DOI 10.24411/1813–145X-2018–10073

УДК 378.51

В. С. Секованов
https://orcid.org/0000–0002–8604–8931

А. С. Бабенко
https://orcid.org/0000–0001–6267–0497

Выполнение многоэтапного математико-информационного задания «Непрерывные динамические системы» как средство формирования креативности студентов

Исследование выполнено при поддержке гранта Российского научного фонда (проект №16–18–10304)

В работе раскрывается механизм формирования креативности студентов при выполнении многоэтапного математико-информационного задания «Непрерывные динамические системы». Применение на занятиях многоэтапных математико-информационных заданий позволяет развивать креативность студентов за счет интеграции разных видов творческой математической деятельности. В ходе выполнения заданий студенты на основе определений неподвижной точки и понятий устойчивости предлагают ассоциации по исследованию динамических систем. Кроме того, студенты находят несколько путей исследования поведения траекторий в окрестности неподвижных точек (с помощью построения фазового портрета и с помощью исследования правой части уравнения), среди которых есть неизвестный и более простой способ, студенты используют различные ИКТ при построении фазового портрета. Кроме того, закладывается основа попытки преодолеть стереотип мышления о возможности прогнозирования поведения системы; выдвигаются различные гипотезы, а затем проверяются. В процессе исследования систем, содержащих предельный цикл, развиваются такие креативные качества, как гибкость, оригинальность мышления (находим оригинальный способ доказательства существования предельного цикла, студенты используют различные ИКТ при построении фазового портрета); эстетические качества личности (решают задачи на обнаружение предельного цикла, отличающиеся красотой доказательства); интуиция (студенты выдвигают гипотезы и проверяют их, интуитивно предполагают наличие некоторой замкнутой траектории, к которой притягиваются все остальные). Многоэтапное математико-информационное задание является хорошей экспериментальной площадкой для интеграции математики и информатики. При выполнении искомого многоэтапного математико-информационного задания у студентов повышается мотивация к изучению математических методов и информационных технологий. Статья нацелена на подготовку восприятия студентами важнейшего понятия – аттрактора Лоренца, которое появляется при решении системы трех нелинейных дифференциальных уравнений. Вопросы, рассмотренные в данной статье, связаны с сиенергетическим и деятельностным подходами, нацеленными на развитие творческого потенциала студентов, что позитивно влияет на развитие их креативности.

Ключевые слова: креативность, креативное качество, многоэтапное математико-информационное задание, непрерывные динамические системы.

V. S. Sekovanov, A. S. Babenko

Implementation of the Multi Stage Mathematical and Information Task «Continuous Dynamic Systems» as A Means to Form Students' Creativity

In this paper, the mechanism for the formation of students' creativity in the implementation of the multi-stage mathematical and information task «Continuous Dynamical Systems» is disclosed. The use of multi-stage mathematical and information assignments allows students to develop their creativity by integrating various types of creative mathematical activities. During performance of tasks students, on the basis of defining a motionless point and concepts of stability, offer associations on a research of dynamic systems. Besides, students find several ways to research behavior of trajectories in the neighborhood of motionless points (by means of creating a phase portrait and by means of researching the right member of equation) among which there is an unknown and easier way, students use various ICT making of a phase portrait. Besides, here is made the foundation of attempt to overcome a thinking stereotype about a possibility to forecast the system behavior; various hypotheses are presented, and then checked. In the course of the research of the systems containing a limit cycle such creative qualities are developed as: flexibility, originality of thinking (we find an original way to prove existence of a limit cycle, students use various ICT making a phase portrait); aesthetic qualities of the personality (solve the problems on detecting a limit cycle, differing in beauty of the proof); intuition (students make hypotheses and check them, intuitively assume existence of some closed trajectory to which all others are attracted). The multi-stage mathematical and information task is a good experimental platform to integrate mathematics and informatics. When implementing a required multi-stage mathematical and information task students' motivation is increased to study mathematical methods and information technologies. This article is aimed to prepare students' perception to the major concept – Lorentz's attractor, which appears at the solution of the system of three nonlinear differential equations. The questions considered in this article are connected with the synergetic and activity approaches aimed at development of students' creative potential, that positively influences development of their creativity.

Keywords: creativity, creative quality, multi-stage mathematical-information task, continuous dynamic systems.

Важной чертой современной математики является интеграция математических методов с информационными и коммуникационными технологиями (ИКТ). В конце прошлого века зародилась новая ветвь современной математики – нелинейная динамика, изучение которой без использования ИКТ невозможно. Важнейшая компонента нелинейной динамики – нелинейные непрерывные динамические системы, тесно связанные с фрактальной геометрией и теорией хаоса. Исследованию нелинейной динамики и методике ее изучения посвящены многие работы (см. [1–5, 7, 9–12, 14–16, 21, 22]). Непрерывные динамические системы порождены одним или несколькими дифференциальными уравнениями. В настоящее время непрерывные динамические системы находят приложения в физике, экономике и других дисциплинах. Разрабатываются новые математические методы, создаются компьютерные алгоритмы для решения нелинейных уравнений. Часто оказывается, что решениями нелинейных уравнений являются странные аттракторы, имеющие фрактальную структуру. Важной составляющей непрерывных динамических систем, которая находит многочисленные приложения, является аттрактор Лоренца. Открытие Лоренца привело к возникновению понятия «Эффект бабочки» и было опубликовано во многих журналах физико-математических направлений. Следует отметить, что строятся странные аттракторы (к ним принадлежит и аттрактор Лоренца) с помощью компьютерных программ и, будучи фракталами, принадлежат к числу самых красивых математических объектов, что благотворно влияет на развитие креативности и компетентности студентов, магистрантов и аспирантов.

Впервые многоэтапные математические задания рассматривались М. Клякля. Позднее проф. В. С. Секованов продолжил исследования М. Клякля и ввел понятие «многоэтапного математико-информационного задания» [13, с. 162], при разработке которого предусмотрено использование как математических методов, так и ИКТ. В. С. Секованов продолжил и расширил исследование М. Клякля, рассмотревшего многоэтапные математические задания, являющиеся лабораторией творческой математической деятельности.

В работе [13, с. 162] рассматриваются многоэтапные математико-информационные задания, «являющиеся специально составленной последовательностью задач, упражнений, проблем и дидактических ситуаций, которые соединяют друг с другом

а) различные виды творческой математической деятельности;

б) создание художественных композиций с помощью фракталов;

в) проведение компьютерных экспериментов;

г) проведение лабораторных работ по математике;

д) поиск информации в интернете;

е) креативные качества студентов» [13, с. 162].

«Мы понимаем многоэтапные математико-информационные задания как лабораторию, в рамках которой происходит творческая математическая и творческая информационная деятельность, нацеленные на развитие креативных качеств будущего бакалавра, магистранта и аспиранта» [13, с. 162].

Мы проектируем выполнение многоэтапного математико-информационного задания «Непрерывные динамические системы», которое состоит из четырех взаимосвязанных этапов.

Опишем каждый из этапов и укажем решение дидактических задач, нацеленных на развитие креативности обучающихся.

Первый этап – «Понятие о непрерывных динамических системах». На данном этапе даются основные понятия нелинейной динамики и качественной теории дифференциальных уравнений; проводится классификация динамических систем, для каждой из них приводится пример. Затем изучается история развития нелинейной динамики, тем самым расширяется кругозор в различных областях знания.

В ходе проведения классификации динамических систем можно подобрать разнообразные интересные задачи, нестандартные не только по содержанию, но и по решению. Таким образом, в ходе решения этих задач студентам необходимо применить творческий подход. Вместе с тем такой вид деятельности существенно отражается на развитии креативных качеств личности – повышаются гибкость и оригинальность мышления, творческая активность, самостоятельность в познании. Например, можно показать, как в различных областях знания можно применить метод итераций, а также студенты находят новый способ решения задачи, при этом устанавливается неожиданная связь между различными областями знаний и нелинейной динамикой.

Приведем несколько примеров таких задач:

1. «Для чисел $a_1, a_2, ..., a_{42}$ верны равенства $a_{n+1} = f\left(a_n\right)$, $n = 1, 2, ..., 41$. Найдите $a_{13} - a_{10}$, если известно, что $a_{42} = 0$, а $f\left(x\right) = \begin{cases} 7^x + 4^{-\frac{6}{x+1}} - 8, & x \le -4; \\ \dfrac{52}{x+4} - 4, & x > -4. \end{cases}$ » [6, с. 1].

2. «В трапеции *ABCD* длина основания *AB* равна *b*, а длина основания *CD* равна *a* (*a* > *b*). Обозначим середины диагоналей трапеции *ABCD* точками A_1 и B_1. Затем рассмотрим трапецию A_1B_1CD и ее середины диагоналей обозначим точками A_2 и B_2 и т. д. Найти длины отрезков A_1B_1, A_2B_2, A_nB_n. Пусть последовательность x_n является длиной отрезка A_nB_n; будет ли сходиться данная последовательность, если да, то найти предел последовательности» [18, с. 173].

3. «Дан квадрат *ABCD* со стороной *a*. На каждой его стороне отметили середину A_1, B_1, C_1, D_1 и затем соединили эти точки. Затем в получившемся четырехугольнике на каждой стороне отметили середину A_2, B_2, C_2, D_2 и т. д. Найти площадь первого, второго, третьего, *n*-го четырехугольников» (см. диссертацию А. С. Бабенко).

В заключение рекомендуется рассмотреть задачи, раскрывающие взаимосвязь между непрерывными и дискретными динамическими системами. Можно дать многоэтапные математико-информационные задания «Дискретные динамические системы» [8, с. 214] и установить связь между дискретными и непрерывными динамическими системами (примеры заданий см. [1, с. 218, 17, с. 138, 19, с. 144]).

Второй этап – «Непрерывные динамические системы, заданные одним дифференциальным уравнением». На этом этапе проводится исследование непрерывных динамических систем в одномерном пространстве. Данный материал дает возможность освежить знания из области качественной теории дифференциальных уравнений, провести обобщение по вопросу исследования систем. Особое внимание следует уделить исследованию поведения решений дифференциального уравнения в зависимости от значения параметра.

Сначала необходимо найти общее решение линейного дифференциального уравнения $x' = ax$, построить фазовый портрет дифференциального уравнения, найти неподвижные точки и изучить поведение траекторий вблизи неподвижных точек. Затем следует провести исследование поведения решений нелинейного дифференциального уравнения [2, с. 249].

Например, найти общее решение нелинейного дифференциального уравнения $x' = x - x^2 - ax$ (1), построить фазовый портрет дифференциального уравнения, найти неподвижные точки и изучить поведение траекторий вблизи неподвижных точек.

а) Решим уравнение (1) $\dfrac{dx}{dt} = x - x^2 - ax$. Решение имеет вид: $\dfrac{1}{1-a}\ln\left|\dfrac{x}{1-a-x}\right| = t + C$ (2) $\left(a \ne 1\right)$. Если $a = 1$, то получаем уравнение $x' = -x^2$.

б) Строим фазовый портрет системы (1) (Рис. 2). Фазовый портрет можно построить с помощью одного из математических пакетов. Следует задать различные значения параметра *C* и построить график функции (2) в одной системе координат.

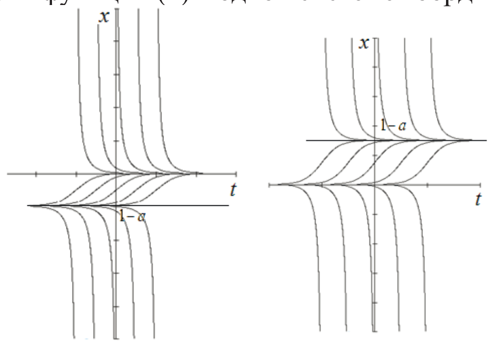

Рис. 1. Фазовый портрет системы (1) а) $a > 1$, б) $a < 1$

в) Система (1) имеет две неподвижные точки: точку *O* (0) и точку *A* (1 – *a*). В случае $a < 1$, точка *O* – неустойчивая точка, а точка *A* – устойчивая (рис. 2).

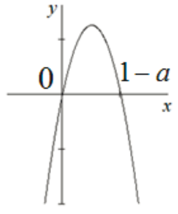

Рис. 3. График функции $y = x - x^2 - ax$ при $a < 1$

В случае $a > 1$ точка *O* – устойчивая точка, а точка *A* – неустойчивая (рис. 3).

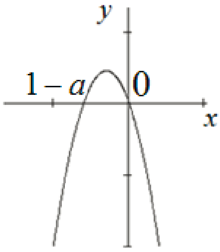

Рис. 3. График функции $y = x - x^2 - ax$ при $a > 1$

В случае, когда динамическая система задана одним дифференциальным уравнением, очевидно, что определить поведение системы можно непосредственно после нахождения решения дифференциального уравнения. Проведение качественного исследования (анализируя поведение функции правой части) служит основой для исследования динамических систем, заданных более чем одним дифференциальным уравнением.

Далее дается «многослойная» задача, описание которой подробно представлено А. С. Бабенко [3, с. 127]. В данной задаче необходимо в зависимости от значений параметра проследить, как изменяются фазовый портрет и поведение фазовых траекторий в окрестности неподвижной точки.

В ходе выполнения заданий студенты на основе определений неподвижной точки и понятий устойчивости предлагают ассоциации по исследованию динамических систем. Кроме того, студенты находят несколько путей исследования поведения траекторий в окрестности неподвижных точек (с помощью построения фазового портрета и с помощью исследования правой части уравнения), среди которых есть неизвестный и более простой способ, студенты используют различные ИКТ при построении фазового портрета. Кроме того, закладывается основа попытки преодолеть стереотип мышления о возможности прогнозирования поведения системы; выдвигаются различные гипотезы, а затем проверяются.

Третий этап – «Непрерывные динамические системы, заданные автономной системой двух дифференциальных уравнений».

Вначале предлагается исследовать линейные автономные системы двух дифференциальных уравнений и определить характер точек несколькими способами. Первый способ – сведение к уравнению второго порядка. Он достаточно трудоемкий, поэтому студенты предлагают найти другой способ исследования данных систем, что способствует развитию гибкости мышления (новый вариант решения) и оригинальности мышления (более эффективный способ решения). Потом строятся фазовые портреты систем с помощью математических пакетов или в какой-либо среде программирования, проводится классификация неподвижных точек в зависимости от собственных значений матрицы коэффициентов. В данной ситуации они проявляют самостоятельность, интуицию, умение находить новые, оригинальные способы классификации неподвижных точек.

Следующий шаг на данном этапе – исследование нелинейных автономных систем двух дифференциальных уравнений. Во-первых, проводится совместный разбор задачи. Вместе со студентами находится способ построения фазового портрета с помощью приближенных методов, а затем строится схема качественного исследования путем линеаризации нелинейных систем двух дифференциальных уравнений. Появляются вопросы к студентам: Как исследовать точки на устойчивость? Предложите способ определения типа точки, если нам известна классификация неподвижных точек линейных систем. Здесь придется не только воспользоваться аналогией с линейными системами, но и проявить оригинальность мышления, необходимо догадаться, как свести нелинейную систему к линейной. Неподвижные точки нелинейных систем находятся аналогично, только для определения типа точки необходимо систему линеаризировать, то есть заменить на линейную. В-третьих, студентам предлагается разделиться по парам и провести исследование системы и ответить на вопрос: «Какими свойствами обладают фазовые траектории?». Студенты замечают, что фазовые траектории могут обладать свойством симметрии. В результате проведенного исследования студенты демонстрируют самостоятельность при решении проблем, умение ставить задачи, находить пути решения проблем, когда они неизвестны, подбирать несколько путей решения задачи, то есть развиваются креативные качества студентов.

Например, построить фазовый портрет системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x' = \sin y, \\ y' = x. \end{cases} \qquad (3)$$

Представим программу построение фазового портрета системы (3):

```
program phaz_por_3;
uses crt, graph;
const m=50;
var gd,gm,i,j,s1,s2,c1,c2: integer; z,x,y,x1,y1,x2,y2,h: real;
procedure graf(x,y: real);
begin
```

```
(7)  repeat
(8)  x2:=x;
(9)  y2:=y;
(10) x1:=x+h* sin(y);
(11) y1:=y+h*(x);
(12) x:=x1;
(13) y:=y1;
(14) putpixel(s1+round(x*m),s2-round(y*m),9);
(15) until (x=x2) and (y=y2);
(16) end;
(17) begin
(18) gd:=detect;
(19) initgraph(gd,gm,'C:\tp7\bgi\');
(20) cleardevice;
(21) s1:=getmaxx div 2;
(22) s2:=getmaxy div 2;
(23) line(0,s2,getmaxx,s2);
(24) line(s1,0,s1,getmaxy);
(25) h:=0.001;
(26) graf(-0.1,-pi);
(27) graf(0.1,-pi);
(28) graf(0.1,pi);
(29) graf(-0.1,pi);
(30) graf(-4,4);
(31) graf(-7,4);
(32) readln;
(33) closegraph;
(34) end.
```

Опишем кратко алгорим: в первой строке задается заголовок программы. Во второй строке подключается модуль crt и графический модуль, необходимый для вывода изображения фазового портрета на экран.

Далее задаются константа *m*, которая определяет единичный отрезок, и переменные, необходимые для построения фазового портрета.

В строках с 5 по 16 задается процедура построения фазовой траектории graf(x,y: real), зависящая от начальных условий. Процедура содержит цикл по построению точек фазовой траектории. В 10, 11 строках задаются приближенные значения переменных x, y с применением метода Эйлера, а в строке 14 подключается процедура изображения точки с заданными координатами.

В строках с 17 по 34 представлено тело программы. В 18, 19 строках подключается графический модуль, а в строке 20 очищается экран. В строках 21, 22 переменным s1, s2 присваиваются значения начала координат в середине экрана. В строках 23, 24 строятся оси координат, а в 25 строке задается шаг, в строках 26–31 строятся фазовые траектории при различных начальных условиях.

Данная программа имеет частичную универсальность, в ней следует менять начальные условия в зависимости от проведенного исследования.

Опишем построение фазового портрета системы (3) в математическом пакете MathCad (Рис. 4). Отметим, что применение различных информационных и коммуникационных технологий способствует развитию гибкости мышления, являющемуся важнейшим креативным качеством личности. При выполнении заданий с использованием математических методов и информационных и коммуникационных технологий у студентов повышается мотивация к изучению математики и информатики, а интегративная связь данных дисциплин способствует развитию интереса студентов к прикладной математике.

$t0 := 0 \qquad t1 := 100$

$m := 500$

$F(t,y) := \begin{pmatrix} \sin(y_1) \\ y_0 \end{pmatrix}$

$D := \mathrm{rkfixed}\left[\begin{pmatrix} 2 \\ -20 \end{pmatrix}, t0, t1, m, F\right] \quad R := \mathrm{rkfixed}\left[\begin{pmatrix} -2 \\ 20 \end{pmatrix}, t0, t1, m, F\right] \quad Da := \mathrm{rkfixed}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix}, t0, t1, m, F\right] \quad Ra := \mathrm{rkfixed}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ -12 \end{pmatrix}, t0, t1, m, F\right]$

$Q := \mathrm{rkfixed}\left[\begin{pmatrix} 3 \\ -20 \end{pmatrix}, t0, t1, m, F\right] \quad E := \mathrm{rkfixed}\left[\begin{pmatrix} 1.5 \\ -20 \end{pmatrix}, t0, t1, m, F\right] \quad Qa := \mathrm{rkfixed}\left[\begin{pmatrix} -3 \\ 20 \end{pmatrix}, t0, t1, m, F\right] \quad Ea := \mathrm{rkfixed}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ -11 \end{pmatrix}, t0, t1, m, F\right]$

$W := \mathrm{rkfixed}\left[\begin{pmatrix} -1 \\ 10 \end{pmatrix}, t0, t1, m, F\right] \quad U := \mathrm{rkfixed}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, t0, t1, m, F\right] \quad Wa := \mathrm{rkfixed}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, t0, t1, m, F\right] \quad Ua := \mathrm{rkfixed}\left[\begin{pmatrix} -2.5 \\ 20 \end{pmatrix}, t0, t1, m, F\right]$

$S := \mathrm{rkfixed}\left[\begin{pmatrix} -1.5 \\ 20 \end{pmatrix}, t0, t1, m, F\right] \quad A := \mathrm{rkfixed}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, t0, t1, m, F\right] \quad Sa := \mathrm{rkfixed}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, t0, t1, m, F\right] \quad Aa := \mathrm{rkfixed}\left[\begin{pmatrix} 2.5 \\ -20 \end{pmatrix}, t0, t1, m, F\right]$

Рис. 4. Фазовый портрет системы (3)

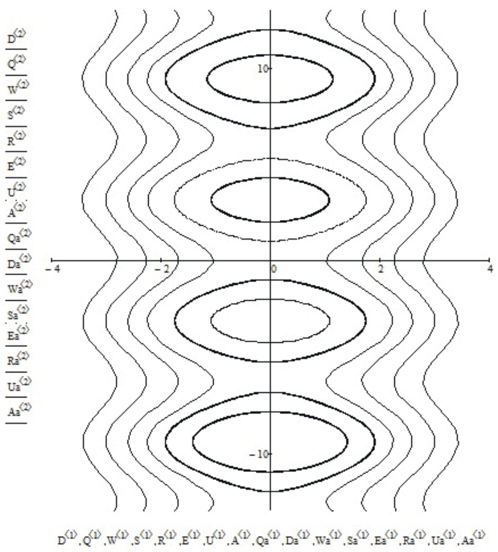

Рис. 4. Фазовый портрет системы (3)

Последний шаг – исследование систем двух дифференциальных уравнений, содержащих предельный цикл. После исследования нескольких нелинейных систем следует привести примеры систем, имеющих предельный цикл, и тем самым показать особенность нелинейных систем. Любая линейная система имеет неподвижные точки, которые легко можно найти, но только некоторые нелинейные системы дадут в фазовом портрете такую особую траекторию, как предельный цикл. Далее следует привести несколько примеров систем, в которых имеются предельные циклы, устойчивые или нет; циклы, являющиеся замкнутой кривой, отличной от окружности. Здесь рекомендуется дать задания, которые студенты выполняют самостоятельно.

В процессе исследования систем, содержащих предельный цикл, развиваются такие креативные качества, как гибкость, оригинальность мышления (находим оригинальный способ доказательства существования предельного цикла, студенты используют различные ИКТ при построении фазового портрета); эстетические качества личности (решают задачи на обнаружение предельного цикла, отличающиеся красотой доказательства); интуиция (студенты выдвигают гипотезы и проверяют их, интуитивно предполагают наличие некоторой замкнутой траектории, к которой притягиваются все остальные).

Четвертый этап – «Непрерывные динамические системы, заданные автономной системой трех дифференциальных уравнений». На данном этапе проводятся исследование линейных систем трех дифференциальных уравнений, нелинейных систем трех дифференциальных уравнений, а затем систем с хаотическим поведением.

Аналогично третьему этапу сначала исследуются линейные автономные системы трех дифференциальных уравнений. Во-первых, различными способами определяется характер неподвижных точек: с помощью непосредственного интегрирования дифференциальных уравнений и нахождения собственных значений и векторов матрицы коэффициентов. Во-вторых, студенты строят фазовые портреты систем в трехмерном пространстве, при этом они выбирают средство построения: математические пакеты или какую-либо среду программирования. В-третьих, проводится классификация неподвижных точек в зависимости от собственных значений матрицы коэффициентов.

Таким образом, у студентов формируются такие важные креативные качества, как гибкость мышления, умение выдвигать гипотезы и проверять их. Задачи следует строить так, чтобы каждую новую систему студенты решали новым способом, а после выдвижения гипотезы смогли проверить даст ли данный метод результат. Кроме того, рекомендуется ставить как «прямые» задачи (зная систему, студенты находят ее решение), так и «обратные» (задавая собственные значения, составляют линейную автономную систему трех дифференциальных уравнений). На основе выполненных заданий можно будет провести классификацию неподвижных точек.

После изучения линейных систем следует перейти к исследованию нелинейных автономных систем трех дифференциальных уравнений (см. подробнее статьи [4, с. 145, 5, с. 131]). Особо следует обратить внимание студентов на отличительную особенность нелинейных непрерывных динамических систем. Для этого следует привести в качестве примера систему Лоренца. При определенных значениях параметра *r* фазовый портрет данной системы меняется от притягивающей неподвижной точки к предельному циклу и к обнаружению хаотического поведения, в качестве дополнительных примеров можно предложить студентам исследовать системы Спротта [23, с. 647].

При использовании многоэтапного математико-информационного задания «Непрерывные динамические системы» у студентов развиваются креативные качества личности: оригинальность мышления, умение выдвигать гипотезы и проверять их, преодоление стереотипов мышления, умение прогнозировать результаты математической деятельности.

Преодоление стереотипов мышления, например, происходит в результате решения нетривиальных задач, требующих оригинального решения, изменения сложившихся взглядов на решение задачи. Преодоление одного из стереотипов мышления в математике можно проследить при изучении непрерывных динамических систем, где произошла смена парадигм. Было доказано, что предсказать поведение системы и управлять ею невозможно. Эстетические качества личности развиваются в результате решения задач, отличающихся красотой доказательств (исследование систем с хаотическим поведением) и выполнения художественной деятельности. В процессе изучения материала по данной теме устанавливается связь с бурно развивающимся в настоящее время математическим направлением фрактальной геометрии [20, с. 66]. В результате выполнения данного задания происходит полное усвоение основных понятий нелинейной динамики и методов исследования непрерывных динамических систем.

Библиографический список

1. Бабенко, А. С., Елкин, Д. В., Пигузов, А. А., Секованов, В. С., Смирнов Е. И. Особенности синергии алгоритмов и исследования множеств Жюлиа полиномов Чебышева [Текст] / А. С. Бабенко, Д. В. Елкин, А. А. Пишузов, В. С. Секованов, Е. И. Смирнов // МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФОРУМ (ИТОГИ НАУКИ. ЮГ РОССИИ). – Владиковказ : Южный математический институт Владикавказского научного центра Российской академии наук и Правительства Республики Северная Осетия-Алания (Владикавказ), 2017. – Т. 11. – С. 217–227.

2. Бабенко, А. С. Компьютерные средства при изучении непрерывных динамических систем как средства формирования креативности [Текст] / А. С. Бабенко // Информатизация образования – 2010 : материалы Международной научно-методической конференции, г. Кострома, 14–17 июня 2010 г. – Кострома : КГУ им. Н. А. Некрасова, 2010. – С. 248–252.

3. Бабенко, А. С. Развитие креативности студентов при решении «многослойных» задач [Текст] / А. С. Бабенко // Вестник Костромского государственного университета им. Н. А. Некрасова. Серия: Педагогика. Психология. Социальная работа. Ювенология. Социокинетика. – 2015. – № 1. – С. 126–127.

4. Бабенко А. С. Формирование гибкости мышления студентов при изучении систем с хаотическим поведением [Текст] / А. С. Бабенко // Ярославский педагогический вестник. Психолого-педагогические науки. – Ярославль : Изд-во ЯГПУ, 2013. – № 1. – Том II (Психолого-педагогические науки). – С. 145–148.

5. Бабенко, А. С. Формирование креативных качеств студентов с помощью многоэтапного математико-информационного задания «Системы трех дифференциальных уравнений» [Текст] / А. С. Бабенко // Вестник Костромского государственного университета им. Н. А. Некрасова. – 2013. – № 2. – С. 130–133.

6. Критерии оценивания выполнения заданий с развернутым ответом. Единый государственный экзамен, 2008 г. МАТЕМАТИКА, 11 класс [Электронный ресурс]. – М. : Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации, 2008. – Режим доступа: http://alexlarin.net /ege/C5.pdf, свободный.

7. Кроновер, Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории [Текст] / Т. Э. Кренкеля ; перевод с анг. Т. Э. Кренкеля и А. Л. Соловейчика. – М. : ПостМаркет, 2000. – 352 с.

8. Секованов, В. С., Бабенко, А. С., Селезнева, Е. М., Смирнова, А. О. Выполнение многоэтапного математико-информационного задания «Дискретные динамические системы», как средство формирования креативности студентов [Текст] / А. С. Бабенко, В. С. Секованов, Е. М. Селезнева, А. О. Смирнова // Вестник Костромского государственного университета им. Н. А. Некрасова. Серия: Педагогика. Психология. Социальная работа. Ювенология. Социокинетика. – 2016. – № 2. – С. 213–217.

9. Секованов, В. С. Геометрическая прогрессия и геометрия фракталов [Текст] / В. С. Секованов // Математика в школе. – 2006. – № 8. – С. 52–55.

10. Секованов, В. С., Ивков, В. А. Многоэтапное математико-информационное задание «Странные аттракторы» [Текст] / В. С. Секованов, В. А. Ивков // Вестник Костромского государственного университета им. Н. А. Некрасова. – 2013. – Т. 19. – № 5. – С. 155–157.

11. Секованов, В. С., Козырев, С. Б. Преодоление стереотипов мышления при рассмотрении понятия фрактальная размерность множества [Текст] / В. С. Секованов, С. Б. Козырев // Вестник Костромского государственного университета им. Н. А. Некрасова. – 2006. – Т. 12. – № 7. – С. 87–93.

12. Секованов, В. С. Концепция обучения фрактальной геометрии в КГУ им. Н. А. Некрасова [Текст] / В. С. Секованов // Вестник Костромского государственного университета им. Н. А. Некрасова. – 2013. – Т. 19. – № 5. – С. 153–154.

13. Секованов, В. С. Методическая система формирования креативности студента университета в процессе обучения фрактльной геометрии [Текст] : монография / В. С. Секованов. – Кострома : КГУ им. Н. А. Некрасова, 2005. – 279 с.

14. Секованов, В. С. Миронкин, Д. П. Изучение преобразования пекаря как средство формирования креативности студентов и школьников с использованием дистанционного обучения [Текст] / В. С. Секо-

ванов, Д. П. Миронкин // Вестник Костромского государственного университета им. Н. А. Некрасова. – 2013. – Т. 19. – № 1. – С. 190–195.

15. Секованов, В. С. О модифицированных преобразованиях Эно [Текст] / В. С. Секованов // Вестник Костромского государственного университета им. Н. А. Некрасова. – 2014. – Т. 20. – № 4. – С. 12–19.

16. Секованов, В. С. Преобразование Эно [Текст] / В. С. Секованов // Вестник Костромского государственного университета им. Н. А. Некрасова. – 2014. – Т. 20. – № 3. – С. 13–17.

17. Секованов В. С., Смирнов Е. И., Бабенко А. С., Селезнева Е. М., Смирнова А. О., Елкин Д. В. Методика визуализации множества Жюлиа с использованием информационных технологий [Текст] / В. С. Секованов, Е. И. Смирнов, А. С. Бабенко, Е. М. Селезнева, А. О. Смирнова, Д. В. Елкин // Ярославский педагогический вестник: научный журнал. – 2016. – № 3. – С. 137–147.

18. Секованов, В. С. Тетрадная форма обучения фрактальной геометрии и теории хаоса в рамках математического кружка [Текст] / В. С. Секованов // Des jeux a la creativite méthodes d’éducathion active. France, Juillet. Editions du JIPTO. – 2007. – С. 172–175.

19. Секованов, В. С., Фатеев, А. С., Белоусова, Н. В. Развиие гибкости мышления студентов при разработке алгоритмов построения дерева Фейгенбаума в различных средах [Текст] / В. С. Секованов, А. С. Фатеев, Н. В. Белоусова // Вестник Костромского государственного университета им. Н. А. Некрасова. – 2016. – Т. 22. – № 1. – С. 143–147.

20. Секованов, В. С. Что такое фрактальная геометрия? [Текст] : монография / В. С. Секованов. – М. : ЛЕНАНД, 2016. – 272 с. (Синергетика: от прошлого к будущему. № 75; науку ВСЕМ! Шедевры научно-популярной литературы (физика). № 114).

21. Секованов, В. С. Элементы теории дискретных динамических систем [Текст] : учебное пособие / В. С. Секованов. – СПб. : Лань, 2017. – 180 с.

22. Секованов, В. С. Элементы теории фрактальных множеств [Текст] : учебное пособие / В. С. Секованов. – Изд. 5-е, перераб. и доп. – М. : Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2013. – 248 с.

23. Sprott J. C. Some simple chaotic flows [Текст] / J. C. Sprott // Physical Review. – 1994. – V. 50, № 2. – P. R647-R650.

Bibliograficheskij spisok

1. Babenko, A. S., Elkin, D. V., Piguzov, A. A., Sekovanov, V. S., Smirnov E. I. Osobennosti sinergii algoritmov i issledovanija mnozhestv Zhjulia polinomov Chebysheva [Tekst] / A. S. Babenko, D. V. Elkin, A. A. Pishuzov, V. S. Sekovanov, E. I. Smirnov // MATEMATIChESKIJ FORUM (ITOGI NAUKI. JuG ROSSII). – Vladikovkaz : Juzhnyj matematicheskij institut Vladikavkazskogo nauchnogo centra Rossijskoj akademii nauk i Pravitel'stva Respubliki Severnaja Osetija-Alanija (Vladikavkaz), 2017. – T. 11. – S. 217–227.

2. Babenko, A. S. Komp'juternye sredstva pri izuchenii nepreryvnyh dinamicheskih sistem kak sredstva formirovanija kreativnosti [Tekst] / A. S. Babenko // Informatizacija obrazovanija – 2010 : materialy Mezhdunarodnoj nauchno-metodicheskoj konferencii, g. Kostroma, 14–17 ijunja 2010 g. – Kostroma : KGU im. N. A. Nekrasova, 2010. – S. 248–252.

3. Babenko, A. S. Razvitie kreativnosti studentov pri reshenii «mnogoslojnyh» zadach [Tekst] / A. S. Babenko // Vestnik Kostromskogo gosudarstvennogo universiteta im. N. A. Nekrasova. Serija: Pedagogika. Psihologija. Social'naja rabota. Juvenologija. Sociokinetika. – 2015. – № 1. – S. 126–127.

4. Babenko A. S. Formirovanie gibkosti myshlenija studentov pri izuchenii sistem s haoticheskim povedeniem [Tekst] / A. S. Babenko // Jaroslavskij pedagogicheskij vestnik. Psihologo-pedagogicheskie nauki. – Jaroslavl' : Izd-vo JaGPU, 2013. – № 1. – Tom II (Psihologo-pedagogicheskie nauki). – S. 145–148.

5. Babenko, A. S. Formirovanie kreativnyh kachestv studentov s pomoshh'ju mnogojetapnogo matematiko-informacionnogo zadanija «Sistemy treh differencial'nyh uravnenij» [Tekst] / A. S. Babenko // Vestnik Kostromskogo gosudarstvennogo universiteta im. N. A. Nekrasova. – 2013. – № 2. – S. 130–133.

6. Kriterii ocenivanija vypolnenija zadanij s razvernutym otvetom. Edinyj gosudarstvennyj jekzamen, 2008 g. MATEMATIKA, 11 klass [Jelektronnyj resurs]. – M. : Federal'naja sluzhba po nadzoru v sfere obrazovanija i nauki Rossijskoj Federacii, 2008. – Rezhim dostupa: http://alexlarin.net /ege/C5.pdf, svobodnyj.

7. Kronover, R. M. Fraktaly i haos v dinamicheskih sistemah. Osnovy teorii [Tekst] / T. Je. Krenkelja ; perevod s ang. T. Je. Krenkelja i A. L. Solovejchika. – M. : PostMarket, 2000. – 352 s.

8. Sekovanov, V. S., Babenko, A. S., Selezneva, E. M., Smirnova, A. O. Vypolnenie mnogojetapnogo matematiko-informacionnogo zadanija «Diskretnye dinamicheskie sistemy», kak sredstvo formirovanija kreativnosti studentov [Tekst] / A. S. Babenko, V. S. Sekovanov, E. M. Selezneva, A. O. Smirnova // Vestnik Kostromskogo gosudarstvennogo universiteta im. N. A. Nekrasova. Serija: Pedagogika. Psihologija. Social'naja rabota. Juvenologija. Sociokinetika. – 2016. – № 2. – S. 213–217.

9. Sekovanov, V. S. Geometricheskaja progressija i geometrija fraktalov [Tekst] / V. S. Sekovanov // Matematika v shkole. – 2006. – № 8. – S. 52–55.

10. Sekovanov, V. S., Ivkov, V. A. Mnogojetapnoe matematiko-informacionnoe zadanie «Strannye attraktory» [Tekst] / V. S. Sekovanov, V. A. Ivkov // Vestnik Kostromskogo gosudarstvennogo universiteta im. N. A. Nekrasova. – 2013. – T. 19. – № 5. – S. 155–157.

11. Sekovanov, V. S., Kozyrev, S. B. Preodolenie stereotipov myshlenija pri rassmotrenii ponjatija fraktal'naja razmernost' mnozhestva [Tekst] / V. S. Sekovanov, S. B. Kozyrev // Vestnik Kostromskogo gosudarstvennogo

universiteta im. N. A. Nekrasova. – 2006. – T. 12. – № 7. – S. 87–93.

12. Sekovanov, V. S. Koncepcija obuchenija fraktal'noj geometrii v KGU im. N. A. Nekrasova [Tekst] / V. S. Sekovanov // Vestnik Kostromskogo gosudarstvennogo universiteta im. N. A. Nekrasova. – 2013. – T. 19. – № 5. – S. 153–154.

13. Sekovanov, V. S. Metodicheskaja sistema formirovanija kreativnosti studenta universiteta v processe obuchenija fraktl'noj geometrii [Tekst] : monografija / V. S. Sekovanov. – Kostroma : KGU im. N. A. Nekrasova, 2005. – 279 s.

14. Sekovanov, V. S. Mironkin, D. P. Izuchenie preobrazovanija pekarja kak sredstvo formirovanija kreativnosti studentov i shkol'nikov s ispol'zovaniem distancionnogo obuchenija [Tekst] / V. S. Sekovanov, D. P. Mironkin // Vestnik Kostromskogo gosudarstvennogo universiteta im. N. A. Nekrasova. – 2013. – T. 19. – № 1. – S. 190–195.

15. Sekovanov, V. S. O modificirovannyh preobrazovanijah Jeno [Tekst] / V. S. Sekovanov // Vestnik Kostromskogo gosudarstvennogo universiteta im. N. A. Nekrasova. – 2014. – T. 20. – № 4. – S. 12–19.

16. Sekovanov, V. S. Preobrazovanie Jeno [Tekst] / V. S. Sekovanov // Vestnik Kostromskogo gosudarstvennogo universiteta im. N. A. Nekrasova. – 2014. – T. 20. – № 3. – S. 13–17.

17. Sekovanov V. S., Smirnov E. I., Babenko A. S., Selezneva E. M., Smirnova A. O., Elkin D. V. Metodika vizualizacii mnozhestva Zhjulia s ispol'zovaniem informacionnyh tehnologij [Tekst] / V. S. Sekovanov, E. I. Smirnov, A. S. Babenko, E. M. Selezneva, A. O. Smirnova, D. V. Elkin // Jaroslavskij pedagogicheskij vestnik: nauchnyj zhurnal. – 2016. – № 3. – S. 137–147.

18. Sekovanov, V. S. Tetradnaja forma obuchenija fraktal'noj geometrii i teorii haosa v ramkah matematicheskogo kruzhka [Tekst] / V. S. Sekovanov // Des jeux a la creativite méthodes d’éducathion active. France, Juillet. Editions du JIPTO. – 2007. – S. 172–175.

19. Sekovanov, V. S., Fateev, A. S., Belousova, N. V. Razviie gibkosti myshlenija studentov pri razrabotke algoritmov postroenija dereva Fejgenbauma v razlichnyh sredah [Tekst] / V. S. Sekovanov, A. S. Fateev, N. V. Belousova // Vestnik Kostromskogo gosudarstvennogo universiteta im. N. A. Nekrasova. – 2016. – T. 22. – № 1. – S. 143–147.

20. Sekovanov, V. S. Chto takoe fraktal'naja geometrija? [Tekst] : monografija / V. S. Sekovanov. – M. : LENAND, 2016. – 272 s. (Sinergetika: ot proshlogo k budushhemu. № 75; nauku VSEM! Shedevry nauno-populjarnoj literatury (fizika). № 114).

21. Sekovanov, V. S. Jelementy teorii diskretnyh dinamicheskih sistem [Tekst] : uchebnoe posobie / V. S. Sekovanov. – SPb. : Lan', 2017. – 180 s.

22. Sekovanov, V. S. Jelementy teorii fraktal'nyh mnozhestv [Tekst] : uchebnoe posobie / V. S. Sekovanov. – Izd. 5-e, pererab. i dop. – M. : Knizhnyj dom «LIBROKOM», 2013. – 248 s.

23. Sprott J. C. Some simple chaotic flows [Tekst] / J. C. Sprott // Physical Review. – 1994. – V. 50. – № 2. – P. R647–R650.

Reference List

1. Babenko A. S., Elkin D. V., Piguzov A. A., Sekovanov V. S., Smirnov E. I. Features of synergy of algorithms and research of sets of Zhyulia of Chebyshev polynoms / A. S. Babenko, D. V. Elkin, A. A. Pishuzov, V. S. Sekovanov, E. I. Smirnov // MATHEMATICAL FORUM (SCIENCE RESULTS. SOUTH of RUSSIA). – Vladikavkaz: Southern mathematical institute of the Vladikavkaz scientific center of the Russian Academy of Sciences and Government of the Republic Northern Ossetia-Alania (Vladikavkaz), 2017. – V. 11. – P. 217–227.

2. Babenko A. S. Computer means when studying continuous dynamic systems as a means of formation of creativity / A. S. Babenko // Education informatization – 2010: materials of the International scientific and methodical conference, Kostroma, on June 14–17, 2010 – Kostroma: KSU named after N. A. Nekrasov, 2010. – P. 248–252.

3. Babenko A. S. Development of students’ creativity at the solution of «multilayered» tasks / A. S. Babenko // Bulletin of Kostroma State University named N. A. Nekrasov. Series: Pedagogics. Psychology. Social work. Youth studies. Sociokinetics. – 2015. – № 1. – P. 126–127.

4. Babenko A. S. Formation of flexibility of students’ thinking when studying systems with chaotic behavior / A. S. Babenko // Yaroslavl Pedagogical Bulletin. Psychology and pedagogical sciences. – Yaroslavl : YSPU Publishing House, 2013. – № 1. – Volume II (Psychology and pedagogical sciences). – P. 145–148.

5. Babenko A. S. Formation of students’ creative qualities by means of the multi-stage mathematic-information task «Systems of Three Differential Equations» / A. S. Babenko // Bulletin of Kostroma State University named after N. A. Nekrasov. – 2013. – № 2. – P. 130–133.

6. Criteria of estimating performance of tasks with the developed answer. Unified state examination, 2008. Mathematics, 11th class [An electronic resource]. – M. : Federal service on supervision in the sphere of science and education of the Russian Federation, 2008. – Access mode: http://alexlarin.net /ege/C5.pdf, free.

7. Kronover R. M. Fractals and chaos in dynamic systems. Bases of the theory / T. E. Krenkel; the translation from English by T. E. Krenkel and A. L. Soloveychik. – M. : PostMarket, 2000. – 352 p.

8. Sekovanov V. S., Babenko A. S., Selezneva E. M., Smirnova A. O. Performance of the multi-stage mattematic-information task «Discrete Dynamic Systems» as a means of formation of students’ creativity / A. S. Babenko, V. S. Sekovanov, E. M. Selezneva, A. O. Smirnova // Bulletin of Kostroma State University

named after N. A. Nekrasov. Series: Pedagogics. Psychology. Social work. Youth studies. Sociokinetics. – 2016. – № 2. – P. 213–217.

9. Sekovanov V. S. A geometrical progression and geometry of fractals / V. S. Sekovanov // Mathematician at school. – 2006. – № 8. – P. 52–55.

10. Sekovanov V. S., Ivkov, VA. Multi-stage mathematic-information task «Strange Attractors» / V. S. Sekovanov, V. A. Ivkov // Bulletin of Kostroma State University named after N. A. Nekrasov. – 2013. – V. 19. – № 5. – P. 155–157.

11. Sekovanov V. S., Kozyrev S. B. Overcoming stereotypes of thinking by consideration of a concept fractal dimension of a set / V. S. Sekovanov, S. B. Kozyrev // Bulletin of Kostroma State University named after N. A. Nekrasov. – 2006. – V. 12. – № 7. – Page 87–93.

12. Sekovanov V. S. The concept of training of fractal geometry in KSU named after N. A. Nekrasov / V. S. Sekovanov // Bulletin of Kostroma State University named after N. A. Nekrasov. – 2013. – V. 19. – № 5. – P. 153–154.

13. Sekovanov V. S. The methodical system of formation of the student's creativity of the university in the course of training of fractal geometry: monograph / V. S. Sekovanov. – Kostroma: KSU named after N. A. Nekrasov, 2005. – 279 p.

14. Sekovanov V. S. ,Mironkin D. P. Studying of transformation of the baker as a means of formation of creativity of school and university students with use of distance learning / V. S. Sekovanov, D. P. Mironkin // Bulletin of Kostroma State University named after N. A. Nekrasov. – 2013. – V. 19. – № 1. – P. 190–195.

15. Sekovanov V. S. On the modified transformations Henon / V. S. Sekovanov // Bulletin of Kostroma State University named after N. A. Nekrasov. – 2014. – V. 20. – № 4. – P. 12–19.

16. Sekovanov V. S. Transformation Eno / V. S. Sekovanov // 47. Sekovanov, V. S. Transformation Eno / V. S. Sekovanov // Bulletin of Kostroma State University named after N. A. Nekrasov. – 2014. – V. 20. – № 3. – P. 13–17.

17. Sekovanov V. S., Smirnov E. I., Babenko A. S., Selezneva E. M., Smirnova A. O., Elkin D. V. A technique of visualization of a set of Zhyulia with use of information technologies / V. S. Sekovanov, E. I. Smirnov, A. S. Babenko, E. M. Selezneva, A. O. Smirnova, D. V. Elkin // Yaroslavl Pedagogical Bulletin: scientific magazine. – 2016. – № 3. – P. 137–147.

18. Sekovanov V. S. Writing-book form of education of fractal geometry and the theory of chaos within a mathematical circle / V. S. Sekovanov // Des jeux a la creativite méthodes d'éducathion active. France, Juillet. Editions du JIPTO. – 2007. – P. 172–175.

19. Sekovanov V. S., Fateev A. S., Belousova, N. V. Development of flexibility of students' thinking when developing algorithms of creation of a tree of Feygenbaum in various environments / V. S. Sekovanov, A. S. Fateev, N. V. Belousova // Bulletin of Kostroma State University named after N. A. Nekrasov. – 2016. – V. 22. – № 1. – P. 143–147.

20. Sekovanov V. S. What is fractal geometry? : monograph / V. S. Sekovanov. – M. : LENAND, 2016. – 272 pages. (Synergetrics: of the past to the future. № 75; science ALL! Masterpieces of scientific-popular literature (physicist). № 114).

21. Sekovanov V. S. Elements of the theory of discrete dynamic systems: manual / V. S. Sekovanov. – SPb. : Lan, 2017. – 180 p.

22. Sekovanov V. S. Elements of the theory of fractal sets: manual / V. S. Sekovanov. –the 5th edition, overworked and added – M. : Book house «LIBROKOM», 2013. – 248 pages.. – 2014. – V. 20. – № 3. – P. 13–17.

23. Sprott J. C. Some simple chaotic flows / J. C. Sprott // Physical Review. – 1994. – V. 50, № 2. – P. R647-R650.