений и процессов с помощью применения теории бифуркационного анализа. Полученные результаты открывают возможность для дальнейшего исследования процессов самоорганизации и саморазвития будущих учителей математики с учетом современных достижений в науке, эффективной реализации предлагаемых в настоящем исследовании моделей и технологий с целью дальнейшего повышения уровня профессионализма.

Ключевые слова: система дополнительного образования, синергия математического образования, технология проявления синергии, самообразование, саморазвитие.

S. N. Dvoryatkina, R. A. Melnikov

Technological Support of Self-Organization and Self-Development Processes of Future Mathematics Teachers in the Additional Professional Education System

In the article the problem of technological support of processes of self-organization and self-development of future mathematics teachers in the additional professional education system which, on the one hand, provides perfecting of experts' knowledge for realization of a new type of professional activity, and on the other – obtaining adding qualification is staticized. The basic methodological statement of technological support of self-organization and self-development processes of future mathematics teachers were the ideas and the principles of the synergetic approach. The authors developed and submitted the project of the additional professional programme of professional retraining «Synergy of mathematical education in the course of realization of school and vocational education» which was realized by means of the four-stage innovative technology of manifestation of synergy offered by E. I. Smirnov in mathematical education. The process of development of bases of self-organization and professional self-realization of listeners and also obtaining synergetic effects explicitly is illustrated during updating, identification and solution of the problem of creation of mathematical models for the analysis and studying of the composite, open social phenomena and processes by means of application of the theory of the bifurcation analysis. The received results give an opportunity for a further research of self-organization and self-development processes of future mathematics teachers taking into account the modern achievements in science, efficient realization of the models and technologies offered in the real research with the purpose of further increase at the level of professionalism.

Keywords: additional education system, synergy of mathematical education, technology of synergy manifestation, self-education, self-development.

Введение. Особенностью современного мира профессий является смена монопрофессионализма полипрофессионализмом, который характеризуется возможностью динамичного перехода от основной специальности к смежным, способностью изменить сферу профессиональных интересов и, как следствие, – квалификацию с высокой компетентностью в решении профессиональных задач. Выпускник вуза должен быть готов к тому, что знаний и умений, полученных за время обучения, будет недостаточно на весь период активной трудовой деятельности. В этом контексте особую значимость приобретают процессы самообразования, самореализации и саморазвития личности, в ходе которых происходит превращение обучаемого в субъекта, заинтересованного в самоизменении. Повышение роли субъектности в познавательном процессе смещает педагогическое внимание на указанные процессы и интериоризацию профессионально-ориентированного знания [3].

Человек, меняя стандарты своей профессиональной деятельности, приближается к учету и пониманию многомерности бытия. Поэтому личность обучаемого следует понимать как открытую систему с диссипативным характером развития в ходе информационного обмена. Количественные и качественные характеристики этого обмена зависят от степени открытости личности, способности воспринимать многообразие социальных связей, создавать и преобразовывать их, выводя на новый уровень свою внутреннюю организацию и реализуя себя.

При этом становление основ самоорганизации и саморазвития личности в процессе осуществления учебной деятельности может быть достигнуто посредством создания насыщенной информационно-образовательной среды с высоким мотивационным полем и потенциалом личностного саморазвития обучающихся, коммуникаций и диалога культур. Такой средой является система дополнительного профессионального образования (ДПО), которая, с одной стороны, обеспечивает совершенствование знаний специалистов для выполнения нового вида профессиональной деятельности, а с другой – получение дополнительной квалификации. ДПО ориентировано на формирование компетенций, составляющих основу профессиональной мобильности: раскрытие интеллектуального, профессионально-творческого и социального потенциала личности специалиста, развитие мотивационной и коммуникационной сферы, рефлексивного контроля и саморегуляции, самооценки и выбора, ориентацию на «обучение в течение всей жизни».

Наибольшим потенциалом для становления основ самоорганизации в системе ДПО обладает математическое образование. В свою очередь, процесс обучения математике можно рассматривать как сложную и открытую социальную систему, способствующую проявлению синергетических эффектов в разных направлениях [2]: развитие и воспитание личности, упорядоченность содержания и структуры когнитивного опыта, коммуникация и социальное взаимодействие субъектов на основе диалога культур (Ф. Маслоу, Г. Олпорт, К. Роджерс, А. М. Матюшкин, М. М. Кашапов и др.). Математическое образование в условиях системы ДПО должно обеспечивать принципиально новое качество образования, в котором самоорганизация и саморазвитие выступают характеристикой среды обучения.

В связи с вышеизложенным, особо актуальной становится необходимость тщательной разработки технологического сопровождения процессов самоорганизации и саморазвития будущих учителей математики в системе ДПО, которая понимается и рассматривается нами как способ и средство освоения этого важного явления в области педагогики, как руководящая идея для его систематического осуществления, как конструктивный принцип в подготовке квалифицированных кадров.

Методология, технологии и методы. Исходное методологическое положение разработки технологического сопровождения процессов самоорганизации и саморазвития в обучении математике составили идеи и принципы синергетического подхода (Е. Н. Князева, С. П. Курдюмов, Г. Г. Малинецкий, В. П. Милованов, И. Р. Пригожин, Г. Хакен и др.). Задача интегральной науки синергетики состоит в изучении процессов спонтанного упорядочивания (перехода от хаоса к порядку) в открытых системах различной природы, обменивающихся с внешней средой энергией, информацией, и возникновения при этом новых свойств. Таким образом, экспансия синергетических методов в различные науки эффективна тогда, когда требуется учитывать самоорганизацию и саморазвитие, интегральные характеристики и закономерности [9]. Применение методологии синергетики к процессу обучения обеспечит самоорганизацию, саморазвитие и качественное изменение личности обучаемого через создание насыщенной информационно-образовательной среды, в которой возможны процессы порождения знаний самими обучающимися, их продуктивное творчество, пробуждение собственных сил обучающегося, инициирование его на один из собственных путей развития.

Согласно Г. Хакену [10], при переходе от неупорядоченности к порядку во всех явлениях возникает сходное поведение элементов, которое он назвал кооперативным, синергетическим эффектом. Выявление вероятностей проявления синергетических эффектов и механизмов самоорганизации личности возможно посредством разработанной Е. И. Смирновым инновационной технологии проявления синергии в математическом образовании будущего педагога, «представляющей собой готовность личности к поэтапному освоению математической деятельности, соединяющей в себе синергетические эффекты развертывания теоретического или объектно-сущностных (приобретение опыта), процессуально-деятельностных (применение и преобразование опыта), личностно-адаптационных (развитие личностных характеристик, интеллекта) компонентов технологии решения сложных задач в контексте реализации личностных предпочтений с высоким уровнем развития учебной и профессиональной мотивации» [6].

Готовность к инновационной деятельности будущего педагога на основе проявления синергии математического образования исследователь рассматривает как интегративное единство личностных качеств, фундаментальной математической подготовки и опыта педагога. Данный симбиоз ведет к пороговому эффекту самоорганизации и саморазвития обучающихся, направленному на

− освоение многоступенчатой обобщенности знаково-символических систем высокого уровня абстрагирования, полифункциональности, многообразия математического знания;

− успешное и творческое решение профессионально-ориентированных задач с опорой на нововведения в проектировании и самоорганизации учебной, обучающей и диагностической деятельности в ходе совместного с обучающимися постижения сложного знания на основе современных достижений в науке [7; 6].

Результаты исследования. Новой формой технологического сопровождения процессов самоорганизации и саморазвития является разработанная нами дополнительная профессиональная программа профессиональной переподготовки «*Синергия математического образования в процессе реализации школьного и профессионального обучения*». При формировании контингента слушателей предпочтение отдавали лицам, получившим высшее профессиональное образование по математическим и техническим направлениям подготовки. Тем самым реализовывалась возможность профессиональной самореализации и смены профессиональных интересов оптимальным способом и с учетом востребованности специалистов данной области на рынке труда. *Целью программы* является предоставление новой квалификации и выполнение нового вида профессиональной деятельности, связанной со спецификой работы преподавателя математики в общеобразовательных и средних профессиональных образовательных учреждениях.

Задачи программы:

− заложить у слушателей способность к самоорганизации, саморазвитию и профессиональному самосовершенствованию в контексте межкультурных коммуникаций;

− подготовить будущих педагогов к более эффективной работе в современной школе и средних профессиональных образовательных учреждениях: ознакомить с новыми стандартами, приемами, методиками и технологиями обучения;

− сформировать системное знание предметной области в двух направлениях: углубление математических курсов (фракталы, бифуркации и др.) и ознакомление с новейшими образовательными технологиями, методиками посредством адаптации современных достижений в науке;

− сформировать творческую активность педагога как субъекта инновационной деятельности, умение адаптироваться и развиваться в социальных коммуникациях на основе диалога математической, информационной, естественно-научной и гуманитарной культур.

Структура и содержание дополнительной профессиональной программы профессиональной переподготовки (ДПППП) *«Синергия математического образования в процессе реализации школьного и профессионального обучения»* (руководитель проф. С. Н. Дворяткина) представлены в Таблице 1.

Рассмотрим процесс становления основ самоорганизации и профессиональной самореализации слушателей в ходе актуализации и выявления «проблемной зоны» дисциплины «Новейшие математические методы и их приложения в педагогической деятельности» (п. 6.2), иллюстрирующей возможность формирования обобщенного конструкта научного знания с целью достижения синергетического эффекта и механизмов самоорганизации личности, следуя этапам технологии Е. И. Смирнова [6; 8].

Таблица 1

Учебный план ДПППП «Синергия математического образования в процессе реализации школьного и профессионального обучения»

Дисциплины	Структура и содержание	Объем, ч.; автор-разработчик
1. Нормативно-правовое обеспечение образовательного процесса	1.1. Организационно-правовые основы образования. Образование как объект правового регулирования. Организационно-правовые основы деятельности образовательных учреждений. 1.2. Нормативно-правовое обеспечение образовательного процесса. Организация образовательного процесса. Правовое положение участников образовательного процесса	30; доц. Г. А. Симоновская
2. Психолого-педагогические теории и методика обучения математике	2.1. Теории обучения. Образование как социокультурный феномен. Основные дидактические теории. Процесс обучения. Психологические закономерности и механизмы обучения. Содержание образования. Методы обучения и образовательные технологии. 2.2. Методика преподавания математики (общая методика). Предмет методики преподавания математики. Содержание школьного курса математики. Математические понятия и факты. Методика их изучения. Методы и формы обучения математике. Организационные вопросы обучения математике	72; проф. О. А. Саввина
3. Современные аспекты преподавания математики в школе и профессиональных учреждениях	3.1. Современные образовательные технологии. Современные подходы к организации образовательного процесса в условиях перехода на ФГОС второго поколения. Организация исследовательской, проектной деятельности учащихся и учителей в условиях школьного обучения математике. Современные педагогические технологии при обучении математике детей с особыми образовательными потребностями (технология проблемного обучения, кейс-технологии, технология наглядного моделирования и др.). 3.2. Современные системы оценки и контроля знаний по математике. Современные технологии оценки знаний (рейтинговая система, портфолио достижений). Единый государственный экзамен по математике как структура системы контроля знаний	36; доц. Г. А. Симоновская
4. Основные математические структуры и их роль в образовании	4.1. Основные математические структуры алгебры и теории чисел. Основные алгебраические структуры. Основы теории чисел. 4.2. Основные структуры математического анализа. Функции в школьном и вузовском курсах математики. Предел, производная и интеграл. Последовательности и ряды	36; доц. Р. А. Мельников
5. Методы математической статистики в педагогике	5.1. Классификация статистических методов в педагогическом исследовании. Основные понятия, используемые в статистической обработке эмпирических данных (математические основы измерения в педагогических исследованиях, шкалы измерения, выборочный метод). Теория статистического вывода (статистические критерии различий, статистические критерии согласия, их приложения в педагогике). Корреляционно-регрессионный анализ. Коэффициенты корреляции. 5.2. Информационное сопровождение использования статистических методов в педагогических исследованиях. Обзор программного обеспечения для статистического анализа данных	36; проф. С. Н. Дворяткина
6. Новейшие математические методы и их приложения в педагогической деятельности	6.1. Фракталы как область современной математики и ее практические приложения. Фракталы и мультифракталы, математические основы. Роль фрактальной геометрии в формировании естественнонаучной картины мира. Потенциал фрактального моделирования в педагогике: смена парадигм образования; фрактальная геометрия как математическая дисциплина; роль фракталов в проектной деятельности обучаемых; технология фрактального отбора и структурирования содержания обучения математике; фрактальные методы в педагогической диагностике и оценивании знаний обучаемых. 6.2. Элементы теории бифуркаций – новейшей области современной математики, ее прикладное значение для образования. Синергия линейной алгебры, теории дифференциальных и теории интегральных уравнений – особый взгляд на понятия «собственное значение» и «собственный вектор». Классификация особых точек системы линейных дифференциальных уравнений и их устойчивость. Понятие «бифуркация» в теории дифференциальных и интегральных уравнений. Математическое моделирование образовательных и психологических процессов. Исследование их на устойчивость и на возможность появления бифуркаций	72; проф. С. Н. Дворяткина, доц. Р. А. Мельников
Итоговая аттестация		6

Этап I. Подготовительно-организационный

Основные задачи данного этапа:

− выявить проблемные точки и затруднения в достижении успешности познавательной деятельности обучающихся в сфере педагогической деятельности;

− актуализировать и сформировать тезаурус синергии математического образования: флуктуации, точки бифуркации, странные аттракторы и т. п.;

− выявить особенности и предпочтения у обучаемых в мыслительных процессах, мотивации и рефлексии, креативности и коммуникативной деятельности;

− сформировать устойчивые мотивы поиска и освоения нового в педагогической деятельности.

Основной результат данного этапа – *определение и актуализация «проблемной зоны»* вузовской математики, средство разрешения которой – поиск и исследование обобщенного конструкта научного знания с последующей адаптацией к наличному уровню математических знаний и методов. В нашем случае – это *проблема построения математических моделей для анализа и изучения сложных, открытых социальных явлений и процессов с помощью применения теории бифуркационного анализа*.

Вопросы и задания для актуализации «проблемной зоны»:

− Что называют системой обыкновенных дифференциальных уравнений?

− Какие формы записи системы обыкновенных дифференциальных уравнений вы знаете?

− Какая система обыкновенных дифференциальных уравнений называется линейной?

− Какая система обыкновенных дифференциальных уравнений называется однородной?

− Как определить порядок системы дифференциальных уравнений по ее аналитической записи?

− Что называют решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений?

− Какие типы решений можно выделить для системы обыкновенных дифференциальных уравнений?

− Какое решение называется устойчивым, асимптотически устойчивым и неустойчивым (в смысле Ляпунова)?

− Что называется точкой бифуркации?

− Приведите пример математической модели, в которой возникают автоколебания. Можно ли считать эту модель пригодной для описания процессов, связанных с мышлением, образованием и т. п.?

− Установите, как взаимодействуют теория и эксперимент. Какова зависимость между ценностью эксперимента и достижениями теории, выражаемыми в количестве новых публикаций?

− Предложите модель творчества, отталкиваясь от связи между мышлением и интуицией (озарением). Возможен ли в этом случае бифуркационный переход от устойчивого предельного цикла к устойчивому фокусу с неустойчивым предельным циклом?

Мотивационное поле: интуитивно-наглядное моделирование профессионально-прикладных ситуаций в трактовке понятия «решение системы дифференциальных уравнений».

Формы: проблемная лекция, семинарские занятия, работа в малых группах, научные семинары.

Средства: математическое и компьютерное моделирование с применением известных математических пакетов; педагогические программные продукты.

В процессе *актуализации атрибутов синергии* на данном этапе был сформирован тезаурус, относящийся к теории бифуркационного анализа. Одним из ключевых понятий, вошедших в него, стал термин «бифуркация». Этимология этого слова связана с латинским словом «*bifurcus*», которое означает «*раздвоенный*». Приведем одно из его известных определений. Бифуркация – термин, употребляемый в некоторых разделах математики применительно к ситуациям, когда некоторый объект зависит от параметра λ (не обязательно скалярного) и в любой окрестности некоторого значения λ_0 последнего (бифуркационного значения, или точки бифуркации) исследуемые качественные свойства объекта не являются одинаковыми для всех λ [4, с. 96].

С точки зрения теории систем дифференциальных уравнений (и других функциональных уравнений, например, интегральных, интегро-дифференциальных) этим термином описывается поведение динамической системы, заключающееся в приобретении нового качества решений этой системы при малом изменении ее параметра (параметров). Когда параметр достигает некоторого критического значения, появляются так называемые *точки бифуркации* (иначе *точки ветвления* возможных путей развития системы).

Этап 2. Содержательно-технологический

Основные задачи данного этапа:

− освоить средствами математического и компьютерного моделирования содержательные конструкты приемов адаптации обобщенного научного знания к наличному состоянию математических знаний и способов профессиональной деятельности слушателей;

− выявить и обосновать новые математические результаты в ходе освоения и исследования обобщенного конструкта, обеспечить наглядность моделирования и высокий уровень профессиональной мотивации слушателей;

− отразить тезаурус синергии математического образования в ходе исследовательской деятельности;

− развивать вероятностное мышление и творческую самостоятельность слушателей на фоне освоения интегративного знания и процедур конструирования содержания, этапов, базовых и вариативных характеристик объекта проектирования;

− развивать умения адаптироваться, совершенствоваться в социальных коммуникациях на основе диалога математической, информационной, естественно-научной и гуманитарной культур.

Мотивационное поле: математическое моделирование профессионально-прикладных ситуаций «нового» толкования понятия «устойчивость решения системы дифференциальных уравнений».

Формы: мини-лекция, лабораторно-расчетные занятия, семинары и научные конференции, дистанционные дискуссионные форумы.

Средства: математическое и компьютерное моделирование, современные языки программирования С++, С#.

Задачи для актуализации «проблемной зоны»:

– Исследовать, при каких значениях параметра точка покоя системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x + \alpha y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -\alpha x + y. \end{cases}$$

устойчива; неустойчива?

− По условию Задачи 1 определить характер точки покоя в зависимости от значения α.

− По условию Задачи 1 сделать графическую интерпретацию каждого из полученных случаев.

Перейдем к решению поставленной проблемы.

Данная система представляет собой систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Составим сначала вековое уравнение для данной системы:

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & \alpha \\ -\alpha & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \; .$$

Преобразуем левую часть в последнем равенстве, представив его в виде многочлена, разложенного по степеням λ:

$$(-3-\lambda)\cdot(1-\lambda)+\alpha^2 = 0 \; .$$

Представим квадратный трехчлен, стоящий в левой части, в стандартном виде:

$$\lambda^2 + 2\lambda + \alpha^2 - 3 = 0 \; .$$

Введем обозначения для коэффициентов квадратного уравнения: $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = \alpha^2 - 3$.

Составим из этих коэффициентов определитель Гурвица [1, с. 162]:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & \alpha^2 - 3 \end{vmatrix} .$$

Определим теперь знаки угловых миноров этого детерминанта. Очевидно, что $\Delta_1 = 2 > 0$. Далее имеем: $\Delta_2 = 2(a^2 - 3)$. В таком случае надо проверить необходимое и достаточное условие устойчивости. Оно будет выполняться лишь при условии, что $\Delta_2 = 2(a^2 - 3) > 0$. Применяя метод интервалов к этому неравенству, получим: $\alpha \in (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$.

Найдем характеристические числа данной системы дифференциальных уравнений, то есть корни выписанного ранее квадратного уравнения.

Найдем дискриминант для уравнения $\lambda^2 + 2\lambda + \alpha^2 - 3 = 0$.

$$D = 4 - 4\cdot(\alpha^2 - 3) = 4\cdot(4 - \alpha^2) \; .$$

Положим сначала *D*>0, то есть $4 - \alpha^2 > 0$.

В таком случае, очевидно, $\alpha \in (-2; 2)$.

Далее запишем характеристические числа в виде:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4\cdot(4-\alpha^2)}}{2} = -1 \pm \sqrt{4-\alpha^2} \; .$$

Рассмотрим два варианта:

Если $\alpha \in (-\sqrt{3}; \sqrt{3})$, то очевидно, что числа $\lambda_1 = -1 - \sqrt{4-\alpha^2} < 0$, $\lambda_2 = -1 + \sqrt{4-\alpha^2} > 0$ будут иметь разные знаки. Значит, точка покоя системы неустойчива (*седло*).

Положим $\alpha = \sqrt{2}$.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x + \sqrt{2}y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -\sqrt{2}x + y. \end{cases}$$

Положим $\alpha = -\sqrt{2}$.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x - \sqrt{2}y, \\ \dfrac{dy}{dt} = \sqrt{2}x + y. \end{cases}$$

Если $\alpha \in \left(-2; -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}; 2\right)$,

то $\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{4 - \alpha^2} < 0$. В этом случае имеет место устойчивость тривиального решения системы. Точка покоя – *устойчивый узел*.

$\alpha = -1{,}8$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x - 1{,}8 \cdot y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 1{,}8 \cdot x + y. \end{cases}$$

$\alpha = 1{,}8$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x + 1{,}8 \cdot y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -1{,}8 \cdot x + y. \end{cases}$$

Положим теперь $D = 0$, то есть $4 - \alpha^2 = 0$. Ясно, что $\alpha = \pm 2$. В таком случае $\lambda_{1,2} = -1 < 0$. Имеет место устойчивость решения. Характер точки покоя – *дикритический устойчивый узел*.

Положим $\alpha = 2$.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x + 2 \cdot y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2 \cdot x + y. \end{cases}$$

Положим $\alpha = 2$.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x - 2 \cdot y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2 \cdot x + y. \end{cases}$$

Рассмотрим заключительный случай $D < 0$, то есть $4 - \alpha^2 < 0$. Тогда $\alpha \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$. Очевидно, что оба характеристических числа $\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{4 - \alpha^2}$ являются комплексными числами. В этом случае тривиальное решение асимптотически устойчиво. Характер точки покоя – *устойчивый фокус*.

Положим $\alpha = 4$. Система дифференциальных уравнений примет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x + 4 \cdot y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -4 \cdot x + y. \end{cases}$$

Положим $\alpha = -4$. Система дифференциальных уравнений примет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x - 4 \cdot y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4 \cdot x + y. \end{cases}$$

Замечание. Особый интерес представляет случай $\alpha = \pm\sqrt{3}$. В этом случае мы будем иметь неполное квадратное (характеристическое) уравнение $\lambda^2 + 2\lambda = 0$. Его корнями будут $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$ и решение будет устойчивым.

Этап 3. Оценочно-коррекционный

Данный этап характеризуется оценкой методов и процедур нахождения результатов, варьированием условий и данных задачи, оценкой выбора оптимального пути решения проблемы.

Проанализируем возможность появления «точек бифуркации» при изменении системы дифференциальных уравнений, рассмотренной в задаче. Для этого будем вносить в аналитическую запись этой системы нелинейные компоненты. На фазовом портрете будем отслеживать, какие изменения в поведении траекторий происходят, проявляются ли точки бифуркации.

Возьмем систему из задачи (случай $\alpha = 2$). Внесем нелинейность в первое уравнение. Например, запишем систему:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x + 2 \cdot y + y^2 - 1, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2 \cdot x + y. \end{cases}$$

Видоизменим систему дифференциальных уравнений, в которой было выбрано значение параметра $\alpha = 4$. Внесем нелинейные слагаемые как в первое, так и во второе уравнения системы.

Пусть система дифференциальных уравнений примет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x + 4 \cdot y - y^2 - 1, \\ \dfrac{dy}{dt} = -4 \cdot x + y + x^3 - 2. \end{cases}$$

Появилась бифуркация типа «*фокус-седло*».

Далее рекомендуем задания для исследования многоэтапной математико-информационной задачи (для самопроверки), оснащенной иерархической цепочкой вопросов, направленных на выявление бифуркационных явлений, связанных с мыслительным процессом.

Дана система дифференциальных уравнений и ее фазовый портрет.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x^2 + \sqrt{2}y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -\sqrt{2}x + y^2. \end{cases}$$

Охарактеризуйте изменения, произошедшие с системой дифференциальных уравнений; сравните ее аналитическую запись с одной из систем ранее представленной задачи.

Этап 4. Обобщающе-преобразующий

Данный этап характеризуется переносом этой модели на другие предметные области, в частности, на психолого-педагогические системы, являющиеся открытыми и неравновесными. Нахождение в моделях данных систем коллективных структур (фокусы, предельные циклы, странные аттракторы и др.) с помощью бифукарционного анализа способствует творческому поиску, актуализации мотивации, развитию инновационной деятельности будущего педагога в условиях синергии математического образования. Например, способность построения модели, описывающей процессы мышления на основе поступающей информации, и умение дать рекомендации для реальной практики может служить характеристиками, параметрами и показателями становления индивидуального стиля деятельности педагога, основ самоорганизации и профессионального саморазвития. Мышление можно определить как бифуркацию устойчивого предельного цикла с переходом в ячейки устойчивого фокуса с неустойчивым предельным циклом и без цикла при поглощении информации, в которых завершается процесс мышления при генерации определяющей идеи либо проявления интуиции, озарения. При этом траекторию устойчивого фокуса можно назвать творчеством.

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \alpha_1 x - \alpha_2 xy + \alpha_3 y; \\ \dfrac{dy}{dt} = \beta_1 y - \beta_2 xy + \beta_3 x, \end{cases}$$

где x(t) и y(t) – информация, перерабатываемая соответственно левым и правым полушариями головного мозга человека; слагаемые $-\alpha_2 xy$ и $-\beta_2 xy$ характеризуют потери, возникающие при обменных процессах; компоненты $\alpha_3 y$ и $\beta_3 x$ – потоки информации из правого полушария в левое полушарие, и из левого – в правое соответственно [5, с. 64].

Она может служить в качестве одной из возможных математических моделей, описывающих механизм взаимодействия между двумя полушариями головного мозга человека. Эта задача играет важную роль в таких отраслях современной психологической науки, как психодиагностика и нейролингвистическое программирование.

Относительно решения этой задачи важно установить положение равновесия системы, описав это формулами, связывающими коэффициенты исходной системы, а также вычислить величину Ляпунова, с помощью которой можно оценить устойчивость или неустойчивость решения этой модели при выбранных значениях коэффициентов системы.

Положим теперь в представленной системе: $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 3$, $\alpha_3 = 1$, $\beta_1 = 5$, $\beta_2 = 2$, $\beta_3 = 2$, тогда ее можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 3xy + y; \\ \dfrac{dy}{dt} = 5y - 2xy + 2x. \end{cases}$$

Как видим, положение равновесия при таком выборе коэффициентов неустойчиво.

В заключение отметим, что предложенный проект программы профессиональной переподготовки «Синергия математического образования в процессе реализации школьного и профессионального обучения», составленный с учетом применения идеологии синергетики и реализуемый как содержательный и организационный аспекты технологии проявления синергии в математическом образовании будущего педагога, позволит специалисту данной профессиональной области быстро адаптироваться к изменяющимся условиям жизни, самостоятельно нелинейно и критически мыслить, целостно видеть возникающие проблемы и находить их решения, оперативно и грамотно работать с информацией, самостоятельно развивать свой интеллект.

Библиографический список

1. Буркин, И. М., Мельников, Р. А. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Методы интегрирования. Теория устойчивости. Теория колебаний [Текст] : учебное пособие / И. М. Буркин, Р. А. Мельников. – Елец : ЕГУ им. И. А. Бунина, 2007. – 269 с.

2. Дворяткина, С. Н., Смирнов, Е. И. Оценка синергетических эффектов интеграции знаний и деятельности на основе компьютерного моделирования [Текст] / С. Н. Дворяткина, Е. И. Смирнов // Современные информационные технологии и ИТ-образование. – М. : МГУ, 2016. – С. 35–42.

3. Краснопольская, А. П. Агональный диалог и постнеклассическое образование [Текст] / А. П. Краснопольская // Вестник МГУКИ. – 2015. – № 4 (66). – С. 64–71.

4. Математический энциклопедический словарь [Текст] / под ред. Ю. В. Прохорова. – М. : Советская энциклопедия, 1988. – 845 с.

5. Милованов, В. П. Синергетика и самоорганизация: Экономика. Биофизика [Текст] : монография / В. П. Милованов. – М. : КомКнига, 2005. – 168 с.

6. Смирнов, Е. И. Этапы технологического сопровождения процесса самоорганизации в математическом образовании будущего педагога [Текст] / Е. И. Смирнов, Н. Е. Смирнов, А. Д. Уваров // Ярославский педагогический вестник. – 2017. – № 3. – С. 102–111.

7. Смирнов, Е. И. Сложность задач и синергия математического образования [Текст] / Е. И. Смирнов, С. Ф. Бурухин // Задачи в обучении математике, физике и информатике: теория, опыт и инновации : материалы международной научно-практической конференции, посвященной 125-летию П. А. Ларичева. – Вологда, 2017. – С. 11–17.

8. Смирнов, Е. И. Синергия математического моделирования в решении сложных задач [Текст] / Е. И. Смирнов // Harmonious personal development problem in relation to specificity of modern education and socialization processes. Peer-reviewed materials digest (collective monograph) published following the results of the CXXXI International Research and Practice Conference and III stage of the Championship in Psychology and Educational sciences. – London : IASHE, 2016. – P. 22–26.

9. Степин, В. С. О философских основаниях синергетики [Текст] / В. С Степин // Синергетика: Будущее мира и России / под ред. Г. Г. Малинецкого. – М., 2008. – С. 17–23.

10. Haken, H. (2004) Synergetics. Introduction and Advanced Topics – Springer, Berlin. – 758 p.

11. Smirnov, E. I. Methodological Foundation of a Synergy in Mathematical Education of the Teacher [Text] // International periodic scientific journal «SWorldJournal» Pedagogy, Psychology and Sociology, 2016. – № 11. – P. 23–28.

Bibliograficheskij spisok

1. Burkin, I. M., Mel'nikov, R. A. Obyknovennye differencial'nye uravnenija. Metody integrirovanija. Teorija ustojchivosti. Teorija kolebanij [Tekst] : uchebnoe posobie / I. M. Burkin, R. A. Mel'nikov. – Elec : EGU im. I. A. Bunina, 2007. – 269 s.

2. Dvorjatkina, S. N., Smirnov, E. I. Ocenka sinergeticheskih jeffektov integracii znanij i dejatel'nosti na osnove komp'juternogo modelirovanija [Tekst] / S. N. Dvorjatkina, E. I. Smirnov // Sovremennye informacionnye tehnologii i IT-obrazovanie. – M. : MGU, 2016. – S. 35–42.

3. Krasnopol'skaja, A. P. Agonal'nyj dialog i postneklassicheskoe obrazovanie [Tekst] / A. P. Krasnopol'skaja // Vestnik MGUKI. – 2015. – № 4 (66). – S. 64–71.

4. Matematicheskij jenciklopedicheskij slovar' [Tekst] / pod red. Ju. V. Prohorova. – M. : Sovetskaja jenciklopedija, 1988. – 845 s.

5. Milovanov, V. P. Sinergetika i samoorganizacija: Jekonomika. Biofizika [Tekst] : monografija / V. P. Milovanov. – M. : KomKniga, 2005. – 168 s.

6. Smirnov, E. I. Jetapy tehnologicheskogo soprovozhdenija processa samoorganizacii v matematicheskom obrazovanii budushhego pedagoga [Tekst] / E. I. Smirnov, N. E. Smirnov, A. D. Uvarov // Jaroslavskij pedagogicheskij vestnik. – 2017. – № 3. – S. 102–111.

7. Smirnov, E. I. Slozhnost' zadach i sinergija matematicheskogo obrazovanija [Tekst] / E. I. Smirnov, S. F. Buruhin // Zadachi v obuchenii matematike, fizike i informatike: teorija, opyt i innovacii : materialy mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoj konferencii, posvjashhennoj 125-letiju P. A. Laricheva. – Vologda, 2017. – S. 11–17.

8. Smirnov, E. I. Sinergija matematicheskogo modelirovanija v reshenii slozhnyh zadach [Tekst] / E. I. Smirnov // Harmonious personal development problem in relation to specificity of modern education and socialization processes. Peer-reviewed materials digest (collective monograph) published following the results of the CXXXI International Research and Practice Conference and III stage of the Championship in Psychology and Educational sciences. – London : IASHE, 2016. – P. 22–26.

9. Stepin, V. S. O filosofskih osnovanijah sinergetiki [Tekst] / V. S Stepin // Sinergetika: Budushhee mira i Rossii/pod red. G. G. Malineckogo. – M., 2008. – S. 17–23.

10. Haken, H. (2004) Synergetics. Introduction and Advanced Topics – Springer, Berlin. – 758 p.

11. Smirnov, E. I. Methodological Foundation of a Synergy in Mathematical Education of the Teacher [Text] // International periodic scientific journal «SWorldJournal» Pedagogy, Psychology and Sociology, 2016. – № 11. – P. 23–28.

Reference List

1. Burkin I. M., Melnikov R. A. Ordinary differential equations. Integration methods. Theory of stability. Theory of fluctuations: manual / I. M. Burkin, R. A. Melnikov. – Yelets: EGU named after I. A. Bunin, 2007. – 269 p.

2. Dvoryatkina S. N., Smirnov E. I. Assessment of the synergetic effects of knowledge and activity integration on the basis of computer modeling // Modern information technologies and IT education. – M. : MSU, 2016. – P. 35–42.

3. Krasnopolskaya A. P. Agonal dialogue and post-nonclassical education // Bulletin of MGUKI. – 2015. – № 4 (66). – P. 64–71.

4. The mathematical encyclopedic dictionary/ under the editorship of Yu.V. Prokhorov. – M. : Sovetskaya Entsyclopediya, 1988. – 845 p.

5. Milovanov V. P. Sinergy and self-organization: Economy. Biophysics: monograph / V. P. Milovanov. – M. : KomKniga, 2005. – 168 p.

6. Smirnov E. I. Stages of technological support of self-organization process in future teacher mathematical education // Yaroslavl pedagogical bulletin. – 2017. – № 3. – P. 102–111.

7. Smirnov E. I. Difficulty of tasks and synergy of mathematical education // Tasks in training in mathematics, physics and informatics: theory, experience and innovations: materials of the international scientific and practical conference devoted to P. A. Larichev's 125 anniversary. – Vologda, 2017. – P. 11–17.

8. Smirnov E. I. Sinergy of mathematical modeling in the solution of difficult tasks // Harmonious personal development problem in relation to specificity of modern education and socialization processes. Peer-reviewed materials digest (collective monograph) published following the results of the CXXXI International Research and Practice Conference and III stage of the Championship in Psychology and Educational sciences. – London: IASHE, 2016. – P. 22–26.

9. Stepin V. S. About philosophical bases of synergetics // Synergetics: The future of the world and Russia/under the editorship of G. G. Malinetsky. – M., 2008. – P. 17–23.

10. Haken H. (2004) Synergetics. Introduction and Advanced Topics – Springer, Berlin. – 758 p.

11. Smirnov E. I. Methodological Foundation of Synergy in Mathematical Education of the Teacher // International periodic scientific journal «SWorldJournal» Pedagogy, Psychology and Sociology, 2016. – № 11. – P. 23–28.