DOI 10.24411/1813-145X-2019-1-0561
УДК 372.851

Г. Г. Хамов **https://orcid.org/0000-0002-3609-4307**
Л. Н. Тимофеева **https://orcid.org/0000-0002-1290-2947**

Решение задач на доказательство как составляющая исследовательской деятельности при изучении теории чисел

Для цитирования: Хамов Г. Г., Тимофеева Л. Н. Решение задач на доказательство как составляющая исследовательской деятельности при изучении теории чисел // Ярославский педагогический вестник. – 2019. – № 6 (111). – С. 60-66.

Статья посвящена проблеме использования задач, решение которых заключается в проведении доказательства, при подготовке студентов математических факультетов педагогических вузов. Изучение различных математических дисциплин, кроме формирования специальных знаний, должно способствовать развитию личности, в частности умения логически мыслить и доказательно обосновывать истинность утверждений, а также строить их из приведенных рассуждений в любой сфере деятельности.

Задачи, предполагающие проведение доказательства, не только способствуют выработке соответствующих умений и навыков, но и, что более важно, развивают логическое мышление, учат рассуждать, анализировать, аргументировать, обосновывать, доказывать и повышают общую культуру человека. Решение этих задач позволяет лучше освоить теоретический материал и научиться его применять, что способствует снижению формализма в преподавании математических дисциплин и повышению мотивации.

Круг задач, приведенных в статье, относится к дисциплине «Алгебра и теория чисел», к решению неопределенных (диофантовых) уравнений. Возможность использования этой темы для целенаправленного формирования исследовательских умений студентов в контексте их учебной математической деятельности и профессионального роста определяется тем, что, во-первых, решение диофантовых уравнений – это всегда исследование; во-вторых, ее элементы включены в программу математической подготовки учащихся классов с углубленным изучением математики, что является важной составляющей профессиональной подготовки. В работе приведены примеры задач, решаемых методом исследования возможных остатков от деления одного целого числа на другое или с использованием свойств делимости чисел.

Осознание студентами состава исследовательских действий, осуществляемых в процессе проведения доказательства представленных в статье задач, позволяет сделать их предметом целенаправленного усвоения основ исследовательской деятельности.

Ключевые слова: исследовательская деятельность, исследовательские умения, задача, доказательство, теория чисел, диофантово уравнение, целое число, натуральное число, делимость чисел, деление с остатком, свойства делимости.

G. G. Khamov, L. N. Timofeeva

Problems of proof as a component of research in the study of number theory

The article is devoted to the problem of using problems, the solution of which is to carry out evidence while preparing students of mathematical faculties of pedagogical universities. The study of various mathematical disciplines consists not only in the formation of special knowledge, but also should contribute to the development of personality, the ability to think logically and substantiate the truth of statements, as well as build them from the above reasoning in any field of activity.

Tasks that involve carrying out evidence not only contribute to the development of relevant skills and abilities, but also, more importantly, develop logical thinking, learn to reason, analyze, argue, substantiate, prove and contribute to improving the general culture of a person. Solving these problems allows us to master better the theoretical material and learn how to apply it in solving problems, which reduces the formalism in the teaching of mathematical disciplines and increase motivation.

The range of problems presented in the article refers to the discipline «Algebra and number theory», to the solution of indefinite (Diophantine) equations. The possibility of using this topic for the purposeful formation of student's research skills in the context of their educational mathematical activities and professional growth is determined by the fact that, firstly, the solution of Diophantine equations is always a study, and, secondly, its elements are included in the program of mathematical training of students of classes with in-depth study of mathematics, which is an important component of professional training. The article presents examples of problems solved by the method of investigation of possible residues from dividing one integer by another, or using the properties of divisibility of numbers.

Students' awareness of the composition of the research activities carried out in the process of proof of the tasks presented in the article, allows making the subject of targeted learning the basics of research.

Keywords: research activity, research skills, problem, proof, number theory; Diophantine equation; integer; natural number; divisibility of numbers; division with remainder; divisibility properties.

Изучение различных математических дисциплин трудно представить без проведения доказательств. Использование на занятии задач, предполагающих проведение доказательства, позволяет реализовать все функции задач [8, с. 48], в том числе решить немаловажную проблему мотивации обучаемых, так как изучение математики очень часто связано с достаточно высокой степенью формализма. Как правило, обучаемым предлагают готовые доказательства фундаментальных теорем или положений. Конечно, изучение и заучивание готовых доказательств имеет определенное значение, но с точки зрения практической значимости приносит не так много пользы. Как показывает практика, часто студенты не могут грамотно доказать математическое утверждение [14, с. 290-291]. Более того, при изучении ряда курсов, в частности из-за сокращения часов на изучение фундаментальной математики, доказательства убирают, заменяя их краткими пояснениями.

Современное образование ставит перед преподавателем разные задачи, среди которых на первом месте задача развития личности [5, с. 21], решение которой невозможно без воспитания умений логически мыслить и доказательно обосновывать истинность или ложность утверждений, возникающих не только в процессе профессиональной деятельности будущего преподавателя математики [3, с. 193; 12, с. 387-388]. Наличие таких умений позволяет судить об уровне грамотности и способностях специалиста и об общей культуре человека [13, с. 107].

Таким образом, реализуются требования изменения содержания образования, направленного на результаты педагогической подготовки, включающие в себя определенный уровень сформированности компетенций [20, с. 75].

При решении задачи на доказательство студенту необходимо не только выделить предпосылку и заключение, если условие задачи позволяет это сделать, но и построить цепочку умозаключений, приводящих к нужному результату [19, с. 26]. По сути, мы имеем дело с теоремой, следовательно, для нее сохраняются все известные особенности методики обучения доказательству теорем. В процессе необходимо находить нужную информацию и переносить ее, применять в условиях задачи, что способствует лучшему пониманию изученной теории через ее применение, то есть студент автоматически оказывается вовлечен в исследовательскую деятельность [4, с. 148; 11, с. 139]. Это одна из целей обучения, учитывая, что именно деятельность, а не совокупность знаний определена стандартом как главная ценность обучения [6, с. 142; 7, с. 33]. Исследовательская деятельность при проведении доказательства связана со способностью видеть проблемы, противоречия, выдвигать гипотезы, проявлять критичность мышления [1, с. 102], делать обобщения, формулировать и переформулировать задачи.

Использование таких задач ведет к усилению роли самостоятельной работы студентов, направленной на развитие умения учиться, формирование способности к саморазвитию, творческому применению приобретаемых знаний, способам адаптации к профессиональной деятельности в современных условиях [2, с. 50; 10, с. 62; 15, с. 152; 16, с. 33]. Обучение проведению доказательства происходит не сразу, требуется набор тренировочных задач на доказательство, решение которых состоит из одного или двух шагов, повторяются схемы рассуждений.

Применение задач на доказательство в процессе обучения имеет своим преимуществом тот факт, что и условие и результат считаются известными, необходимо построить только переход [9, с. 123]. Особенно актуальными становятся задачи на доказательства в курсе теории чисел [17, с. 95; 18, с. 164-167]. Например,

− Докажите, что квадрат целого числа при делении на 5 не дает остатков 2, 3; при делении на 8 не дает остатков 2, 3, 5, 6, 7.

− Докажите, что куб целого числа при делении на число 7 может давать в остатке числа 0, 1, 6; а при делении на 9 дает в остатке числа 0, 1, 8.

− Докажите, что целые числа вида $8x+2019$ не могут быть полным квадратом при любом целом значении x.

− Докажите, что числа вида $5x+2019$ при некоторых значениях переменной x будут квадратом целого числа. Найдите эти значения переменной x.

Приведем пример решения.

Число 2019 при делении на 5 дает остаток 4. Целое число, квадрат которого при делении на 5 дает остаток 4, имеет вид $5t+2$, $5t+3$, t – любое целое число. Поэтому

$$5x+2019=(5t+2)^2,\ 5x+2019=(5t+3)^2.$$

Из полученных формул находим выражение для переменной x:

$x=5t^2+4t-403$, $x=5t^2+6t-402$, t – целое число.

– Докажите, что числа вида $7x+2019$, $9x+2018$ не являются кубами целого числа при любом значении x.

– Докажите, что число вида $5x+2019$ равно кубу целого числа при некоторых значениях переменной x. Найдите общую формулу для переменной x, значения которой будут давать куб числа данного вида, и найдите наименьшее положительное значение x, при котором число $5x+2019$ является кубом.

Число 2019 при делении на 5 дает остаток 4. Целое число, куб которого при делении на 5 дает остаток 4, имеет вид $5t+4$, где t – любое целое число. Тогда

$$5x+2019=(5t+4)^3.$$

Из этого равенства получаем

$$x=25t^3+60t^2+48t-391,$$

и наименьшее положительное значение x: $x=145$ при $t=2$, $5\cdot 145+2019=14^3$.

– Докажите, что существует бесконечное множество целых чисел, не представимых в виде суммы кубов трех целых чисел.

Сумма кубов трех целых чисел $x^3+y^3+x^3$ при делении на 9 не дает в остатке чисел 4; 5. Поэтому числа вида $9t+4$, $9t+5$ при любом целом значении t не представимы в виде суммы трех кубов.

– Докажите неразрешимость в целых числах уравнений

$$46x^2-7y^2=2019,$$

$$31x^3-13y^3=2019.$$

Число $46x^2$ при делении на 7 может давать в остатке числа 0; 1; 2; 4, а число 2019 при делении на 7 дает в остатке число 3. Число $31x^3$ при делении на 13 может давать остатки 0; 1; 5; 8; 12, а число 2019 при делении на 13 дает остаток 4.

– Докажите, что уравнения

$$2x^2-11y=2019, \qquad (1)$$

$$3x^3-5y=2019 \qquad (2)$$

имеют бесконечное множество решений в целых числах x, y, и найдите для каждого из них общее решение.

Число 2019 при делении на 11 дает в остатке число 6, тот же остаток дает число вида $2x^2$ при делении на 11, если число x дает в остатке 5 или 6, следовательно, $x=11t+5$, $x=11t+6$, t – любое целое число. Подставляя эти формулы для переменной x в уравнение (1), получим общее решение:

$$\begin{cases} x=11t+5 \\ y=22t^2+20t-179 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x=11t+6 \\ y=22t^2+24t-177 \end{cases}, \ t \text{ – целое число.}$$

В уравнении (2) имеем: числа $3x^3$ и 2019 дают при делении на 5 один и тот же остаток 4 при $x=5t+2$, t – целое число. Общее решение уравнения (2):

$$\begin{cases} x=5t+2 \\ y=75t^3+90t^2+36t-399 \end{cases}, \ t \text{ – целое число.}$$

– Докажите, что число $x!+20$ не является полным квадратом для любого натурального значения x.

При $x\geq 6$ число $x!$ делится на 4^2, а число 20 делится на 4, но не делиться на 4^2, поэтому при $x\geq 6$ число $x!+20$ не является полным квадратом. При $1\leq x\leq 5$ проводится непосредственная проверка.

– Докажите, что число вида

$$2x!+8y+2019 \qquad (3)$$

не может быть квадратом целого числа при натуральных значениях переменной x и целочисленных y.

Так как число $x!$ при $x\geq 4$ делится на число 8, то при этом условии число, определяемое формулой (3), дает в остатке 3 при делении на 8, поэтому квадратом целого числа быть не может.

Далее надо доказать, что при $x=1, 2, 3$ число вида (3) также не будет квадратом целого числа. Подставляя $x=1$ в (3), имеем число $8y+2021$, при этом число 2021 при делении на 8 дает остаток 5, поэтому не может быть квадратом. При

$x=2,3$ получим числа, которые при делении на 8 дают в остатке число 7.

− Докажите неразрешимость в целых числах уравнения

$$39x^2-61y^2=77.$$

Преобразуем данное уравнение:

$$39x^2-61y^2=77 \Leftrightarrow$$
$$4(10x^2-15y^2-19)=x^2+y^2+1.$$

Так как квадрат целого числа при делении на 4 может давать остатки 0; 1, то число x^2+y^2+1 при делении на 4 не может дать остаток 0.

− Докажите неразрешимость уравнения

$$11^x+4^y=7^z \quad (4)$$

в натуральных числах x, y, z.

Так как число 7 при делении на 3 дает в остатке 1, то 7^z при любом натуральном z дает остаток 1. Число, стоящее в левой части уравнения (4) 11^x+4^y, при делении на 3 дает остаток 0, если x – нечетное число, и остаток 2, если x – четное.

− Докажите, что уравнение

$$x^2-2y^2=18z^2+2019$$

целочисленных решений не имеет.

Целое число $18z^2+2019$ при любом целом значении z делится на 3, но не делится на 9. Следовательно, ни одно из чисел x, y на 3 не делится. В противном случае число x^2-2y^2 должно либо делиться на 9, либо вообще не делится на 3. Тогда каждый из квадратов x^2, y^2 дает остаток 1, а число x^2-2y^2 при делении на 3 даст остаток 2, но не 0.

− Докажите, что для любых целых x, y, z, t

$$x^2+y^2=2019(z^2+t^2), \quad (5)$$

тогда и только тогда, когда $x=y=z=t=0$.

Так как квадрат целого числа при делении на 3 дает остатки 0 и 1, то сумма двух квадратов x^2+y^2, z^2+t^2 делится на 3 только в том случае, когда каждое из чисел делится на 3. При этом наибольшая степень числа 3, на которую делится левая часть равенства (5), будет четной, а правая часть, за счет числа 2019, – нечетной. Поэтому равенство (5) возможно только при $x=y=z=t=0$.

− Докажите, что произведение 2019 натуральных чисел может быть равно их сумме.

Исходя из условия задачи, запишем равенство

$$n_1\cdot n_2\cdot\ldots\cdot n_{2019}=n_1+n_2+\ldots+n_{2019}. \quad (6)$$

Полагаем $n_3=n_4=\ldots=n_{2019}=1$. Тогда из равенства (6) имеем

$$n_1\cdot n_2=n_1+n_2+2017 \Leftrightarrow$$
$$(n_1-1)\cdot(n_2-1)=2018.$$

Полученное равенство выполняется, например, при $n_1=3$, $n_2=1010$. Таким образом, сумма 2019 чисел $n_1=3$, $n_2=1010$, $n_3=n_4=\ldots=n_{2019}=1$ и их произведение равны числу 3030. Что и требовалось доказать.

− Докажите, что можно найти такое натуральное число a, умножив которое на число 3, получим произведение, оканчивающееся числом 19.

Уравнение

$$3x-100y=1 \quad (7)$$

имеет целочисленные решения x, y, так как числа 3 и 100 взаимно просты.

Решения уравнения (7) находятся по формулам:

$$\begin{cases} x=100t+67 \\ y=3t+2 \end{cases}, \ t \text{ – целое число.} \quad (8)$$

Полагаем в (8) $t=0$: $x=67$, $y=2$. Подставляем эти числа в уравнение (7), получаем $3\cdot67-100\cdot2=1$. Умножая обе части полученного равенства на число 19, получим $3\cdot1273-100\cdot38=19$. Таким образом, искомым числом может быть число 1273.

− Докажите, что ни одно двузначное число не равно сумме квадратов своих цифр.

Обозначим двузначное число $n=10x+y$, $1\le x\le 9$, $0\le y\le 9$. Исходя из условия задачи, рассмотрим равенство

$$10x+y=x^2+y^2 \Leftrightarrow x(10-x)=y(y-1).$$

Так как в правой части полученного равенства стоит произведение двух последовательных чисел, а левая часть таковой не является, то равенство возможно лишь при $x=0$, $y=0$ или $y=1$, что противоречит условию.

− Докажите, что сумма 2019 последовательных натуральных чисел не может быть степенью простого числа.

Запишем условие в виде равенства

$$m+(m+1)+\ldots+(m+2018)=(m+1009)\cdot2019.$$

Так как число 2019 делится на два простых числа 3 и 673, то левая часть равенства степенью одного простого числа быть не может. Что и требовалось доказать.

− Докажите, что сумма квадратов семи последовательных целых чисел не может быть квадратом целого числа.

Перепишем условие задачи следующим образом:

$$(m-3)^2+(m-2)^2+(m-1)^2+m^2+(m+1)^2+$$
$$+(m+2)^2+(m+3)^2=7m^2+28=7(m^2+4).$$

Предположим, что число $7(m^2+4)$ является квадратом целого числа. Тогда число m^2+4 должно делиться на 7, а число m^2, соответственно, должно при делении на 7 давать остаток 3, что невозможно. Следовательно, сумма квадратов семи последовательных целых чисел не может быть квадратом целого числа.

− Докажите, что существует двузначное число $\overline{pq}$, $p>q$, $2\le p\le 9$, $1\le q\le 8$, разность между которым и числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке дает полный квадрат.

Из условия задачи получим равенство

$$(10p+q)-(10q+p)=9(p-q).$$

Число $9(p-q)$ будет квадратом, если $p-q=r^2$. Так как $1\le p-q\le 8$, то число $p-q$ является квадратом при $p-q=1$ или $p-q=4$. Например, $\overline{pq}=43, 51, 73$ и т. д.

Библиографический список

1. Антонова И. В., Урусова Я. А. О различных подходах к определению понятий «критичность» и «критическое мышление» [Текст] / И. В. Антонова, Я. А. Урусова // Математика и математическое образование. Сборник трудов VII Международной научной конференции «Математика. Образование. Культура». – Тольятти : Изд-во ТГУ, 2015. – С. 99-103.

1. Багачук, А. В., Шашкина, М. Б. Организационная структура научно-исследовательской деятельности студентов – будущих учителей математики [Текст] / А. В. Багачук, М. Б. Шашкина // Современная математика и математическое образование в вузах и школах России: опыт, тенденции, проблемы : Межвузовский сборник научно-методических работ. – Вологда : Изд-во: ВГПУ «Русь», 2006. – С. 49-55.

2. Булекбаев, Д. А., Катранов, А. Г., Морозов, А. В. Формирование компетенций в курсе математики. [Текст] / Д. А. Булекбаев, А. Г. Катранов, А. В. Морозов // Труды Военно-космической академии имени А. Ф. Можайского. – 2015. – № 648. – С. 192-201.

3. Викторова, Ю. В. Формирование познавательных универсальных учебных действий в обучении математике [Текст] / Ю. В. Викторова // Тенденции и перспективы развития математического образования. Материалы XXXIII Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов. – Киров : Изд-во ВятГГУ: ООО «Радуга-ПРЕСС», 2014. – С. 147-149.

4. Ворванина И. В. Применение технологического подхода к обучению математике в условиях модернизации образования [Текст] / И. В. Ворванина // Инновационные подходы в математическом образовании : тезисы докладов участников Всероссийской научно-практической конференции. – Тобольск : Изд-во ТГСПА им. Д. И. Менделеева, 2014. – С. 21-25.

5. Демченкова Н. А., Фрешер Л. М. Типология исследовательских заданий как средство реализации исследовательской деятельности в средней школе [Текст] / Н. А. Демченкова, Л. М. Фрешер // Математика и математическое образование : сборник трудов VI Международной научной конференции «Математика. Образование. Культура». – Тольятти : Изд-во ТГУ, 2013. – С. 142-144.

6. Ольнева, А. Б. Интерактивные методы при обучении математике студентов различных направлений подготовки. [Текст] / А. Б. Ольнева // Математика и математическое образование : сборник трудов VII Международной научной конференции «Математика. Образование. Культура». – Тольятти : Изд-во ТГУ, 2015. – С. 32-35.

7. Папышев, А. А. Гуманизация – главное средство в системе задач для обучения математике [Текст] / А. А. Папышев // Математика и математическое образование : сборник трудов VII Международной научной конференции «Математика. Образование. Культура». – Тольятти : Изд-во ТГУ, 2015. – С. 47-49.

8. Романова М. О., Кушнир Т. И. Организация исследовательской деятельности студентов в процессе обучения математике, как одна из важных задач современного образования [Текст] / М. О. Романова, Т. И. Кушнир // Инновационные подходы в математическом образовании : тезисы докладов участников Всероссийской научно-практической конференции. – Тобольск : ТГСПА им. Д. И. Менделеева, 2014. – С. 122-124.

9. Рябинова, Е. Н., Хайруллина, Р. Н. Технология организации самообразовательной деятельности студентов при изучении высшей математики [Текст] / Е. Н. Рябинова, Р. Н. Хайруллина // Математика и математическое образование : сборник трудов VI Международной научной конференции «Математика. Образование. Культура». – Тольятти : Изд-во ТГУ, 2013. – С. 62-65.

10. Смирнов, Е. И., Белкина, В. Н, Тихомиров, А. С., Трошина, Т. Л. Фундирование в определении содержания математического образования будущего учителя [Текст] / Е. И. Смирнов, В. Н. Белкина,

А. С. Тихомиров, Т. Л. Трошина // Ярославский педагогический вестник. – 2013. – Том II. Психолого-педагогические науки. – № 3. – С. 134-140.

11. Смирнов, Е. И. Фундирование опыта в профессиональной подготовке и инновационной деятельности педагога [Текст] : монография / Е. И. Смирнов. – Ярославль : Изд-во ЯГПУ им. К. Д. Ушинского, 2012. – 646 с.

12. Тестов, В. А. Основные тенденции развития математического образования [Текст] / В. А. Тестов // Тенденции и перспективы развития математического образования : материалы XXXIII Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов. – Киров : Изд-во ВятГГУ, 2014. – С. 105-163.

13. Токарева, Л. И. Формирование учебно-познавательных действий при обучении учащихся доказательству неравенств в общеобразовательных учебных заведениях [Текст] / Л. И. Токарева // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона : периодический межвузовский сборник научно-методических работ. – Выпуск 17. – Киров : Изд-во: ООО «Радуга-ПРЕСС», 2015. – С. 290-303.

14. Федорова, П. С. Оптимизация образовательной среды как фактор развития самообразовательной деятельности студентов [Текст] / П. С. Федорова // Ярославский педагогический вестник. – 2013. – № 3. – С. 151-154.

15. Хадзугова Г. Т. Современные педагогические технологии [Текст] / Г. Т. Хадзугова // Обучение и воспитание : методики и практика 2013/2014 учебного года : сборник материалов XII Международной научно-практической конференции. – Новосибирск : Изд-во ЦРНС, 2014. – С. 33-38.

16. Хамов, Г. Г., Тимофеева, Л. Н. Диофантовы уравнения как средство формирования практико-ориентированной деятельности будущего учителя математики [Текст] / Г. Г. Хамов, Л. Н. Тимофеева // Ярославский педагогический вестник. – 2018. – № 3. – С. 94-100.

17. Хамов, Г. Г., Тимофеева, Л. Н. Задачи как средство организации исследовательской деятельности студентов [Текст] / Г. Г. Хамов, Л. Н. Тимофеева // Задачи в обучении математике, физике и информатике: теория, опыт, инновации : сборник материалов второй международной научно-практической конференции. – Вологда : ВоГУ, 2017. – С. 164-167.

18. Худошина, Ю. В. О некоторых проблемах математического образования [Текст] / Ю. В. Худошина // Современные проблемы школьного и вузовского математического образования : тез. докл. XXIV Всерос. семинара преподавателей математики ун-тов и педвузов. – М. : Ред. – изд. отдел Моск. гор. пед. ун-та, Изд-во Сарат. ун-та. – С. 25-27.

19. Чернявская, А. П. Организация обучения, ориентированного на результат [Текст] / А. П. Чернявская // Ярославский педагогический вестник. – 2014. – № 4. – С. 74-77.

Reference List

1. Antonova I. V., Urusova Ja. A. O razlichnyh podhodah k opredeleniju ponjatij «kritichnost'« i «kriticheskoe myshlenie» Different approaches to defining «criticality» and «critical thinking» [Tekst] / I. V. Antonova, Ja. A. Urusova // Matematika i matematicheskoe obrazovanie. Sbornik trudov VII Mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii «Matematika. Obrazovanie. Kul'tura». – Tol'jatti : Izd-vo TGU, 2015. – S. 99-103.

2. Bagachuk, A. V., Shashkina, M. B. Organizacionnaja struktura nauchno-issledovatel'skoj dejatel'nosti studentov – budushhih uchitelej matematiki = Organizational structure of research activities of students – future Mathematics teachers [Tekst] / A. V. Bagachuk, M. B. Shashkina // Sovremennaja matematika i matematicheskoe obrazovanie v vuzah i shkolah Rossii: opyt, tendencii, problemy : Mezhvuzovskij sbornik nauchno-metodicheskih rabot. – Vologda : Izd-vo: VGPU «Rus'«, 2006. – S. 49-55.

3. Bulekbaev, D. A., Katranov, A. G., Morozov, A. V. Formirovanie kompetencij v kurse matematiki = Formation of competences in the course of mathematics [Tekst] / D. A. Bulekbaev, A. G. Katranov, A. V. Morozov // Trudy Voenno-kosmicheskoj akademii imeni A. F. Mozhajskogo. – 2015. – № 648. – S. 192-201.

4. Viktorova, Ju. V. Formirovanie poznavatel'nyh universal'nyh uchebnyh dejstvij v obuchenii matematike = Formation of cognitive universal educational actions in mathematics training [Tekst] / Ju. V. Viktorova // Tendencii i perspektivy razvitija matematicheskogo obrazovanija. Materialy XXXIII Mezhdunarodnogo nauchnogo seminara prepodavatelej matematiki i informatiki universitetov i pedagogicheskih vuzov. – Kirov : Izd-vo VjatGGU: OOO «Raduga-PRESS», 2014. – S. 147-149.

5. Vorvanina I. V. Primenenie tehnologicheskogo podhoda k obucheniju matematike v uslovijah modernizacii obrazovanija = Applying a technological approach to mathematics education in the context of educational modernization [Tekst] / I. V. Vorvanina // Innovacionnye podhody v matematicheskom obrazovanii : tezisy dokladov uchastnikov Vserossijskoj nauchno-prakticheskoj konferencii. – Tobol'sk : Izd-vo TGSPA im. D. I. Mendeleeva, 2014. – S. 21-25.

6. Demchenkova N. A., Fresher L. M. Tipologija issledovatel'skih zadanij kak sredstvo realizacii issledovatel'skoj dejatel'nosti v srednej shkole = Typology of research assignments as a means of implementing research activities in high school [Tekst] / N. A. Demchenkova, L. M. Fresher // Matematika i matematicheskoe obrazovanie : sbornik trudov VI Mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii «Matematika. Obrazovanie. Kul'tura». – Tol'jatti : Izd-vo TGU, 2013. – S. 142-144.

7. Ol'neva, A. B. Interaktivnye metody pri obuchenii matematike studentov razlichnyh napravlenij podgotovki = Interactive methods when teaching mathematics to students of various training courses [Tekst] / A. B. Ol'neva // Matematika i matematicheskoe obra-

zovanie : sbornik trudov VII Mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii «Matematika. Obrazovanie. Kul'tura». – Tol'jatti : Izd-vo TGU, 2015. – S. 32-35.

8. Papyshev, A. A. Gumanizacija – glavnoe sredstvo v sisteme zadach dlja obuchenija matematike = Humanization is the main means in the system of tasks for teaching mathematics [Tekst] / A. A. Papyshev // Matematika i matematicheskoe obrazovanie : sbornik trudov VII Mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii «Matematika. Obrazovanie. Kul'tura». – Tol'jatti : Izd-vo TGU, 2015. – S. 47-49.

9. Romanova M. O., Kushnir T. I. Organizacija issledovatel'skoj dejatel'nosti studentov v processe obuchenija matematike, kak odna iz vazhnyh zadach sovremennogo obrazovanija = Organization of students' research activities in mathematics as one of the important tasks of modern education [Tekst] / M. O. Romanova, T. I. Kushnir // Innovacionnye podhody v matematicheskom obrazovanii : tezisy dokladov uchastnikov Vserossijskoj nauchno-prakticheskoj konferencii. – Tobol'sk : TGSPA im. D. I. Mendeleeva, 2014. – C. 122-124.

10. Rjabinova, E. N., Hajrullina, R. N. Tehnologija organizacii samoobrazovatel'noj dejatel'nosti studentov pri izuchenii vysshej matematiki = Technology of organization of students' self-educational activity in study of higher mathematics [Tekst] / E. N. Rjabinova, R. N. Hajrullina // Matematika i matematicheskoe obrazovanie : sbornik trudov VI Mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii «Matematika. Obrazovanie. Kul'tura». – Tol'jatti : Izd-vo TGU, 2013. – S. 62-65.

11. Smirnov, E. I., Belkina, V. N, Tihomirov, A. S., Troshina, T. L. Fundirovanie v opredelenii soderzhanija matematicheskogo obrazovanija budushhego uchitelja = Founding in determining the content of the mathematical education of the future teacher [Tekst] / E. I. Smirnov, V. N. Belkina, A. S. Tihomirov, T. L. Troshina // Jaroslavskij pedagogicheskij vestnik. – 2013. – Tom II. Psihologo-pedagogicheskie nauki. – № 3. – C. 134-140.

12. Smirnov, E. I. Fundirovanie opyta v professional'noj podgotovke i innovacionnoj dejatel'nosti pedagoga = Founding experience in teacher training and innovation activity [Tekst] : monografija / E. I. Smirnov. – Jaroslavl' : Izd-vo JaGPU im. K. D. Ushinskogo, 2012. – 646 s.

13. Testov, V. A. Osnovnye tendencii razvitija matematicheskogo obrazovanija = Main trends in mathematical education [Tekst] / V. A. Testov // Tendencii i perspektivy razvitija matematicheskogo obrazovanija : materialy XXXIII Mezhdunarodnogo nauchnogo seminara prepodavatelej matematiki i informatiki universitetov i pedagogicheskih vuzov. – Kirov : Izd-vo VjatGGU, 2014. – S. 105-163.

14. Tokareva, L. I. Formirovanie uchebno-poznavatel'nyh dejstvij pri obuchenii uchashhihsja dokazatel'stvu neravenstv v obshheobrazovatel'nyh uchebnyh zavedenijah = Formation of educational and cognitive actions in teaching students to prove inequalities in general educational institutions [Tekst] / L. I. Tokareva // Matematicheskij vestnik pedvuzov i universitetov Volgo-Vjatskogo regiona : periodicheskij mezhvuzovskij sbornik nauchno-metodicheskih rabot. – Vypusk 17. – Kirov : Izd-vo: OOO «Raduga-PRESS», 2015. – S. 290-303.

15. Fedorova, P. S. Optimizacija obrazovatel'noj sredy kak faktor razvitija samoobrazovatel'noj dejatel'nosti studentov . Optimization of the educational environment as a factor in the development of students' self-educational activities [Tekst] / P. S. Fedorova // Jaroslavskij pedagogicheskij vestnik. – 2013. – № 3. – C. 151-154.

16. Hadzugova G. T. Sovremennye pedagogicheskie tehnologii = Modern pedagogical technologies [Tekst] / G. T. Hadzugova // Obuchenie i vospitanie : metodiki i praktika 2013/2014 uchebnogo goda : sbornik materialov XII Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoj konferencii. – Novosibirsk : Izd-vo CRNS, 2014. – S. 33-38.

17. Hamov, G. G., Timofeeva, L. N. Diofantovy uravnenija kak sredstvo formirovanija praktiko-orientirovannoj dejatel'nosti budushhego uchitelja matematiki = Diophant equations as a means for forming the practical-oriented activities of a future Mathematics teacher [Tekst] / G. G. Hamov, L. N. Timofeeva // Jaroslavskij pedagogicheskij vestnik. – 2018. – № 3. – C. 94-100.

18. Hamov, G. G., Timofeeva, L. N. Zadachi kak sredstvo organizacii issledovatel'skoj dejatel'nosti studentov = Objectives as a means for organizing students' research activities [Tekst] / G. G. Hamov, L. N. Timofeeva // Zadachi v obuchenii matematike, fizike i informatike: teorija, opyt, innovacii : sbornik materialov vtoroj mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoj konferencii. – Vologda : VoGU, 2017. – S. 164-167.

19. Hudoshina, Ju. V. O nekotoryh problemah matematicheskogo obrazovanija = About some problems of mathematical education [Tekst] / Ju. V. Hudoshina // Sovremennye problemy shkol'nogo i vuzovskogo matematicheskogo obrazovanija : tez. dokl. XXIV Vseros. seminara prepodavatelej matematiki un-tov i pedvuzov. – M. : Red.-izd. otdel Mosk. gor. ped. un-ta, Izd-vo Sarat. un-ta. – S. 25-27.

20. Chernjavskaja, A. P. Organizacija obuchenija, orientirovannogo na rezul'tat = Organization of results-based training [Tekst] / A. P. Chernjavskaja // Jaroslavskij pedagogicheskij vestnik. – 2014. – № 4. – C. 74-77.