

И. З. Зейналова

УДК 372.851

<http://orcid.org/0000-0002-0553-9174>

Использование логических задач в контексте наглядного моделирования в обучении математике

Для цитирования: Зейналова И. З. Использование логических задач в контексте наглядного моделирования в обучении математике // Ярославский педагогический вестник. 2020. № 2 (113). С. 67-72.
DOI 10.20323/1813-145X-2020-2-113-67-72

Основная цель современного подхода к обучению математике состоит не в том, чтобы научить каждого обучающегося свободно владеть многоступенчатыми математическими абстракциями, а подготовить его к самоактуализации, самоопределению, самоорганизации когнитивной деятельности, равно как и к адекватному вхождению в реальную жизнь, с достаточно развитыми интеллектуальными операциями, и прежде всего – с достаточным уровнем логического мышления. Чтобы добиться этого, обучающийся должен целенаправленно работать над преодолением препятствий и «проблемных зон» в изучении математики. В реализации этого процесса большое значение имеет обучение математике с использованием четко структурированной теоретической базы математической деятельности за счет практико-ориентированной деятельности, основу которой может составить решение логических задач.

Нестандартные логические задачи, в отличие от стандартных, способствуют интеллектуальному развитию учащихся. Решение логических задач стимулирует их к проведению исследований, активизирует их умственные способности, способствует развитию аналитических навыков и навыков принятия решений. Богатство материально-технической базы в современных аудиториях позволяет педагогу уточнить и наглядно представить условия задачи с использованием электронных презентаций, рисунков, схем или других средств репрезентации материала, что способствует развитию процессов понимания и облегчает решение логической задачи.

Решение логических задач требует суждений, каждое из которых выражает определенные зависимости. Эти зависимости должны быть логически обоснованы, причем каждое предыдущее суждение должно составлять основу для следующего и приниматься по мере необходимости.

В статье подчеркивается роль текстовых задач, которые являются важным инструментом математического моделирования и формирования базовых математических представлений обучающихся в контексте наглядно-модельного обучения математике.

Ключевые слова: решение логических задач, наглядное моделирование, обучение математике, интеллектуальные операции, логическое мышление, методы решения, интеллектуальная активность учащихся.

I. Z. Zeinalova

Using logical problems in the context of visual modeling in teaching mathematics

The main goal of the modern approach to teaching mathematics is not to make each student fluent in multi-stage mathematical abstractions, but to prepare everyone for self-actualization, self-determination, self-organization of cognitive activity, as well as for adequate entry into real life, with sufficiently developed intellectual operations, and above all – with a sufficient level of logical thinking. To achieve this, the student must work purposefully in overcoming obstacles and «problem areas» in the study of mathematics. In the implementation of this process, teaching mathematics with a clearly structured theoretical base of mathematical activity is of great importance, with an emphasis on the development of practice-oriented activities, which can be based on solving logical problems. Unlike standard ones, non-standard logical tasks contribute to the intellectual development of students. Solving logical problems stimulates students to research, activate their mental abilities, and develop analytical and decision-making skills. In general, analysis and synthesis, which are important methods of students' thinking, play such a big role in solving a problem that, even in methodology, it is considered as the importance of decisions. The richness of the material and technical base in modern classrooms allows the teacher to clarify and visualize the conditions of the problem using electronic presentations, drawings, diagrams or other means of presenting the material, which naturally contributes to the development of understanding processes and facilitates the analysis and solution of the logical problem.

The solution of logical problems requires a number of judgments, each of which expresses certain dependencies. Judgments should form a chain of serious logical considerations, and each previous judgment should be the basis for the next and should be taken as necessary.

The article emphasizes the important role of text problems, which are an important tool for mathematical modeling and the formation of basic mathematical representations of students in the context of visual model teaching mathematics.

Keywords: solving logical problems, visual modeling, teaching mathematics, intellectual operations, logical thinking, solution methods, intellectual activity of students.

Введение

Актуальность рассмотрения вопросов наглядного моделирования в математическом образовании подтверждается, с одной стороны, ведущим положением математики как среди фундаментальных, так и среди прикладных наук (что находит свое яркое проявление в их интенсивной математизации и цифровизации); с другой, – объективной сложностью усвоения математического содержания, обусловленной прежде всего многоступенчатым характером математических абстракций и многообразием форм освоения математической деятельности. Для студентов при изучении математики, особенно на начальных этапах усвоения учебного материала, структура изучаемых математических объектов и их существенные связи не всегда очевидны за знаками и символами, выраженными в буквенно-цифровой и графической форме. Даже при наличии развитого алфавита (знания правил обращения с ним), навыков перевода и оперирования процесс обучения математике объективно может привести к формализму в овладении знаниями. Как отмечала Н. Г. Салмина, операционная деятельность не всегда ведет к развитию символического, в частности логического, мышления. Поэтому преодоление формализма в усвоении содержания математических объектов представляет подчас серьезную и далеко не решенную проблему как в среднем, так и в высшем образовании. Более того, целостность, являясь свойством адекватного восприятия, стимулирует усвоение нового математического знания обучаемыми, как правило, в контексте, с проявлением сущности математических объектов и процедур. Однако в дидактическом процессе целостность восприятия математических объектов и знаково-символическая деятельность ограничиваются временными интервалами и психофизиологическими возможностями восприятия субъектами деятельности. Поэтому при оптимизации обучения математике является актуальным обеспечение средствами наглядного моделирования целостности, доступности и устойчивости восприятия сложных математических объектов с целью раскрытия функциональных, операционных и мотивационных компонентов знаково-символической деятельности.

Включение нестандартных логических задач в процесс обучения математике особенно актуально, если содержание текстовых задач имеет прикладной и практико-ориентированный характер. Решение таких задач стимулирует учащихся к поиску исследований, активизирует их умственные способности, способствует развитию аналитических навыков и навыков принятия решений [Столяр, 1991]. В целом, анализ и синтез, которые являются важными приемами мышления учащихся, играют огромную роль при решении задачи. Сначала ученики анализируют конкретное содержание задачи, выявляют информацию о последовательности фактов и событий, пытаются определить существующие отношения между данными задачи. Читая вопрос, они концентрируются на нем, пытаются понять, о чем идет речь, в чем заключается проблема.

Богатство материально-технической базы в современных аудиториях позволяет педагогу уточнить и наглядно представить условия задачи, используя электронные презентации, рисунки, схемы или другие средства представления материала, что способствует развитию процессов понимания и облегчает анализ и решение логической задачи. Однако для построения наглядной модели сложной задачи требуется ряд логических суждений, выражающих определенные зависимости между данными текстовой задачи. Суждения должны формировать цепочку серьезных логических соображений, и каждое предыдущее суждение должно составлять основу для следующего и приниматься по мере необходимости [Тагиев, 2000].

В результате такой мыслительной деятельности сложная задача делится на ряд простых подзадач (подход Д. Пойя). Решение этих подзадач приводит к ответу на главный вопрос. Простые задачи располагаются в определенной последовательности как наглядные модели в соответствии с планом решения и помогают обучающимся четко и кратко изложить вопрос. Только потом начинается решение основной задачи. В этом процессе анализ и синтез, понимание и моделирование, узнавание и обобщение тесно связаны [Каримов, 2009]. Педагог задает серию вопросов обучающимся об указании ряда основополагающих условий, которые необходимы для решения задачи. Этот процесс продолжается до тех пор, пока не будет дан

ответ на последний вопрос, ведущий к решению исследуемой проблемы.

В связи с этим уместно вспомнить следующие мысли выдающегося педагога математика Д. Пойя: «Овладение математикой – это умение решать задачи, и не только стандартные задачи, а в то же время задачи, которые требуют определенной независимости мышления и изобретательности» [Адигозалов, 2018]. Поэтому первая и главная задача обучения математике в школе – выявить методологические аспекты процесса решения задач.

По словам Д. Пойя, «если учитель тратит время обучения ученика на шаблонные задания, это может убить интерес, замедлить умственное развитие учеников и привести к потере своих возможностей» [Алиев, 2003]. Развитие ученика зависит от того, является ли его деятельность репродуктивной или продуктивной в учебном процессе. Интенсивная поисковая среда, созданная учителем при решении логических задач в классе, и радость от открытий стимулируют учащихся постепенно приобретать навыки самостоятельного поиска решения задачи.

Нестандартные логические задачи, в отличие от стандартных, способствуют интеллектуальному развитию учеников. Относительно роли нестандартных задач в обучении математике А. Столяр отмечает следующее: «Мы говорим о тех нестандартных задачах, которые требуют эвристических методов, чтобы найти решение. Решение таких задач вызывает интеллектуальное пробуждение и развитие» [Ахмедли, 1998].

Как известно, логические задачи решаются с помощью логических операций. Иногда их решение требует длительных суждений, которые не могут быть предопределены. Иногда предпочтительнее использовать «комбинированный» метод. Текстовые задачи – классикой построения логических задач. Цель решения этих задач – определение объектов в соответствии с данными условиями или определение их расположения. Задачи, которые указывают на то, что некоторые предложения верны, а другие ложны, считаются более сложными и интересными. Нестандартные логические задачи, такие как, например, смешение, вес и переливание жидкости из одного сосуда в другой, являются наиболее распространенными в этом классе [Смирнов, 2012].

Можно выделить следующие основные методы решения логических задач:

- метод последовательных суждений;
- метод «Начиная с конца»;

- использование таблицы верных ответов;
- использование блок-схемы;
- использование логической алгебры;
- графический метод (дерево логических условий, круги Эйлера);
- «математический бильярд» [Тахирова, 2018].

Нельзя сказать, какой из этих методов лучше, поскольку необходимо их комплексное применение. Рассмотрим пример логической задачи, решаемой различными способами.

Задача 1. На вопрос о том, кто играет в шахматы, от пяти студентов (А, В, С, D, E) получили следующие пять ответов:

1. Если А играет, то В также играет.
2. D и E оба играют, или один из них играет.
3. Только один из В и С играет.
4. С и D либо оба играют, либо никто из них не играет.
5. Если E играет, то А и D тоже играют.

Определите, кто играет в шахматы [Гаралов, 2006].

Рассмотрим два разных способа решения проблемы:

Метод I (с обычными суждениями):

1. Допустим, А играет в шахматы. Тогда согласно (1) В также играет; согласно (3) С не играет; согласно (4) D тоже не играет. Тогда согласно (2) E играет, и согласно (5) D играет. Получается противоречие: D не играет, а D играет. Таким образом, гипотеза «А играет в шахматы» неверна, поскольку приводит к противоречию, ложным результатам. Итак, правильная гипотеза – «А не играет в шахматы».

2. Предположим, что ученик В играет в шахматы. Тогда в соответствии с (3) С не играет, и мы приходим к тому же противоречию, повторяя предыдущее суждение. Итак, В не играет в шахматы.

3. Предположим, что С играет в шахматы. Тогда согласно (4) D тоже играет; и это не противоречит ни одному из остальных условий: (1), (2), (3) и (5). Если мы предположим, что С не играет в шахматы, тогда получается противоречие с повторением соответствующего места. Итак, С и D играют в шахматы.

4. Осталось проверить, играет E или нет. Тогда согласно (5) А играет; мы получаем противоречие с повторением. Так что E не играет в шахматы.

Таким образом, по условиям (1) – (5) С и D играют в шахматы, В, А и E – не играют [Пойя, 1975].

Метод II. Укажем утверждение «А (В, С, D, E) играет в шахматы» как А (В, С, D, E).

Используя встроенные символы, (1)-(5) можно записать в виде алгебраических формул:

1) $A \Rightarrow B$;

2) $D \vee E$;

$(A \Rightarrow B)(D \vee E)(B \bar{C} \vee \bar{B} C)(CD \vee \bar{C} \bar{D})(E \Rightarrow AD) = D$ (правда)

Выразим импликации в левой части этого равенения дизъюнкциями и отрицанием. «Раскрываем

$(\bar{A} \vee B)(D \vee E)(B \bar{C} \vee \bar{B} C)(CD \vee \bar{C} \bar{D})(\bar{E} \vee AD) = D$ (правда),

$(\bar{A} D \vee \bar{A} E \vee B D \vee B E)(B \bar{C} \bar{D} \vee \bar{B} C D)(\bar{E} \vee AD) = D$ (правда),

$(\bar{A} \bar{B} C D \vee \bar{A} E B \bar{C} \bar{D} \vee \bar{A} E \bar{B} C D \vee B E \bar{C} \bar{D})(\bar{E} \vee AD) = D$ (правда),

$\bar{A} \bar{B} C D \bar{E} = D$ (правда).

Отсюда получается $A = B = E = Y(\text{false}) C = D = D$ (правда).

То есть двое из пяти учеников (С и D) играют в шахматы, а остальные (А, В и E) не играют.

Задача логических заданий состоит в том, чтобы повысить интеллектуальную активность учащихся и оживить учебный процесс. Они используются как на занятиях, так и в повседневной жизни [Смирнов, 2013].

Например, логические задачи о переливании жидкости вполне практичны. Поэтому особое внимание уделяется классификации таких задач и изучению путей их решения. Рассмотрим следующий пример.

Задача 2. 12-литровая ванна заполнена водой. Как разделить эту воду на две равные части с помощью пустых 9-литровых и 5-литровых сосудов? [Пойа, 1961]

Решение: Этот процесс может быть проиллюстрирован следующим образом:

12 л	5 л	9 л	
12	5	0	5-литровый бак заполняется водой
7	0	5	9-литровая ванна сливается
7	5	5	5-литровая ванна заполняется снова
2	1	9	9-литровый бак заполняется водой
2	1	0	вода выливается обратно в 12-литровый бак
11	5	1	5-литровый бак заполняется водой
6	0	6	вода выливается в 9-литровый бак

Можно с уверенностью сказать, что следующие обобщенные методы способствуют решению основной проблемы, если

– правильно определены функции, место и возможности логических задач в процессе обучения математике средствами наглядного моделирования;

3) $B \bar{C} \vee \bar{B} C$;

4) $CD \vee \bar{C} \bar{D}$;

5) $E \Rightarrow AD$

Поскольку (1) – (5) верны, их конъюнкция также верна.

скобки», выбрасывая члены дизъюнкций, которые равны Y (ложь).

– подробно определены способы, формы и средства использования логических заданий при обучении математике;

– разработаны нестандартные методологии решения логических задач, отвечающие требованиям активного обучения.

Это, в свою очередь,

– помогает развивать навыки решения логических задач и совершенствовать навыки освоения математической деятельности [Зейналова, 2016];

– способствует развитию логического мышления и творческих способностей обучающихся [Хамидов, 1990];

– повышает интерес к изучению математики у детей и способность применять теоретические знания на практике, устраняет формализм в знаниях, генерирует точные научные знания и способствует общему развитию [Зейналова, 2019].

Заключение

Использование логических задач в обучении математике предоставляет обучающимся широкие возможности для развития их логического мышления и интеллектуальных способностей. Внедрение систем логических задач и технологии их использования в обучении математике мотивирует студентов к поиску исследовательского характера, активизирует их мыслительную деятельность, развивает их аналитические навыки и навыки принятия решений.

Библиографический список

1. Адигозалов А. С. Теоретические основы школьного обучения математике : учебное пособие. Баку : АДПУ, 2018, 310 с. (на азерб. яз.)
 2. Алиев А. А. Веселая математика и игры с математическим содержанием / А. А. Алиев, Н. Р. Аббасов,

С. А. Гулиева, Г. Н. Джабраилова. Баку : АДПУ, 2003. 63 с. (на азерб. яз.)

3. Алиев И. Ф. Решение задач и развитие математического мышления учащихся // Начальное и дошкольное образование. 1987. № 4. С. 15-19 (на азерб. яз.)

4. Ахмедли Э. Н. Пути и средства развития математического мышления учеников. Баку, 1998. 66 с. (на азерб. яз.) (на азерб. яз.)

5. Ахмедов И. Общая методика преподавания математики в начальной школе. Гянджа, 2003. 89 с. (на азерб. яз.)

6. Бабаев М. Б. Интеллектуальные игры (вопросы логики). Баку : Алтун-книга, 2005. 144 с. (на азерб. яз.)

7. Гаралов З. И. Математика : учебник для 3 класса общеобразовательных школ / З. И. Гаралов, А. С. Османов, В. Ф. Мамедов. Баку : Педагогика, 2006, 176 с. (на азерб. яз.)

8. Зейналова И. З. Использование логических элементов в математике начальной школы // Обеспечение качества в высшем образовании : материалы республиканской научной конференции. ЛГУ, 23-24 декабря 2016 г. Санкт-Петербург : ЛГУ, 2016. С. 247-248 (на азерб. яз.)

9. Зейналова И. З. Классификация и методы решения логических задач в обучении математике в начальной школе : материалы XXII Республиканской научной конференции докторантов и молодых исследователей. I часть. АГПУ, 22-23 ноября, 2018. С. 44-46 (на азерб. яз.)

10. Зейналова И. З. Логические игровые задачи и методы их решения // Научные новости. 2019. № 2. С. 271-275. (на азерб. яз.)

11. Каримов Ю. Ш. Методы обучения : учебное пособие. Баку : Азернешр, 2009. 280 с. (на азерб. яз.)

12. Пойа Д. Как решать задачу / пер. с англ. Москва : Учпедгиз, 1961. 207 с.

13. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. Москва : Наука, 1975. 245 с.

14. Смирнов Е. И. Фундирование опыта в профессиональной подготовке и инновационной деятельности педагога : монография. Ярославль : Изд-во ЯГПУ им. К. Д. Ушинского, 2012. 646 с.

15. Смирнов Е. И. Фундирование в определении содержания математического образования будущего учителя / Е. И. Смирнов, В. Н. Белкина, С. Тихомиров, Т. Л. Трошина // Ярославский педагогический вестник. 2013. Том II. Психолого-педагогические науки. № 3. С. 134-140.

16. Столяр А. А. Как математика ум в порядок приводит. 2-е изд. Минск : Вышэйшая школа, 1991. 207 с.

17. Столяр А. А. Педагогика математики. 3-е изд. Минск : Высшая школа, 1986. 414 с.

18. Тагиев Ш. Т. Методология преподавания математики в начальных классах. Баку : Сабах, 2000. 20 с. (на азерб. яз.)

19. Тахирова Н. Нестандартные задачи по математике : учебное пособие / Н. Тахирова, А. Джафаров. Баку : АДПУ, 2018, 221 с. (на азерб. яз.)

20. Хамидов С. Роль упражнений в развитии математического мышления / С. Хамидов, М. Рахимова // Начальное и дошкольное образование. 1990. № 1. С. 13-17. (на азерб. яз.)

Reference list

1. Adigozalov A. S. Teoreticheskie osnovy shkol'nogo obuchenija matematike = Theoretical foundations of mathematics learning : uchebnoe posobie. Baku : ADPU, 2018, 310 s. (na azerb. jaz.)

2. Aliev A. A. Veselaja matematika i igry s matematicheskim sodержaniem = Funny mathematics and games with mathematical content / A. A. Aliev, N. R. Abbasov, S. A. Gulieva, G. N. Dzhabrailova. Baku : ADPU, 2003. 63 s. (na azerb. jaz.)

3. Aliev I. F. Reshenie zadach i razvitie matematicheskogo myshlenija uchashhihsja = Solving problems and developing students' mathematical thinking // Nachal'noe i doshkol'noe obrazovanie. 1987. № 4. S. 15-19 (na azerb. jaz.)

4. Ahmedli Je. N. Puti i sredstva razvitija matematicheskogo myshlenija uchenikov = Ways and means of developing students' mathematical thinking. Baku, 1998. 66 s. (na azerb. jaz.) (na azerb. jaz.)

5. Ahmedov I. Obshhaja metodika prepodavanija matematiki v nachal'noj shkole = General methodology of teaching mathematics in primary school. Gjandzha, 2003. 89 s. (na azerb. jaz.)

6. Babaev M. B. Intellektual'nye igry (voprosy logiki) = Intelligent games (logic issues). Baku : Altunkniga, 2005. 144 s. (na azerb. jaz.)

7. Garalov Z. I. Matematika : uchebnik dlja 3 klassa obshheobrazovatel'nyh shkol = Mathematics: textbook for the 3 grade of general education schools / Z. I. Garalov, A. S. Osmanov, V. F. Mamedov. Baku : Pedagogika, 2006, 176 s. (na azerb. jaz.)

8. Zejnalova I. Z. Ispol'zovanie logicheskikh jelementov v matematike nachal'noj shkoly = Use of logic elements in primary school Mathematics // Obespechenie kachestva v vysshem obrazovanii : materialy respublikanskoj nauchnoj konferencii. LGU, 23-24 dekabrja 2016 g. Sankt-Peterburg : LGU, 2016. S. 247-248 (na azerb. jaz.)

9. Zejnalova I. Z. Klassifikacija i metody reshenija logicheskikh zadach v obuchenii matematike v nachal'noj shkole = Classification and methods of solving logical problems in mathematics education in primary school: materialy XXII Respublikanskoj nauchnoj konferencii doktorantov i molodyh issledovatelej. I chast'. AGPU, 22-23 nojabr', 2018. s. 44-46 (na azerb. jaz.)

10. Zejnalova I. Z. Logicheskie igrovyje zadachi i metody ih reshenija = Logical game tasks and methods of solving them // Nauchnye novosti. 2019. № 2. S. 271-275. (na azerb. jaz.)

11. Karimov Ju. Sh. Metody obuchenija = Training methods uchebnoe posobie. Baku : Azerneshr, 2009. 280 s. (na azerb. jaz.)
12. Poja D. Kak reshat' zadachu = How to solve a problem / per. s angl. Moskva : Uchpedgiz, 1961. 207 s.
13. Poja D. Matematika i pravdopodobnye rassuzhdenija = Mathematics and plausible reasoning Moskva : Nauka, 1975. 245 s.
14. Smirnov E. I. Fundirovanie opyta v professional'noj podgotovke i innovacionnoj dejatel'nosti pedagoga = Founding of experience in teacher training and innovation: monografija. Jaroslavl' : Izd-vo JaGPU im. K. D. Ushinskogo, 2012. 646 s.
15. Smirnov E. I. Fundirovanie v opredelenii sodержanija matematicheskogo obrazovanija budushhego uchitelja = Founding in determining the content of the mathematical education of the future teacher / E. I. Smirnov, V. N. Belkina, S. Tihomirov, T. L. Troshina // Jaroslavskij pedagogicheskij vestnik. 2013. Tom II. Psihologo-pedagogicheskie nauki. № 3. С. 134-140.
16. Stoljar A. A. Kak matematika um v porjadok privodit = How mathematics puts the mind in order. 2-e izd. Minsk : Vyshnejshaja shkola, 1991. 207 s.
17. Stoljar A. A. Pedagogika matematiki = Mathematics pedagogics. 3-e izd. Minsk : Vysshaja shkola, 1986. 414 s.
18. Tagiev Sh. T. Metodologija prepodavanija matematiki v nachal'nyh klassah = Methodology for teaching mathematics in primary education. Baku : Sabah, 2000. 20 s. (na azerb. jaz.)
19. Tahirova N. Nestandartnye zadachi po matematike = Non-standard Mathematics tasks : uchebnoe posobie / N. Tahirova, A. Dzhafarov. Baku : ADPU, 2018, 221 s. (na azerb. jaz.)
20. Hamidov S. Rol' uprazhnenij v razvitii matematicheskogo myshlenija = The role of exercise in the development of mathematical thinking / S. Hamidov, M. Rahimova // Nachal'noe i doskol'noe obrazovanie. 1990. № 1. S. 13-17. (na azerb. jaz.)