УДК 37

Т. Н. Матыцина, Н. Л. Марголина, К. Е. Ширяев

К вопросу о соотношении общего и специального при обучении математике: диофантовы уравнения

Статья посвящена анализу соотношения в образовательной деятельности специальных и общих дисциплин. Рассмотрены плюсы и минусы преподавания специальных курсов на различных уровнях образования. На примере диофантовых уравнений подтверждается тезис о том, что в школьный курс математики целесообразно включать те специальные дисциплины, которые не только расширяют кругозор учащегося, но и способствуют развитию логического мышления и научной интуиции. В статье приведена классификация диофантовых уравнений, полезных школьникам, и примеры их решений различными методами.

Ключевые слова: образовательный стандарт, интеграционные связи, интуиция, диофантовы уравнения, метод спуска.

T. N. Matytsina, N. L. Margolina, K. E. Shiryaev

On The Question Of The Relation Of The General And Special At The Training Of Mathematics: Diofantov Equations

This work is devoted to the analysis of the correlation in the educational activity of special and general disciplines. The pros and cons of teaching special courses at different levels of education are considered. On the example of Diophantine equations, the thesis is confirmed that it is appropriate to include in the school course of mathematics those special disciplines that not only broaden the outlook of the student, but also contribute to the development of logical thinking and scientific intuition. The article gives a classification of Diophantine equations useful to schoolchildren, and gives examples of their solutions by various methods.

Keywords: educational standard, integration links, intuition, Diophantine equations, descent method.

Одной из целей математического образования, нашедшей отражение в федеральном компоненте государственного стандарта по математике, является интеллектуальное развитие учащихся. Эта цель выходит на одно из ведущих мест при изучении математики на повышенном уровне. Поэтому в современных условиях значительно повышается необходимость создания оптимальной системы интегративного содержания образования и процесса обучения. Интеграция является сегодня одной из определяющих тенденций познавательного процесса. В связи с этим возникает масса различных проблем. Не последней из них является и вопрос о соотношении узкого, специального и общего, широкого спектров образования на том или ином уровне преподавания некоторой дисциплины. Причем вопрос этот актуален не только в применении к образованию школьному, но и в куда более широком смысле – к образованию вообще.

На дилетантский взгляд, все совершенно ясно. Есть образовательные стандарты, есть часы, выделенные на ту или иную дисциплину – кажется, чего проще, учи да радуйся. И тут находит коса на камень. Масса дисциплин, необходимость которых общепонятна, оказывается никак не связанной воедино. Вместо владения целостным (хотя и мозаичным) материалом, необходимым для будущей деятельности, обучающийся получает некий набор узкоспециальной информации из различных областей. Сведение же этой информации в единую гармоничную картину если и не невозможно, то достаточно трудно. Разумеется, будущая практическая деятельность расставит все на свои места, но приобретенный опыт – это, увы, потерянное время.

Описанная ситуация возникает не только в связи с радикально различными дисциплинами (скажем, неискушенному человеку сложно подметить общее между физикой и филологией), но и внутри одной дисциплины.

Авторы данной статьи являются математиками, поэтому они могут с уверенностью утверждать, что математика сегодня отнюдь не монолитна и включает целый ряд непохожих друг на друга узкоспециальных областей. (Для подтверждения этого тезиса можно сравнить, например, работы из области качественной теории дифференциальных уравнений [6, 9] с работами, относящимися к алгебраической геометрии [10, 11]. А скажем, статья, связанная с математической статистикой [8], совершенно не похожа на статьи по теории функций и функциональному анализу [14]. Словом, разница существенная.)

Возникает совершенно естественный вопрос: стоит ли тратить время на преподавание целого ряда разных «тяжелых» математических дисциплин, чтобы, связавшись в дальнейшем лишь с одной из них, благополучно забыть остальные? Может, лучше дать некую «основу» и пустить учащегося в «свободное плавание», сосредоточив все сэкономленное время на одном главном направлении?

Разумеется, однозначного ответа на этот вопрос нет. Заметим, что на уровне аспирантуры по такой схеме и строится образование – большая часть сил и времени уходит на специальное обучение в узкой области. Но аспирантура – это, в идеале, последний заключительный этап высшего образования, призванный сформировать ученого, авторитетного в конкретной узкой области науки, или будущего преподавателя вуза, или оптимально – и того, и другого в одном лице. (Более подробно о целях и задачах аспирантуры см. [12].)

В условиях магистратуры и бакалавриата «разброс» дисциплин оказывается более широким. Связано это с тем, что эти уровни высшего образования более «обучающие» и менее «творческие». Конечно, разговор о соотношении обучения и творчества на всех уровнях обучения (кажется, начиная с младенческого) актуален [5, 7, 15], но именно у бакалавров и у магистров должен быть сформирован некий общематематический взгляд. И выработке его немало способствует взаимное дополнение и обогащение различных дисциплин. Причем взгляд этот проникает в тем большую глубину, чем более широк кругозор смотрящего. И именно формирование такого проницательного взгляда и является, по сути дела, целью высшего математического образования.

На уровне школьном, безусловно, «общность» перевешивает «специфику». Вряд ли разумно преподавать школьникам теорию групп или обобщенных функций. А учитывая дефицит времени, отведенного на математические дисциплины в школе, и подготовку к итоговой государственной аттестации, можно только горестно вздохнуть.

И тем не менее существует ряд факультативных и элективных курсов, знакомящих школьников с теми или иными специальными математическими дисциплинами, да и в рамках стандартной программы нет-нет да и промелькнет «серьезный» математический термин. И опять преподаватель сталкивается с дилеммой «глубины» – насколько глубоко давать учащемуся тот или иной факт (теорему, определение и т. д.). Естественно, многое определяет уровень учащегося; зачастую некоторые факты нельзя полноценно сообщить, исходя из этого уровня. Так, что же, доставить информацию так, чтобы в вузе потом пришлось переучивать? Или деликатно обойти непонятные категории? Каждый учитель даст собственный ответ на эти вопросы.

При этом упускается один аспект. Часто школьника «загружают» информацией, которая, хотя и дает алгоритм решения неких задач, но не несет никакого «общематематического» образовательного смысла.

Примером могут служить некоторые (далеко не все) олимпиадные задачи, требующие не столько культуры математического мышления (выявлению этого качества и должны, на взгляд авторов статьи, служить олимпиадные задачи), а знания специфической методики решения, то есть, по сути, простой эрудиции. (Заметим в скобках, что именно знание «заковыристого» метода решения своеобразных задач зачастую создает у учащегося не только чрезмерно высокое мнение о собственном «математическом величии», но и презрение к «скучным стандартным» задачам. Следствием этого может стать даже потеря интереса к обучению математике, состоящей, в большинстве, из сухой строгой информации.)

Так, может, все же ну их, эти специальные методы, и стоит ограничиться лишь неким необходимым «минимумом»? Некоторые соображения по этому поводу изложены в работах [13, 15].

Истина, как это часто бывает, избегает крайностей. Разумеется, необходимо развивать математическую эрудицию, кругозор обучающегося. При этом оптимально использовать новые типы задач не только для пополнения знаний, но и для развития культуры мышления и, не в последнюю очередь, математической интуиции.

В процессе такого обучения неизбежно возникают как межобластные (внутриматематические), так и междисциплинарные связи, объединяющие массу разнородной информации в стройную систему. Такие связи называются интеграционными.

Одним из средств реализации интеграционных связей математического образования является использование историко-математических сведений в учебном процессе. В частности, решение старинных задач в формулировке первоисточников, изучение истории их решения, сравнение различных методов решения подобных задач позволяют достичь указанных целей. В связи с вышеизложенным, тема «Диофантовы уравнения», то есть уравнения в целых и рациональных числах, является одной из актуальных в современном отечественном математическом образовании. Особенно важным является то, что в последнее время диофантовы уравнения различного вида стали одним из источников формирования базы задач с развернутым ответом итогового экзамена по математике Российской Федерации [1, 2, 3, 4]. Поскольку одним из основных отличий данной задачи с развернутым ответом от остальных задач экзамена по математике является ее явно выраженный нестандартный характер, а сведения, необходимые для решения этой задачи, могут относиться к самым различным разделам школьного курса, построение решения может потребовать нетривиальных идей и методов, поскольку смыслом включения данной задачи в состав контрольно-измерительных материалов является именно диагностика уровня интеллектуального развития учащихся. Недаром данная проблематика берет свои истоки с самого зарождения математики.

Диофантовыми уравнениями называют алгебраические уравнения или системы алгебраических уравнений с целыми коэффициентами, для которых надо найти целые или рациональные решения. При этом число неизвестных в уравнениях должно быть не менее двух (если не ограничиваться только целыми числами). Диофантовы уравнения имеют, как правило, много решений, поэтому ихтакже называют неопределенными уравнениями.

Также индусские математики примерно с V в. н. э. рассматривали неопределенные уравнения первой степени. Некоторые такие уравнения с двумя и тремя неизвестными появились в связи с проблемами, возникшими в астрономии, например, при рассмотрении вопросов, связанных с определением периодического повторения небесных явлений. Первое общее решение уравнения $ax + by = c$, где a, b, c – целые числа, встречается у индийского мудреца Брахмагупты (около 625 г.). В Новое время в 1624 г. вышла книга французского математика Баше де Мезирьяка «Problemes plaisanset delectables quesefontparles nombres». Автор для решения уравнения $ax + by = c$ применил процесс, сводящийся к последовательному вычислению неполных частных и рассмотрению подходящих дробей. В XVII и XVIII вв. различные правила для решения неопределенного уравнения первой степени с двумя неизвестными давали такие светила, как Ролль, Эйлер, Саундерсон и множество других математиков.

Лагранжем к решению таких уравнений были применены цепные дроби. Неопределенные уравнения первой степени стали записывать и решать в форме сравнения значительно позже, начиная с Гаусса.

Одним из ярких представителей класса диофантовых уравнений второй степени является уравнение Пелля (его еще называют неопределенным уравнением Ферма), то есть уравнение $x^2 + ay^2 = 1$, где a – целое положительное число, не являющееся полным квадратом. Первые упоминания об уравнении Пелля были найдены в работах математиков Древней Греции и Древней Индии. Общий способ решения уравнения – так называемый «циклический метод» – присутствует в работах индийского математика XII в. Брахмагупты, впрочем, без доказательства, что этот метод корректен (всегда приводит к решению). Современное же название уравнения Пелля возникло благодаря Л. Эйлеру, ошибочно приписавшему их авторство Джону Пеллю – английскому математику, который этим уравнением никогда не занимался.

В общем виде задачу сформулировал французский математик Пьер Ферма, поэтому во Франции данное уравнение называется «уравнением Ферма». Именно Ферма (1601–1665) сформулировал в 1630 г. гипотезу, которую называют великой (или большой) теоремой Ферма: «Уравнение $x^n + y^n = z^n$ для натурального $n \geq 3$ не имеет решений в натуральных числах». Ферма не доказал свою теорему в общем случае, но известна его запись на полях «Арифметики» Диофанта: «...невозможно куб записать в виде суммы двух кубов, или четную степень в виде суммы таких же степеней, или вообще любое число, которое является степенью большей, чем вторая, нельзя записать в виде суммы двух таких же степеней. У меня есть поистине удивительное доказательство этого утверждения, но поля эти слишком узки, чтобы его уместить». Позднее в бумагах Ферма было найдено доказательство его теоремы для $n = 4$. С тех пор более 300 лет математики пытались доказать великую теорему Ферма. В 1770 г. Л. Эйлер доказал теорему Ферма для $n = 3$; в 1825 г. Лежандр (1752–1833) и Дирихле (1805–1859) – для $n = 5$. Доказательство великой теоремы Ферма в общем случае не удавалось долгие годы. И только в 1995 г. Эндрю Уайлс доказал эту теорему.

Диофантовы уравнения в школьном курсе математики практически не изучаются, но эти уравнения встречаются в качестве задач на итоговом экзамене по математике и на олимпиадах. Именно поэтому целесообразно по данному направлению проводить различные факультативы и элективные курсы.

В базовом школьном курсе при изучении линейного уравнения с двумя переменными рассматриваются только самые общие вопросы: определение линейного уравнения с двумя переменными, определение решения данного уравнения, равносильность уравнений с двумя переменными, график линейного уравнения. Вопрос о нахождении целых (натуральных) решений линейного уравнения с двумя переменными, о возможных методах его решения остается за рамками школьного учебника. Однако многие практические задачи сводятся к решению линейного уравнения с двумя переменными, эти задачи часто встречаются в вариантах математических олимпиад, конкурсах по решению задач. Знание общих методов решения таких уравнений, названных в математике диофантовыми, существенно расширяет математический кругозор учащихся, развивает математическую интуицию, способствует повышению интереса к математике и, как следствие, ориентирует их на выбор математического (естественно-научного) профиля в старших классах средней школы.

Диофантовы уравнения отличаются от других уравнений тем, что в этих уравнениях присутствуют более одной переменной и они могут быть разрешимы в целых, натуральных, рациональных числах. Эти уравнения имеют свои методы и приемы решения. На протяжении веков математики надеялись отыскать общий способ решения любого диофантова уравнения. Однако в 1970 г. ленинградский математик Ю. В. Матиясевич доказал, что такого общего способа быть не может, поэтому каждое такое уравнение требует творческого подхода к решению и нетривиальных идей, что, конечно, способствует развитию логического анализа.

Задачи, которые сводятся к решению диофантовых уравнений, имеют некоторые особенности. Во-первых, зачастую они сводятся к уравнениям или к системам уравнений с целыми коэффициентами. Как правило, эти системы неопределенные, то есть число уравнений в них меньше числа неизвестных. Во-вторых, решения требуется найти только целые или даже натуральные. Для выделения таких решений из всего бесконечного их множества приходится пользоваться свойствами целых чисел, а это уже относится к области арифметики.

В качестве примера можно привести следующую задачу. *За покупку нужно уплатить 1 700 р. У покупателя имеются купюры только по 200 р. и по 500 р. Какими способами он может расплатиться?*

Для ответа на этот вопрос достаточно решить уравнение $2x + 5y = 17$ с двумя неизвестными x и y. Такие уравнения имеют бесконечное множество решений. В частности, полученному уравнению отвечает любая пара чисел вида $(x, \frac{17-2x}{5})$. Но для этой практической задачи годятся только целые неотрицательные значения x и y. Поэтому приходим к такой постановке задачи: найти все целые неотрицательные решения уравнения $2x + 5y = 17$. Ответ содержит уже не бесконечно много, а всего лишь две пары чисел (1, 3) и (6, 1).

Исследование более сложных диофантовых уравнений обычно связано с определенными трудностями. Более того, можно указать многочлен $F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ с целыми коэффициентами такой, что не существует алгоритма, позволяющего по любому целому числу x узнавать, разрешимо ли уравнение $F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0$ относительно $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Таким образом, для таких уравнений невозможно дать исчерпывающего описания решений.

Методика решения диафантовых уравнений весьма разнообразна и замысловата. В нынешней математике существует целое направление, занимающееся исследованиями диофантовых уравнений, поиском способов их решений. Называется оно диофантовым анализом и диофантовой геометрией, поскольку использует геометрические способы доказательств.

Исходя из изложенных выше соображений, далеко не все методы можно рекомендовать к преподаванию школьникам и даже студентам вузов. И тем не менее существует весьма широкий спектр методик решения диофантовых уравнений, способствующих не только повышению математической эрудиции, но и формированию математического мышления и даже развитию математической интуиции.

Для школьников можно рекомендовать следующие методы решения диофантовых уравнений.

Рассмотрим более подробно каждый из вышеназванных способов.

Метод первый. Метод полного перебора всех возможных значений переменных, входящих в уравнение.

Данный метод заключается в том, чтобы перебрать все возможные варианты в зависимости от уравнения.

Задача. Найти множество всех пар натуральных чисел, которые являются решениями уравнения: $49x + 51y = 602$.

Решение. Если выразить какую-нибудь переменную из этого уравнения, а затем оценить полученное выражение, то после решения неравенства, которое получится после оценки, можно воспользоваться методом перебора вариантов.

Выразим из уравнения переменную x через y, $x = \frac{602-51y}{49}$, так как x и y – натуральные числа, то $x = \frac{602-51y}{49} \geq 1$, $602 - 51y \geq 49$, $51y \leq 553$, $y \leq \frac{553}{51}$. Полный перебор вариантов показывает, что натуральными решениями уравнения являются $x = 5$, $y = 7$.

Ответ: (5; 7).

Метод второй. Метод разложения на множители.

Рассмотрим случаи, когда в уравнениях можно применить формулу разности квадратов или другой способ разложения на множители.

Задача. Решите в целых числах $xy = x + y$.

Решение. Если переписать данное уравнение в виде $xy - x - y + 1 = 1$, то будет видно, что левую часть уравнения можно разложить на множители, используя способ группировки: $x(y - 1) - (y - 1) = 1$; $(y - 1)(x - 1) = 1$. Следовательно, получаем следующие системы:

$$\begin{cases} x - 1 = 1, \\ y - 1 = 1; \end{cases}$$

решением этой системы является пара (2; 2).

$$\begin{cases} x - 1 = -1, \\ y - 1 = -1; \end{cases}$$

решением этой системы является пара (0; 0).

Ответ:(2; 2), (0; 0).

Итак, из рассмотренных выше уравнений можно сделать вывод, что при решении уравнений методом разложения на множители применяются формулы сокращенного умножения, способ группировки, метод выделения полного квадрата.

Метод третий. Метод, основанный на выражении одной переменной через другую и выделении целой части дроби.

Задача. Решить в целых числах уравнение: $3x + 2y = 7$.

Решение. Переписав уравнение в виде $2(x + y) = 7 - x$, заключаем, что $7 - x$ кратно 2, то есть $7 - x = 2k$, $k \in Z$. Значит, $x = 7 - 2k$, и из исходного уравнения находим $y = 3k - 7$. Следовательно, все пары вида $(7 - 2k;\ 3k - 7)$, $k \in Z$ являются решениями исходного уравнения.

Ответ: $(7 - 2k;\ 3k - 7)$, $k \in Z$.

Метод четвертый. Метод, основанный на выделении полного квадрата.

Пример 16. Найдите все целочисленные решения уравнения: $x^2 - 6xy + 13y^2 = 29$.

Решение. В этом уравнении видно, что если преобразовать левую часть уравнения, то можно будет выделить полные квадраты.

$X^2 - 6xy + 13y^2 = (x^2 - 6xy + 9y^2) + 4y^2 = (x - 3y)^2 + (2)^2 = 29$, значит $(2y)^2 \leq 9$.

Получаем, что y может быть равен 0; ±1; ±2.

$y = 0$, тогда $(x - 0)^2 = 29$. Не имеет решений в целых числах;

$y = -1$, тогда $(x + 3)^2 + 4 = 29$, $(x + 3)^2 = 25$, $x + 3 = 5$, или $x + 3 = -5$ $x = 2$, или $x = -8$;

$y = 1$, тогда $(x + 3)^2 + 4 = 29$,$(x - 3)^2 = 25$,$x - 3 = 5$, или $x - 3 = -5$, $x = 8$, или $x = -2$;

$y = -2$, тогда $(x + 6)^2 + 16 = 29$, $(x + 6)^2 = 13$. Нет решений в целых числах.

$y = 2$, тогда $(x - 6)^2 + 16 = 29$, $(x - 6)^2 = 13$. Нет решений в целых числах.

Ответ: (2; −1); (−8; −1); (8; 1); (−2; 1).

Метода пятый. Метод оценки.

Данный метод состоит в том, чтобы оценить определенные выражения или переменные в данном уравнении.

Задача. Решите уравнение в целых числах $\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} = 3$.

Решение. Можно вначале найти решения только в натуральных числах, так как если $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ – это решение, то, изменив знак у любых двух чисел этой тройки, снова получим решение. Данное уравнение умножим на $2xyz$ и воспользуемся неравенством $a^2 + b^2 \geq 2ab$; получим: $6xyz = 2x^2y^2 + 2x^2z^2 + 2y^2z^2 = (x^2y^2 + x^2z^2) + (x^2y^2 + y^2z^2) + (x^2z^2 + y^2z^2) \geq 2x^2yz + 2y^2xz + 2z^2xy = 2xyz(x + y + z)$, откуда $x + y + z \leq 3$. Но x, y, – натуральные, поэтому $x = y = z = 1$ – это единственное решение в натуральных числах. Остальные решения исходного уравнения таковы: (–1; –1; 1); (1; –1; –1); (–1; 1; –1).

Ответ:(1; 1; 1); (–1; –1; 1); (1; –1; –1); (–1; 1; –1).

Задача. Найдите все пары $(a,\ b)$ натуральных чисел a и b, удовлетворяющих равенству $45^a - b^b = 1998$.

Решение. Числа 1998 и 45^a кратны 3, поэтому и число b^b должно быть кратно 3, то есть $b = 3k$ для некоторого натурального k. Тогда $45^a = 1998 + 3^{3k} \cdot k^{3k}$. Оба слагаемых в правой части полученного равенства кратны $3^3 = 27$, поэтому число 45^a также должно быть кратно 27, то есть $a \geq 2$. Значит, $45^a = 5^a \cdot 9$ делится на $9^2 = 81$. Если $k \geq 2$, то тогда число $3^{3k} \cdot k^{3k}$ делилось бы на 81, поэтому и число 1998 должно делиться на 81, что неверно. Следовательно, $k = = 1$, то есть $b = 3$, и поэтому $5^a = 1998 + 3^3 = 2025 = 45^2$, или $a = 2$.

Ответ: (2; 3).

Метод шестой. Метод остатков.

Данный метод заключается в определении остатков от деления на определенное число и исходя из этого делается вывод о решении данного уравнения.

Задача. Решить уравнение в целых числах: $x^3 + y^3 = 4(x^2y + xy^2 + 1)$.

Решение: Это уравнение можно преобразовать. После преобразования применить метод остатков.

$x^3 + y^3 - 4x^2y - 4xy^2 - 4 = 0$;

$x^3 + y^3 - 4x^2y - 4xy2 - 4 + 7x^2y + 7xy^2 - 7x^2y - 7xy^2 = 0$;

$x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2 = 7(x^2y + xy^2) + 4$;

$(x+y)^3 = 7(x^2y + xy^2) + 4$.

Так как кубы целых чисел при делении на 7 дают остатки 0, 1 и 6, но не 4, то уравнение не имеет решений в целых числах.

Ответ: целочисленных решений нет.

Метод седьмой. Метод решения уравнения с двумя переменными как квадратного относительно одной из переменных.

Суть метода состоит в том, чтобы рассмотреть уравнение как квадратное относительно какой-то переменной, затем найти дискриминант. В зависимости от уравнения надо посмотреть каким должен быть дискриминант, затем найти корни уравнения. Если в уравнении с двумя переменными присутствуют квадраты каждой переменной, то данное диофантово уравнение можно рассмотреть как квадратное относительно одной из переменных.

Задача. Решить уравнение в целых числах:

$5x^2 + 5y^2 + 8xy + 2y - 2x + 2 = 0$.

Решение. Если попытаться решить данное уравнение методом разложения на множители, то это достаточно трудоемкая работа, поэтому это уравнение можно решить более рациональным методом.

Рассмотрим уравнение как квадратное относительно x:

$5x^2 + (8y - 2)x + 5y^2 + 2y + 2$,

$D = -36(y + 1)^2$.

Для того, чтобы уравнение имело решения, необходимо, чтобы $D = 0$.

$-36(y + 1)^2 = 0$.

Это возможно при $y = -1$, тогда $x = 1$.

Ответ: (1; −1).

Метод восьмой. Метод сравнения**.**

Для применения этого метода необходимо знать следующие факты.

Определение. Если два числа a и b имеют одинаковые остатки при делении на m, то говорят, что a и b сравнимы по модулю m, и пишут $a \equiv b(mod m)$ (читают: a сравнимо с b по модулю m).

Теорема. Сравнение $a \equiv b(mod\ m)$ имеет место в том и только в том случае, если разность $a - b$ делится на m.

Теорема. Сравнения с общим модулем можно почленно складывать и вычитать, то есть если $a \equiv b(mod\ m)$ и $c \equiv d(mod\ m)$, то $a + c \equiv b + d(mod\ m)$ и $a - c \equiv b - d(mod\ m)$.

Теорема. Сравнения с общим модулем можно почленно умножать, то есть если $a \equiv b(mod\ m)$ и $c \equiv d(mod\ m)$, то $a \cdot c \equiv b \cdot d(mod\ m)$.

Замечание. Последние две теоремы верны для любого числа слагаемых или множителей.

Рассмотрим диофантово уравнение $ax+by = c$, $(a, b, c) = 1$, $(a, b) = 1$ следовательно, существуют x, $y \in Z$ – решения $ax + by = c$, $(a, b, c) = 1$, $(a, b) = 1$.

$y = \dfrac{c - ax}{b}$ при целом x нужно, чтобы $y \in Z$, а это будет тогда и только тогда, когда $\dfrac{c - ax}{b} \Leftrightarrow ax \equiv c(modb)$, тогда $(x_0 + bt,\ c - \dfrac{c - ax_0}{b} - at)$ – решение

$ax + by = c$, $(a, b, c) = 1$, $(a, b) = 1$, гдес – $\dfrac{c - ax_0}{b} = y_0$.

Задача. Решить уравнение $14x - 10y = 6$.

Решение. $(14, 10, 6) \neq 1$, $7x - 5y = 3$ – диофантово уравнение, так как

$(7, 5, 3) = 1$, а поскольку $(7, 5) = 1$, то $\exists x, y \in Z$ – решение данного диофантова уравнения.

$y = \dfrac{7x - 3}{5} \in Z \Leftrightarrow \dfrac{7x - 3}{5} \Leftrightarrow 7x \equiv 3(mod\ 5)$, так как $(7, 5) = 1$, то сравнение имеет единственное решение. $2x \equiv 8(mod\ 5)$, $x \equiv 4(mod\ 5)$, $x = 4 + 5t$, $t \in Z$.

Ответ: $\begin{cases} x = 4 - 5t, \\ y = 5 - 7t, \end{cases} t \in Z.$

Метод девятый. Метод конечного спуска.

В данном методе мы строим определенный конечный процесс.

Задача. Решите уравнение $2x^2 - 5y^2 = 7$ в целых числах.

Решение. Так как $2x^2$ – четное число, а 7 – нечетное, то $5y^2$ должно быть нечетным, то есть y – нечетное.

Пусть $y = 2z + 1$, $z \in Z$, тогда данное уравнение можно переписать в виде $x^2 - 10z^2 - 10z = 6$. Отсюда видно, что x должно быть четным.

Пусть $x = 2m$, тогда последнее уравнение примет вид: $2m^2 - 5z(z + 1) = 3$, что невозможно, так как число $z(z + 1)$ – четно, а разность двух четных чисел не может быть равна нечетному числу. Таким образом, данное уравнение не имеет решений в целых числах.

Ответ: решений в целых числах нет.

Метод десятый. Метод бесконечного спуска.

Решение уравнений методом бесконечного спуска проходит по следующей схеме: предположив, что уравнение имеет решения, мы строим некоторый бесконечный процесс, в то время как по самому смыслу задачи этот процесс должен на чем-то кончаться.

Часто метод бесконечного спуска применяется в более простой форме. Предположив, что мы уже добрались до естественного конца, видим, что «остановиться» не можем.

Задача. Докажем неразрешимость в натуральных числах уравнения: $8x^4 + 4y^4 + 2z^2 = t^4$.

Решение. Допустим, что решение есть, и $x = m$, $y = n$, $z = p$, $t = q$ – решение с наименьшим возможным x.

Из вида уравнения следует, что $q = 2q_1$.

Подставим решение в уравнение и сократим на $2{:}4m^4 + 2n^4 + p^4 = 8q_1^4$.

Получаем, что $p = 2p_1$, следовательно, $2m^4 + n^4 + 8p_1^4 = 4q_1^4$.

Аналогично, $n = 2n_1$, $m^4 + 8n_1^4 + 4p_1^4 = 2q_1^4$ и $m = 2m_1$, $8m_1^4 + 4n_1^4 + 2p_1^4 = q_1^4$.

Значит, $x = m_1$, $y = n_1$, $z = p_1$, $t = q_1$ – также решения нашего уравнения. Но $m_1 < m$, что противоречит выбору исходного решения. Значит, решений нет.

Ответ: Решений нет.

Из доказательства видно, что применение метода спуска в данном примере основывается на том факте, что любое непустое множество натуральных чисел имеет минимальный элемент. Другими словами, метод бесконечного спуска заключается в построении бесконечной последовательности убывающих целых положительных чисел. Поскольку убывающая последовательность целых положительных чисел имеет лишь конечное число членов, мы получаем противоречие.

Анализируя приведенные выше примеры, процесс решения диофантовых уравнений можно разделить на три этапа:

− интуитивное угадывание одного или нескольких решений задачи или ограничений, накладываемых на эти решения;

− творческий поиск метода нахождения всех решений задачи или доказательства того, что других решений, кроме найденных на первом этапе, не существует;

− строгое логическое оформление идей, выработанных на первом и втором этапах.

Разумеется, в отличие от уравнений базового уровня сложности, простой тренировкой «натаскать» на диофантовы уравнения невозможно. Однако рассмотрение большого числа примеров, иллюстрирующих различные методы, безусловно, способствует формированию навыка решения таких уравнений. При этом следует обратить внимание учащихся на все этапы решения, то есть научиться угадыванию ответа (первый этап) не менее важно, чем научиться поиску верного способа решения (второй этап) и корректной записи полученного решения (третий этап).

Также важно постоянно обращать внимание школьников на то, что если на первых двух этапах допустимо и даже полезно использование нестрогих фраз вида «число, близкое к нулю» или «большое число», то на третьем этапе для корректного решения необходимы строгие формулировки.

В заключение можно отметить, что диофантовы уравнения – яркий пример некой «золотой середины», иллюстрирующей гармоничное сочетание «общематематического» и «узкоспециального» в математике. При этом именно специфика этого раздела помогает как обогащению математической эрудиции специальной терминологии, так и формированию логического мышления и интуиции обучающегося.

Библиографический список

1. Бабенко, А. С., Марголина, Н. Л., Матыцина, Т. Н. Анализ результатов проверки заданий с развернутым ответом единого государственного экзамена по математике за 2015 год [Текст] / А. С. Бабенко, Н. Л. Марголина, Т. Н. Матыцина // Вестник Костромского государственного университета им. Н. А. Некрасова. Серия: Педагогика. Психология. Социальная работа. Ювенология. Социокинетика. – 2016. – № 2. – С. 14–16.

2. Бабенко А. С., Марголина Н. Л., Матыцина Т. Н. Анализ структуры заданий единого государственного экзамена по математике за 2016 год по Костромской области [Текст] / А. С. Бабенко, Н. Л. Марголина, Т. Н. Матыцина // Вестник Костромского государственного университета им. Н. А. Некрасова. Серия: Педагогика. Психология. Социальная работа. Ювенология. Социокинетика. – 2016. – № 4. – С. 34–37.

3. Бабенко, А. С., Марголина, Н. Л., Матыцина, Т. Н. Динамика результатов единого государственного экзамена по математике за 2014–2016 годы по Костромской области [Текст] / А. С. Бабенко, Н. Л. Марголина, Т. Н. Матыцина // Вестник Костромского государственного университета. Серия: Педагогика. Психология. Социальная работа. Ювенология. Социокинетика. – 2017. – № 1. – С. 28–30.

4. Бабенко, А. С., Марголина, Н. Л., Матыцина, Т. Н. Особенности подготовки экспертов по проверке заданий с развернутым ответом единого государственного экзамена по математике [Текст] / А. С. Бабенко, Н. Л. Марголина, Т. Н. Матыцина // Вестник Костромского государственного университета им. Н. А. Некрасова. Серия: Педагогика. Психология. Социальная работа. Ювенология. Социокинетика. – 2016. – № 3. – С. 177–178.

5. Кучина, Ж. А., Ширяев, К. Е., Матыцина, Т. Н. О влиянии специальных дисциплин на формирование научно-исследовательских навыков [Текст] / Ж. А. Кучина, К. Е. Ширяев, Т. Н. Матыцина // Актуальные проблемы преподавания информационных и естественно-научных дисциплин : материалы XI Всероссийской научно-методической конференции. – Кострома : Костромской государственный университет, 2017. – С. 99–103.

6. Марголина, Н. Л.Некоторые виды устойчивости в линейных системах с неограниченными коэффициентами [Текст] / Н. Л. Марголина : диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук / Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (МГУ). – Кострома, 2009.

7. Марголина, Н. Л., Матыцина, Т. Н., Ширяев, К. Е. Об этапах математического образования в вузе [Текст] / Н. Л. Марголина, Т. Н. Матыцина, К. Е. Ширяев // Вестник Костромского государственного университета. Серия: Педагогика. Психология. Социокинетика. – 2017. – Т. 23. – № 1. – С. 123–125.

8. Марголина, Н. Л. Из опыта преподавания математической статистики студентам физико-математического факультета [Текст] / Н. Л. Марголина // Актуальные проблемы преподавания информационных и естественно-научных дисциплин : материалы IX Всероссийской научно-методической конференции. – Кострома : Костромской государственный университет имени Н. А. Некрасова, 2015. – С. 82–83.

9. Марголина, Н. Л. О формулах показателей равномерной устойчивости линейных систем дифференциальных уравнений [Текст] / Н. Л. Марголина // Вестник Костромского государственного университета им. Н. А. Некрасова. – 2014. – Т. 20. – № 4. – С. 10–11.

10. Матыцина, Т. Н. Отображение Барта пространства модулей стабильных векторных расслоений ранга два на проективной плоскости [Текст] / Н. Л. Марголина : диссертация на соискание ученой

степени кандидата физико-математических наук. – Ярославль, 2007.

11. Матыцина, Т. Н. Отображение Барта пространства некоторых модулей стабильных векторных расслоений определенного ранга [Текст] / Т. Н. Матыцина // Вестник Костромского государственного университета им. Н. А. Некрасова. – 2005. – Т. 11. – № 6. – С. 8–14.

12. Матыцина, Т. Н., Ширяев, К. Е. Деятельность научной школы и ее взаимодействие с аспирантурой [Текст] / Т. Н. Матыцина, К. Е. Ширяев // Образовательная деятельность вуза в современных условиях : материалы международной научно-методической конференции. – Кострома : ФГБОУ ВО Костромская государственная сельскохозяйственная академия, 2016. – С. 22.

13. Сидоров, А. В., Марголина, Н. Л., Матыцина, Т. Н., Ширяев, К. Е. Формирование и развитие логических универсальных учебных действий при решении нестандартных уравнений методом оценки [Текст] / А. В. Сидоров, Н. Л. Марголина, Т. Н. Матыцина, К. Е. Ширяев // Вестник Костромского государственного университета. Серия: Педагогика. Психология. Социальная работа. Ювенология. Социокинетика. – 2017. – № 2. – С. 145–150.

14. Ширяев, К. Е. Об интегральной разделенности функций [Текст] / К. Е. Ширяев // Вестник Костромского государственного университета им. Н. А. Некрасова. – 2014. – Т. 20. – № 4. – С. 8–9.

15. Ширяев К. Е., Матыцина Т. Н., Марголина Н. Л. Концепция развития математического образования и итоговая государственная аттестация [Текст] / К. Е. Ширяев // Ярославский педагогический вестник. – 2017. – № 2. – С. 67–71.

Bibliograficheskij spisok

1. Babenko, A. S., Margolina, N. L., Matycina, T. N. Analiz rezul'tatov proverki zadanij s razvernutym otvetom edinogo gosudarstvennogo jekzamena po matematike za 2015 god [Tekst] / A. S. Babenko, N. L. Margolina, T. N. Matycina // Vestnik Kostromskogo gosudarstvennogo universiteta im. N. A. Nekrasova. Serija: Pedagogika. Psihologija. Social'naja rabota. Juvenologija. Sociokinetika. – 2016. – № 2. – S. 14–16.

2. Babenko A. S., Margolina N. L., Matycina T. N. Analiz struktury zadanij edinogo gosudarstvennogo jekzamena po matematike za 2016 god po Kostromskoj oblasti [Tekst] / A. S. Babenko, N. L. Margolina, T. N. Matycina // Vestnik Kostromskogo gosudarstvennogo universiteta im. N. A. Nekrasova. Serija: Pedagogika. Psihologija. Social'naja rabota. Juvenologija. Sociokinetika. – 2016. – № 4. – S. 34–37.

3. Babenko, A. S., Margolina, N. L., Matycina, T. N. Dinamika rezul'tatov edinogo gosudarstvennogo jekzamena po matematike za 2014–2016 gody po Kostromskoj oblasti [Tekst] / A. S. Babenko, N. L. Margolina, T. N. Matycina // Vestnik Kostromskogo gosudarstvennogo universiteta. Serija: Pedagogika. Psihologija. Social'naja rabota. Juvenologija. Sociokinetika. – 2017. – № 1. – S. 28–30.

4. Babenko, A. S., Margolina, N. L., Matycina, T. N. Osobennosti podgotovki jekspertov po proverke zadanij s razvernutym otvetom edinogo gosudarstvennogo jekzamena po matematike [Tekst] / A. S. Babenko, N. L. Margolina, T. N. Matycina // Vestnik Kostromskogo gosudarstvennogo universiteta im. N. A. Nekrasova. Serija: Pedagogika. Psihologija. Social'naja rabota. Juvenologija. Sociokinetika. – 2016. – № 3. – S. 177–178.

5. Kuchina, Zh. A., Shirjaev, K. E., Matycina, T. N. O vlijanii special'nyh disciplin na formirovanie nauchno-issledovatel'skih navykov [Tekst] / Zh. A. Kuchina, K. E. Shirjaev, T. N. Matycina // Aktual'nye problemy prepodavanija informacionnyh i estestvenno-nauchnyh disciplin : materialy HI Vserossijskoj nauchno-metodicheskoj konferencii. – Kostroma : Kostromskoj gosudarstvennyj universitet, 2017. – S. 99–103.

6. Margolina, N. L. Nekotorye vidy ustojchivosti v linejnyh sistemah s neogranichennymi kojefficientami [Tekst] / N. L. Margolina : dissertacija na soiskanie uchenoj stepeni kandidata fiziko-matematicheskih nauk / Moskovskij gosudarstvennyj universitet im. M. V. Lomonosova (MGU). – Kostroma, 2009.

7. Margolina, N. L., Matycina, T. N., Shirjaev, K. E. Ob jetapah matematicheskogo obrazovanija v vuze [Tekst] / N. L. Margolina, T. N. Matycina, K. E. Shirjaev // Vestnik Kostromskogo gosudarstvennogo universiteta. Serija: Pedagogika. Psihologija. Sociokinetika. – 2017. – T. 23. – № 1. – S. 123–125.

8. Margolina, N. L. Iz opyta prepodavanija matematicheskoj statistiki studentam fiziko-matematicheskogo fakul'teta [Tekst] / N. L. Margolina // Aktual'nye problemy prepodavanija informacionnyh i estestvenno-nauchnyh disciplin : materialy IX Vserossijskoj nauchno-metodicheskoj konferencii. – Kostroma : Kostromskoj gosudarstvennyj universitet imeni N. A. Nekrasova, 2015. – S. 82–83.

9. Margolina, N. L. O formulah pokazatelej ravnomernoj ustojchivosti linejnyh sistem differencial'nyh uravnenij [Tekst] / N. L. Margolina // Vestnik Kostromskogo gosudarstvennogo universiteta im. N. A. Nekrasova. – 2014. – T. 20. – № 4. – S. 10–11.

10. Matycina, T. N. Otobrazhenie Barta prostranstva modulej stabil'nyh vektornyh rassloenij ranga dva na proektivnoj ploskosti [Tekst] / N. L. Margolina : dissertacija na soiskanie uchenoj stepeni kandidata fiziko-matematicheskih nauk. – Jaroslavl', 2007.

11. Matycina, T. N. Otobrazhenie Barta prostranstva nekotoryh modulej stabil'nyh vektornyh rassloenij opredelennogo ranga [Tekst] / T. N. Matycina // Vestnik Kostromskogo gosudarstvennogo universiteta im. N. A. Nekrasova. – 2005. – T. 11. – № 6. – S. 8–14.

12. Matycina, T. N., Shirjaev, K. E. Dejatel'nost' nauchnoj shkoly i ee vzaimodejstvie s aspiranturoj [Tekst] / T. N. Matycina, K. E. Shirjaev // Obrazovatel'naja dejatel'nost' vuza v sovremennyh uslovijah : materialy mezhdunarodnoj nauchno-metodicheskoj konferencii. – Kostroma : FGBOU VO Kostromskaja gosudarstvennaja sel'skohozjajstvennaja akademija, 2016. – S. 22.

13. Sidorov, A. V., Margolina, N. L., Matycina, T. N.,

Shirjaev, K. E. Formirovanie i razvitie logicheskih univer-sal'nyh uchebnyh dejstvij pri reshenii nestandartnyh uravnenij metodom ocenki [Tekst] / A. V. Sidorov, N. L. Margolina, T. N. Matycina, K. E. Shirjaev // Vestnik Ko-stromskogo gosudarstvennogo universiteta. Serija: Peda-gogika. Psihologija. Social'naja rabota. Juvenologija. So-ciokinetika. – 2017. – № 2. – S. 145–150.

14. Shirjaev, K. E. Ob integral'noj razdelennosti funkcij [Tekst] / K. E. Shirjaev // Vestnik Kostromskogo gosudarstvennogo universiteta im. N. A. Nekrasova. – 2014. – T. 20. – № 4. – S. 8–9.

15. Shirjaev K. E., Matycina T. N., Margolina N. L. Koncepcija razvitija matematicheskogo obrazovanija i itogovaja gosudarstvennaja attestacija [Tekst] / K. E. Shir-jaev // Jaroslavskij pedagogicheskij vestnik. – 2017. – № 2. – S. 67–71.

Reference List

1. Babenko A. S., Margolina N. L., Matytsina T. N. The analysis of results of check of tasks with the developed answer of the unified state examination in mathematics for 2015 // the Bulletin of Kostroma state university named after N. A. Nekrasov. Series: Pedagogics. Psychology. Social work. Youth studies. Sociokinetics. – 2016. – № 2. – P. 14–16.

2. Babenko A. S., Margolina N. L., Matytsina T. N. The analysis of structure of tasks of the unified state examination in mathematics for 2016 in the Kostroma region // the Bulletin of Kostroma state university named after N. A. Nekrasov Series: Pedagogics. Psychology. Social work. Youth studies. Sociokinetics. – 2016. – № 4. – P. 34–37.

3. Babenko A. S., Margolina N. L., Matytsina T. N. Dynamics of results of the unified state examination in mathematics for 2014–2016 in the Kostroma region // the Bulletin of Kostroma state university named after N. A. Nekrasov Series: Pedagogics. Psychology. Social work. Youth studies. Sociokinetics. – 2017. – № 1. – P. 28–30.

4. Babenko A. S., Margolina N. L., Matytsina T. N. Features of training of experts in check of tasks with the developed answer of the unified state examination in mathematics // the Bulletin of Kostroma state university named after N. A. Nekrasov Series: Pedagogics. Psychology. Social work. Youth studies. Sociokinetics. – 2016. – № 3. – P. 177–178.

5. Kuchina Zh. A., Shiryaev K. E., Matytsina T. N. About influence of special disciplines on formation of research skills // Relevant problems of teaching infor-mation and natural-science disciplines: materials of the XI All-Russian scientific-methodical conference. – Kostro-ma : Kostroma state university, 2017. – P. 99–103.

6. Margolina N. L. Some types of stability in linear systems with unlimited coefficients: the thesis for a de-gree of the Candidate of physical and mathematical sci-ences / Lomonosov Moscow State University (MSU). – Kostroma, 2009.

7. Margolina N. L., Matytsina T. N., Shiryaev, K. E. About stages of mathematical education in higher education institution // the Bulletin of Kostroma state uni-versity named after N. A. Nekrasov Series: Pedagogics. Psychology. Social work. Youth studies. Sociokinetics. – 2017. – V. 23. – № 1. – P. 123–125.

8. Margolina N. L. From experience of teaching mathematical statistics to students of the Physical and Mathematical Faculty // Current problems of teaching information and natural-science disciplines: materials of the IX All-Russian scientific and methodical confer-ence. – Kostroma : Kostroma state university named after N. A. Nekrasov, 2015. – P. 82–83.

9. Margolina N. L. On formulas of uniform stability indicators of linear systems of the differential equations // the Bulletin of Kostroma state university named after N. A. Nekrasov. – 2014. – V. 20. – № 4. – P. 10–11.

10. Matytsina T. N. Display of Bart spaces of mod-ules of stable vector stratifications of a rank two on the projective plane: the thesis for a degree of the Candidate of physics-mathematical sciences. – Yaroslavl, 2007.

11. Matytsina T. N. Display of Bart spaces of some modules of stable vector stratifications of a certain rankcthe Bulletin of Kostroma state university named after N. A. Nekrasov. – 2005. – V. 11. – № 6. – P. 8–14.

12. Matytsina T. N., Shiryaev K. E. Activity of scien-tific school and its interaction with postgraduate study // Educational activity of higher education institution in modern conditions: materials of the international scien-tific and methodical conference. – Kostroma : FSBEI HE «Kostroma state agricultural academy», 2016. – P. 22.

13. Sidorov A. V., Margolina N. L., Matytsina T. N., Shiryaev K. E. Formation and development of logical universal educational actions at the solution of the non-standard equations by method of assessment // the Bulle-tin of Kostroma state university. Series: Pedagogics. Psychology. Social work. Youth studies. Sociokinetics. – 2017. – № 2. – P. 145–150.

14. Shiryaev K. E. About integrated separation of functions // the Bulletin of Kostroma state university named N. A. Nekrasov. – 2014. – V. 20. – № 4. – P. 8–9.

15. Shiryaev K. E., Matytsina T. N., Margolina N. L. Concept of development of mathematical education and final state assessment // Yaroslavl pedagogical bulle-tin. – 2017. – № 2. – P. 67–71.