УДК 37

О. В. Симонова

Проблема «превращенных форм» и их использования в обучении математике

Слабым звеном современного школьного математического образования является его монологичность и стремление навязать учащимся нацеленность на почти дословное воспроизведение текстов учебников и образцов решения стандартных задач. Но математика как грань культуры богата тем, что содержит и несет в своих формах потенциал творчества. Одним из ростков такого потенциала являются смыслы, запечатленные в, казалось бы, заведомо застывших формах, и способность учащихся к их различным преобразованиям, что и может сделать для них математику подлинным носителем живого знания. Задача математического образования, следовательно, вскрывать для учащихся эти ростки и, по возможности, развивать у них способности оживлять эти, казалось бы, «превращенные» формы. Надо только обучать школьников и студентов такой деятельности.

Ключевые слова: порождение форм, превращенная форма, структура, продуктивная модель, механизмы познания, распредмечивание, смена приоритетов.

O. V. Simonova

The Problem of «Turned Forms» and Their Use in Mathematics Training

A weak link of modern school mathematical education is its monologicality and aspiration to impose to pupils aiming at almost literal reproduction of texts in textbooks and samples of the solution of standard sums. But the mathematics as a culture facet, is rich that it contains and has creativity potential in their forms. One of sprouts of such potential are meanings imprinted in, apparently, obviously stiffened forms and pupils' ability to their various transformations, and that can make for them mathematics the original carrier of Live Knowledge. The goal of mathematical education, therefore, is to reveal these sprouts for pupils and, whenever possible, to develop their abilities to recover these, apparently, «turned» forms. It is only necessary to train school students and students to this activity.

Keywords: generation of forms, the turned form, structure, productive model, knowledge mechanisms, desobjectivation, change of priorities.

Термин «превращенная форма» был впервые введен и использован К. Марксом для исследования «строения и способа функционирования сложных систем связей» («органических» систем) [6, с. 269]. Цель использования – выявление «видимых зависимостей и парадоксальных эффектов», которые предстают сознанию человека и воспринимаются им как объективно, независимо от него существующие, но на самом деле замещающие те связи, которые им по каким-то причинам не были уловлены в процессе исследования [7, т. 26, Т. III, с. 507]. Несколько упрощая, скажем, что человек, познавая некоторый системный объект, строит для него также модель-систему, но по каким-то причинам, не умея или не желая выделить в объекте реально существующие системные связи, заменяет их кажущимися ему зависимостями. Так объективно и по необходимости образуется и бытует в сознании субъекта «превращенная форма», побуждая его к какой-то деятельности, не всегда адекватной изначально в ней запечатленной.

Приведем простейший пример. Довольно широко распространен ритуал: «Присядем на дорожку…». Спрашиваю: «Зачем?» – «Не знаю, так принято…» – «Кем? Зачем?» Ответом будет либо недоуменный взгляд, либо: «Чтобы все гладко прошло, чтобы ничего не случилось...». Мистика, которую нетрудно объяснить. Правдоподобна гипотеза: наши давние предки, отправляясь в дальнюю дорогу, присаживались, чтобы *еще раз подумать*: «Все ли нужное я взял с собой? Все ли наказы дал домашним? Хороший ли я выбрал путь?» В современных условиях быстротекущей жизни и наличия средств коммуникации деятельность по обдумыванию вариантов отъезда, пути, средств и т. п., так необходимая нашим предкам, оказалась замененной *формой*, ритуалом «для порядка». Заметим, однако, что и эта форма *содержит в себе деятельность.*

Спрашивается, какое отношение имеет сказанное к обучению математике в современных условиях? На наш взгляд, самое непосредственное. Приведем два примера и рассуждения по их поводу.

Известно, что в Древней Греции понятия «аксиома» и «постулат» значительно различались между собой. У **Аристотеля** читаем: «…всякая доказывающая наука имеет дело с тремя ⟨сторонами⟩: то, что принимается как существующее, именно род, свойства которого, присущие ему сами по себе, рассматривает наука, и общие ⟨положения⟩, называемые аксиомами, из которых, как из первичного, ведется доказательство… Постулат же есть нечто *противное* мнению учащегося или такое, что, будучи ⟨возможно⟩ доказуемым, принимается и применяется недоказанным» [1].

Сказанное можно понять так: *постулат есть задача для хорошего ученика.* Она может побудить его к деятельности, аксиома – признанное и принятое всеми положение, «удостоенное» быть таковым (в точном переводе с древнегреческого – αξιωμα). Для сравнения приведем еще мнение современных историков математики: «Аксиомы – это такие очевидные вещи, которые, по словам Аристотеля, “*необходимо иметь каждому, кто будет что-то изучать”*. Постулат – это лишь принцип, который геометр предлагает своему собеседнику принять, но не являющийся ни “очевидным”, ни “аксиоматическим”. Его можно опровергнуть, не приходя к противоречию… постулаты интерпретировались как простые “гипотезы”…» [3, с. 75].

Нетрудно понять, что с рассматриваемых в статье позиций отождествление в современной, особенно школьной, математике аксиомы и постулата фактически превратило эти термины в своеобразную превращенную форму, которая осознанно и законно используется учеными-математиками в границах математической теории. В то же время в этой форме естественно оказался утерянным (лучше сказать – скрытым) *общекультурный* смысл исходных понятий: история и логика процесса их осмысления. Вместе с тем для ученика именно этот смысл является наиболее важным. Отказываясь в обучении от различения этих терминов и следуя их отождествлению, знакомя учащегося только с одним вариантом какой-либо аксиомы (и не только!), мы с самого начала спешим. Тем самым лишаем ученика *удовольствия подумать*: ***не*** побуждаем его к *сомнению* в истинности утверждения или к поиску других его формулировок, а потому не даем ему возможности стать «хорошим учеником» [6]. Сказанное относится не только к аксиомам и постулатам, но и к определениям понятий, формулировкам теорем, а также к стандартным формам предъявления учащимся типовых формул, задач.

В известных учебниках по алгебре и началам анализа, а также в вузовских учебниках и в практике обучения материал по дифференцированию и интегрированию функций чаще всего излагается в известной устоявшейся последовательности. А именно: геометрическая и физическая задачи, приводящие к понятию производной, ее определение и вычисление в простейших случаях, ее свойства и т. д., далее таблица производных и их применения. Затем – отдельной главой (почему?) – понятия первообразной, интеграла, их свойства и приложения [2].

Кажется, на первый взгляд, что в этом случае авторами учебников и опытными преподавателями все предусмотрено: подготавливается и раскрывается смысл основных понятий, дается база задач на «отработку» алгоритма, правил вычисления и применения производных и интеграла и т. д. Однако, как показывают наблюдения, для очень многих студентов (и школьников) центральные понятия темы также оказываются лишь «превращенными формами». Причина видится в том, что обучение сводится к *разъяснению и запоминанию* того, что известно науке, в результате чего и студенты, и школьники в силу разных причин *выпадают* из процесса познания, ограничиваясь лишь усвоением готовых сведений и известных действий. Тем самым они – опять же – лишаются *удовольствия подумать*, возможности участвовать в интеллектуальном труде *порождения* понятий как «продуктивных моделей» [7, с. 83] фрагментов действительности.

Процесс порождения понятия как продуктивной модели решения ряда задач, как они появлялись в истории развития человеческой мысли, в условиях обучения можно смоделировать в серии учебных задач [2, 7]. Однако на это, как правило, не хватает учебного времени, да и учебная программа этого, к сожалению, не требует – ни в школе, ни в вузе. В качестве конечной цели задается, как правило, *усвоение* (а не выстраивание!) определений понятий, формул и приемов их применения к решению стандартных (типовых) задач и т. п. Но достижение такой цели как раз и подталкивает учащегося лишь к запоминанию и простому воспроизведению их превращенной и *застывшей* формы вместо *воспроизводства* [6, 8] «живого» знания (определения, формулы и т. п.) или действия. Недостающие в ней связи и *познавательные действия*, не проявленные для ученика, необходимо им замещаются какими-то другими, часто искусственными, не отражающими особенностей и всех закономерностей возникновения понятий как продуктивных моделей. Подобные связи и действия, замещающие действительно существующие, иногда придумываются самим учеником, редко подсказываются и разъясняются, а чаще навязываются (*так принято*!) учебной литературой или учителем.

Сказанное намечает *одну сторону* проблемы превращенных форм в обучении. Один из путей разрешения – «распредмечивание» исторически ранее осуществленного или ранее открытого процесса познания и его логики в учебных задачах с последующим их решением с учащимися. В этом случае есть надежда, что они с достаточной полнотой освоят данное понятие, так как постигнут эту логику, основные средства и методы деятельности, приводящие к его возникновению в научном познании. Однако этот процесс трудоемкий, затратный по времени и направлен в основном на овладение математикой как методом и культурным началом любой области научных знаний, и уже потому может быть реализован разве лишь в особых условиях. Но и здесь не обойтись без превращенных форм, так что их возникновение и использование в учебном процессе – *неустранимая неизбежность*. И этому полезно учить и учиться [6].

Здесь и выявляется *вторая сторона* рассматриваемой проблемы. Ее можно сформулировать так: «На что преимущественно нужно *направить* и как грамотно организовать процесс обучения математике, если признать, что в образовательном пространстве превращенные формы необходимо существуют?» Или еще определеннее: «Как организовать познание этих форм с тем, чтобы они в результате обучения, во-первых, стали продуктивными моделями *деятельности*, а во-вторых, способствовали бы приобщению учеников к математике, впитыванию ее в себя как особой и – мы убеждены! – *необходимой* каждому человеку грани культуры, а не убеганию от нее?»

Над этими вопросами давно задумывались известнейшие математики и методисты. Так, французский математик XIX–XX вв. **А. Пуанкаре** писал: «Логика... не говорит, какой путь ведет к цели. Для этого необходимо *видеть цель* <как бы> *издалека*, а интуиция есть та способность, которая этому нас учит... Благодаря ей мир математических образов остается в соприкосновении с реальным миром...» [10, с. 464–465]. Цель обучения при этом должна быть задана в явном виде не только для учителя, но и – в соответствующей формулировке – для учащихся. И этого можно достичь через серию задач, моделирующих логику деятельности познания, в большинстве случаев *диалектическую* [15]. Математик-методист Г. Фройденталь говорит более решительно: «Ныне мы требуем, чтобы школьник изучал истинное возникновение математики – создавал ее заново...» [11, ч. I, с. 53]. Позицию, более приближенную к реалиям школьной жизни, занимает известный педагог А. И. Хуторской [12]. В этом же ключе выстроена и частично апробирована концепция **мировоззренчески направленного обучения математике** [5], многие положения и рекомендации которой еще ждут своего исследователя.

В самом деле, выявление с учащимися источников возникновения математических объектов (*субъекты познавательной деятельности*; *группы задач* с практическим содержанием; *математические свойства* познаваемых объектов и *используемые для этого средства* и др.), включение их в процесс моделирования предметов окружающего мира и объектов других наук, конструирование с учащимися «новых» математических объектов и другие виды работы, – все это формирует у них, помимо математического реализма [6], еще и элементы диалектического мышления. Проблема состоит в том, чтобы находить, а затем и на практике создавать *условия и формы учебной работы*, последовательно и целенаправленно ведущие к формированию элементов диалектического мышления учащихся. Для правильного ответа на этот вопрос обратимся к сути диалектики: известно, что она отражает всеобщую связь и развитие [14, 15]. Когда при этом в науке говорят об *источнике развития*, то имеют в виду *противоречие*, то есть наличие, единство и противоборство противоположных сторон. *Выделять, подчеркивать, раскрывать механизм взаимодействия противоположных сторон, включать учащихся в осознание действия этого механизма и в посильное разрешение противоречий*, частным случаем которого является противоречие между научным понятием и его превращенной формой… В этом, на наш взгляд, тот *путь*, который приведет к усилению направленности отмеченных выше видов учебной работы на формирование и развитие мышления учащихся.

Заметим, что становление элементов диалектики в сознании учащихся и приобщение к их использованию как инструментов познания – это процесс. Поэтому *овладение любым из ее элементов не может быть осуществлено сразу, целиком и до конца*, то есть овладение деятельностью – процесс бесконечный, и формирование элементов диалектического мышления учащихся должно пройти определенные этапы. Далее приведем два примера задач.

Задача 1 (*выявление структуры математического выражения*) [7].

Вычислить с точностью до 0,001 значение выражения:

$$\frac{\sqrt{1{,}001}+1}{1{,}001\sqrt{1{,}001}+1{,}001+\sqrt{1{,}001}}:\frac{1}{(1{,}001)^2-\sqrt{1{,}001}}.$$

Как правило, современные учащиеся (как и студенты) начинают считать с помощью калькулятора, то есть действовать «в лоб», что занимает довольно много времени и часто приводит к ошибкам, в частности из-за неумения делать прикидку и округлять промежуточные результаты. По истечение некоторого времени целесообразно предложить учащимся *второй* пример:

$$\frac{\sqrt{0{,}002}+1}{0{,}002\sqrt{0{,}002}+0{,}002+\sqrt{0{,}002}}:\frac{1}{(0{,}002)^2-\sqrt{0{,}002}}$$

и направить их размышления (!)[1] на сравнение *форм* двух примеров. Используем букву *a* (!) для обозначения «элемента», общего в каждом из выражений: $\dfrac{\sqrt{a}+1}{a\sqrt{a}+a+\sqrt{a}}:\dfrac{1}{(a)^2-\sqrt{a}}$ (*). Это и есть общая форма как *алгебраическая модель* числового выражения. При этом подмечается, что при всем различии «элементов» структура этих форм одна и та же и ее можно упростить. Этим и определяется *мотив* использования алгебраических преобразований, например в 7 классе, вместо арифметических вычислений, причем задача «упрощения алгебраической формы» оказывается подзадачей арифметической исходной задачи. Но можно пойти и дальше!

Следующий шаг (!): еще раз подмечаем, что в (*) общим элементом является выражение $\sqrt{a}$, и если его заменить, например, на A, то оно превращается в *рациональное* выражение, и после небольших преобразований получаем A^2–1. Но тогда (*) из этой «застывшей» формы *побуждает* к действию, что при ее *распредмечивании* (!) приводит к тождественно равной форме – выражению: $a - 1$. Полезно вернуться к арифметическим примерам, тогда остается вместо a подставить в первом случае 1,001 и получить 0,001, а во втором – 0,002 и получить значение -0,998. Задача решена полностью, однако в процессе ее решения неоднократно был применен один и тот же *диалектический переход*: от конкретного – к абстрактному, от единичного – к общему и обратно. Благодаря всему этому появилось такое понимание: с алгебраическими формами работать предпочтительнее и проще в сравнении с арифметическими.

Следующий пример демонстрирует еще один диалектический переход в процессе познания: *смену приоритетов в рассмотрении элементов (компонентов) и в целом структуры математического объекта*.

Задача 2 (*смена приоритетов*) [4]. Требуется решить уравнение с параметром (**) $x+\sqrt{a+\sqrt{x}}=a$. Это иррациональное уравнение, и обычный способ решения (уединение радикала, возведение в квадрат и т. д.) приводит к довольно сложному уравнению четвертой степени. На первый взгляд этот путь кажется тупиковым, но это не так, если, *сменив приоритеты*, все-таки воспользоваться той же идеей. А именно: введем в (**) *новую переменную* (!): $y=\sqrt{a+\sqrt{x}}\ge 0$, перенесем ее в правую часть и возведем обе части уравнения в квадрат. В результате несложных преобразований получим ***рациональное*** уравнение, содержащее *две* переменные: $y^4 - 2ay^2 + y + a^2 - a = 0$. Так как в левой части обе переменные можно рассматривать как *равноправные* (это еще один *диалектический ход* в рамках решения данной задачи!), то равенство можно трактовать как квадратное уравнение *относительно* переменной a (!):

$$a^2 - a(2y^2 + 1) + (y^4 + y) = 0.$$

Далее используется обычный для квадратного уравнения путь: находят дискриминант $D = (2y - 1)^2 \ge 0$, получают выражения для корней: $a_1 = y^2 + y$; $a_2 = y^2 - y + 1$, что позволяет разложить многочлен на множители:

$$(a - y^2 - y)\,(a - y^2 + y - 1) = 0.$$

Еще раз применяем тот же *прием* смены ролей неизвестного и параметра и получаем уравнение в «нормальном» виде (положительная роль *формы* – !): $(y^2 + y - a)\,(y^2 - y - a + 1) = 0$. Остается найти неотрицательные корни двух квадратных уравнений, а затем перейти к исходному неизвестному x. Конечно, это тоже представляет определенные трудности, но к используемой идее диалектического перехода это уже не относится. Предоставляем читателю самостоятельно закончить решение.

Задача 3. Решить уравнение $y^4 - 8y^2 + y + 12 = 0$.

Первая попытка: **идея** – разложить на множители. Это возможно, если (!) число 12 представить как разность 16–4, затем «увидеть» полный квадрат $(y^2 - 4)^2$ и представить уравнение в виде $(y^2 - 4)^2 + (y - 4) = 0 \Leftrightarrow (y - 4)\cdot((y^2–4)(y + 4) + 1) = 0$. Казалось бы, один из корней найден, но $y = 4$ не обращает левую часть в ноль (!). Прямая попытка не удалась, то есть не привела к решению уравнения. В то же время, можно заметить интересное: левую часть можно представить в виде (!): $y^4 - 2y^2\cdot 4 + 4^2 + y - 4 = 0 \Leftrightarrow 4^2 - (2y^2\cdot + 1)\cdot 4 + y + y^4 = 0$ (***). Тогда последнее уравнение можно «прочитать» (!) как квадратное уравнение относительно числа 4 (!!).

Вторая попытка: **вторая идея** – та же, что и в предыдущей задаче*: «придадим» новый смысл числу* 4*, опираясь лишь на **форму** записи* левой части относительно этого числа, и «*прочитаем*» его как «*новое*» неизвестное u в последнем уравнении, а затем решим «уравнение» относительно этого неизвестного, считая все остальное известным. Получим: $u_{1,2} = \ldots = (2y^2 + 1 \pm |2y - 1|):2$. В результате получим только два значения: $u_1 = y^2 + y$; $u_2 = y^2 - y + 1$. (Почему так? Ведь кажется, что надо раскрывать модуль?) Вспоминая, что $u = 4$, получим следующее разложение левой части (***) на множители: $(4 - y^2 - y)(4 - y^2 + y - 1) = 0$. Далее приходим к обычным квадратным уравнениям относительно неизвестной y и соответствующие четыре значения корня исходного уравнения:

$$y_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2};\, y_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}.$$

Оба корня подходят [14]. Вывод: *изменение*, по сути дела, только *формы и смысла символов* помогло решить уравнение.

Библиографический список

1. Аристотель. Аналитики первая и вторая [Текст] / Аристотель ; пер. с греч. – Л. : Госполитиздат, 1952. – 352с.

2. Виленкин, Н. Я., Мордкович, А. Г., Смышляев, В. К. Алгебра и начала анализа [Текст] / Н. Я. Виленкин, А. Г. Мордкович, В. К. Смышляев // Пробный учебник для 9–10 кл. сред. школы. Материалы для ознакомления. – М. : Просвещение, 1981. – 383 с.

3. Даан-Дальмедико, А., Пейффер, Ж. Пути и лабиринты. Очерки по истории математики [Текст] / А. Даан-Дальмедико, Ж. Пейффер ; пер. с франц. – М. : Мир, 1986.

4. Дорофеев, Г. В. Квадратный трехчлен в задачах [Текст] / Г. В. Дорофеев // Квантор. – 1991. – № 2. – 97 с.

5. Жохов, А. Л. Формирование начал научного мировоззрения школьников при обучении математике [Текст] : учебное пособие / А. Л. Жохов. – Ярославль : ЯГПУ, 2011. – 212 с.

6. Жохов, А. Л. Становление и развитие мировоззрения индивида образованием и культурой : монография [Текст] / А. Л. Жохов. – Saarbrücken, Germany: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2014. – 404 с.

7. Когаловский, С. Р. Поиски метода и методы поиска (онтогенетический подход к обучению математике) [Текст] : монография / С. Р. Когаловский. – Шуя : ШПГУ, 2006. – Часть I. – 201 с.

8. Мамардашвили, М. К. Как я понимаю философию [Текст]. – 2-е изд., изменен. и дополн. / М. К. Мамардашвили / сост. и общ. ред. Ю. П. Сенокосова. – М. : Прогресс; «Культура», 1992. – 416 с.

9. Маркс, К. Капитал [Текст] / Карл Маркс, Фридрих Энгельс. – Сочинения. – Т. 23–26. – Ч. 1–3.

10. Пуанкаре, Анри. О науке [Текст] / Анри Пуанкаре ; пер. с франц. / под ред. Л. С. Понтрягина. – 2-е изд., стер. – М. : Наука, 1990. – 736 с.

11. Фройденталь, Х. Математика как педагогическая задача [Текст] / перев. с англ. под ред. Н. Я. Виленкина : в 2-х ч. / Х. Фройденталь. – М. : Просвещение, 1982, 1983.

12. Хуторской, А. В. Развитие одаренности школьников: Методика продуктивного обучения [Текст] / А. В. Хуторской : пособие для учителя. – М. : ВЛАДОС, 2000. – 320 с.

13. Юшкевич А. П. Математика в ее истории [Текст] / А. П. Юшкевич. – М. : Янус, 1996. – 413 с.

14. Философский энциклопедический словарь [Текст]. – М.,1989.

15. Шубинский В. С. Формирование диалектического мышления у школьников [Текст] / В. С. Шубинский. – М. : Знание, 1979. – 48 с.

Bibliograficheskij spisok

1. Aristotel'. Analitiki pervaja i vtoraja. Per. s grech [Tekst] / Aristotel'. – L. : Gospolitizdat, 1952. – 352s.

2. Vilenkin, N. Ja., Mordkovich, A. G., Smyshljaev, V. K. Algebra i nachala analiza [Tekst] / N. Ja. Vilenkin, A. G. Mordkovich, V. K. Smyshljaev // Probnyj uchebnik dlja 9–10 kl. sred. shkoly. Materialy dlja oznakomlenija. – M. : Prosveshhenie, 1981. – 383 s.

3. Daan-Dal'mediko, A., Pejffer, Zh. Puti i labirinty. Ocherki po istorii matematiki [Tekst] / A. Daan-Dal'mediko, Zh. Pejffer ; per. s franc. – M. : Mir, 1986.

4. Dorofeev, G. V. Kvadratnyj trehchlen v zadachah [Tekst] / G. V. Dorofeev // Kvantor. – 1991. – № 2. – 97 s.

5. Zhohov, A. L. Formirovanie nachal nauchnogo mirovozzrenija shkol'nikov pri obuchenii matematike [Tekst] : uchebnoe posobie / A. L. Zhohov. – Jaroslavl' : JaGPU, 2011. – 212 s.

6. Zhohov, A. L. Stanovlenie i razvitie mirovozzrenija individa obrazovaniem i kul'turoj : monografija [Tekst] / A. L. Zhohov. – Saarbrücken, Germany: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2014. – 404 s.

7. Kogalovskij, S. R. Poiski metoda i metody poiska (ontogeneticheskij podhod k obucheniju matematike) [Tekst] : monografija / S. R. Kogalovskij. – Shuja : ShPGU, 2006. – Chast' I. – 201 s.

8. Mamardashvili, M. K. Kak ja ponimaju filosofiju [Tekst]. – 2-e izd., izmenen. i dopoln. / M. K. Mamardashvili / sost. i obshh. red. Ju. P. Senokosova. – M. : Progress; «Kul'tura», 1992. – 416 s.

9. Marks, K. Kapital [Tekst] / Karl Marks, Fridrih Jengel's. – Sochinenija. – T. 23–26. – Ch. 1–3.

10. Puankare, Anri. O nauke [Tekst] / Anri Puankare ; per. s franc. / pod red. L. S. Pontrjagina. – 2-e izd., ster. – M. : Nauka, 1990. – 736 s.

11. Frojdental', H. Matematika kak pedagogicheskaja zadacha [Tekst] / perev. s angl. pod red. N. Ja. Vilenkina : v 2-h ch. / H. Frojdental'. – M. : Prosveshhenie, 1982, 1983.

12. Hutorskoj, A. V. Razvitie odarennosti shkol'nikov: Metodika produktivnogo obuchenija [Tekst] / A. V. Hutorskoj : posobie dlja uchitelja. – M. : VLADOS, 2000. – 320 s.

13. Jushkevich A. P. Matematika v ee istorii [Tekst] / A. P. Jushkevich. – M. : Janus, 1996. – 413 s.

14. Filosofskij jenciklopedicheskij slovar' [Tekst]. – M.,1989.

15. Shubinskij V. S. Formirovanie dialekticheskogo myshlenija u shkol'nikov [Tekst] / V. S. Shubinskij. – M. : Znanie, 1979. – 48 s.

Reference List

1. Aristotle. First and second analytics. Translated from Greek. – L. : Gospolitizdat, 1952. – 352 p.

2. Vilenkin N. Ya., Mordkovich A. G., Smyshlyaev V. K. Algebra and the beginnings of the analysis // the pilot textbook for 9–10 classes of secondary schools. Materials for introduction. – M. : Obrazovanie, 1981. – 383 p.

3. Daan-Dalmediko A., Peiffer Zh. Ways and labyrinths. Essays on mathematics history; translated from French. – M. : Mir, 1986.

4. Dorofeev G. V. A square trinomial in tasks // Kvantor. – 1991. – № 2. – 97 p.

5. Zhokhov A. L. Formation of the beginnings of school students' scientific outlook when training in mathematics: manual / A. L. Zhokhov. – Yaroslavl : YSPU, 2011. – 212 p.

6. Zhokhov A. L. Formation and development of outlook of the individual by education and culture: monograph. – Saarbrücken, Germany: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2014. – 404 p.

7. Kogalovsky S. R. Search of a method and methods of search (ontogeneticy approach to training in mathematics): monograph. – Shuya: ShPSU, 2006. – Part I. – 201 p.

8. Mamardashvili M. K. As I understand philosophy. – 2nd edition, corrected and added / author and general edition of Yu. P. Senokosov. – M. : Progress; «Kultura», 1992. – 416 p.

9. Marx K. Capital. – Compositions. – V. 23–26. – P. 1–3.

10. Poincare Henri. About science; translated from French / under the editorship of L. S. Pontryagin. – 2nd edition. – M. : Nauka, 1990. – 736 p.

11. Froydental H. Mathematics as pedagogical task/ translated from English under the editorship of N. Ya. Vilenkin: in 2 parts. – M. : Obrazovanie, 1982, 1983.

12. Khutorskoy A. V. Development of school students' endowments: Technique of productive training: a manual for the teacher. – M. : VLADOS, 2000. – 320 p.

13. Yushkevich A. P. Mathematics in its history. – M. : Yanus, 1996. – 413 p.

14. Philosophical encyclopedic dictionary. – M.,1989.

15. Shubinsky V. S. Formation of school students' dialectic thinking. – M. : Znanie, 1979. – 48 p.

---

[1] Знаком (!) в тексте отмечаются необходимые остановки внимания и, одновременно, возможные моменты «примысливания» (Р. Декарт): пополнения «старых», зарождения в процессе перекодирования, в том числе материализации, новых умственных образов или их форм предъявления. А также нового их понимания и содержания – при целесообразном изменении использованных средств, при переходах от одной формы к другой, при сравнении результатов познания разными средствами, при использовании разных методов и т. п. [4].