МЕТОДОЛОГИЯ И ТЕХНОЛОГИЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Научная статья
УДК 372.851
DOI: 10.20323/1813-145X-2022-5-128-67-76
EDN: KWXTGO

Организация самостоятельной исследовательской деятельности в ходе изучения курса «Теория чисел»

Геннадий Григорьевич Хамов[1], Лариса Николаевна Тимофеева[2]✉
[1]Доктор педагогических наук, профессор кафедры алгебры ФГБОУ ВО «Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена». 191186, г. Санкт-Петербург, наб. реки Мойки, д. 48
[2]Кандидат педагогических наук, доцент кафедры математики ФГКВОУ ВО «Военно-космическая академия имени А. Ф. Можайского». 197198, г. Санкт-Петербург, ул. Ждановская, д. 13
[1]gghamov@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0002-3609-4307
[2]vka@mil.ru✉, https://orcid.org/0000-0002-1290-2947

Аннотация. Организация учебной деятельности студентов должна быть направлена на создание условий для вовлечения их в самостоятельную исследовательскую деятельность, что станет стимулом для более глубокого усвоения знаний, формирования необходимых компетенций, роста познавательной мотивации. Это актуально в современных условиях снижения осознанного понимания необходимости изучения математических дисциплин и, соответственно, уровня математической подготовки. В статье рассмотрена методика проведения занятий по дисциплине «Теория чисел» с использованием специально подобранных заданий, позволяющих студентам провести самостоятельное исследование. Дисциплина выбрана с учетом особенностей содержания, связанных с возможностью иллюстрации ее основных положений и их практического применения с помощью задач исследовательского типа. Основное содержание представлено диофантовыми уравнениями, решение и составление которых способствуют усвоению логики исследования (анализ условия, определение проблемы, выдвижение гипотезы, ее поверка и формулировка выводов). Использование таких заданий, позволяющих студентам самостоятельно применить имеющиеся знания, провести частичное или полноценное исследование, в процессе которого приобретаются новые знания и умения, способствует появлению у обучающихся интереса к математической деятельности и повышению математической грамотности. Акцент сделан на уравнения, решаемые методом исследования возможных остатков от деления одного целого числа на другое, с использованием свойств делимости, а также методом разложения многочленов на множители.

Предполагаемая самостоятельная работа первоначально выполняется под руководством преподавателя, но это уже становится началом проявления активности студентов, элементом творческой деятельности, зарождается общее представление о развитии научного знания. Результатом является приобретение опыта самостоятельной работы, который является вкладом в будущую готовность к профессиональной конкурентоспособности, постоянному самообразованию.

Ключевые слова: исследовательская деятельность; теория чисел; диофантово уравнение; делимость чисел; деление с остатком; простое число; разложение многочленов

Для цитирования: Хамов Г. Г., Тимофеева Л. Н. Организация самостоятельной исследовательской деятельности в ходе изучения курса «Теория чисел»// Ярославский педагогический вестник. 2022. № 5 (128). С. 67-76. http://dx.doi.org/10.20323/1813-145X-2022-5-128-67-76. https://elibrary.ru/kwxtgo

© Хамов Г. Г., Тимофеева Л. Н., 2022

METHODOLOGY AND TECHNOLOGY OF PROFESSIONAL EDUCATION

Original article

Formation of skills of independent teaching activity during the course of the course «number theory»

Gennady G. Khamov[1], Larisa N. Timofeeva[2]✉
[1]Doctor of pedagogical sciences, professor of the department of algebra, Herzen Russian state pedagogical university. 191186, Saint Petersburg, Reka Moika embankment, 48
[2]Candidate of pedagogical sciences, associate professor of the department of mathematics, Military space academy named after A. F. Mozhaisky. 197198, St. Petersburg, Zhdanovskaya st., 13
[1]gghamov@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0002-3609-4307
[2]vka@mil.ru✉, https://orcid.org/0000-0002-1290-2947

Abstract. The organization of students' educational activities should be aimed at creating conditions for their involvement in independent research activities, which will stimulate deeper assimilation of knowledge, the formation of necessary competencies, and the growth of cognitive motivation. This is quite relevant in modern conditions of a decrease in the conscious understanding of the need to study mathematical disciplines, and the level of mathematical training, respectively. This article discusses the methodology of conducting classes in the discipline «Number Theory» using specially selected tasks that allow students to conduct independent research. The discipline was chosen taking into account the peculiarities of its content related to the possibility of illustrating its main provisions and their practical application with the help of research-type tasks. The main content is represented by Diophantine equations, the solution and compilation of which contributes to the assimilation of the logic of the study (analysis of the condition, definition of the problem, hypothesis, its verification and formulation of conclusions). The use of such tasks, which allow students to independently apply existing knowledge, conduct research, during which new knowledge and skills are acquired, contribute to the emergence of students' interest in mathematical activities and improve mathematical literacy. The emphasis is placed on the equations solved by the method of studying the possible residuals from dividing one integer by another, using the divisibility properties, as well as by the method of factoring polynomials.

The proposed independent work is initially carried out under the guidance of a teacher, but this already becomes the beginning of the manifestation of students' activity, an element of creative activity, a general idea of the development of scientific knowledge is emerging. The result is the acquisition of independent work experience, which is a contribution to the future readiness for professional competitiveness, continuous self-education.

Keywords: research activity; number theory; Diophantine equation; divisibility of numbers; division with remainder; prime number; decomposition of polynomials

For citation: Khamov G. G., Timofeeva L. N. Formation of skills of independent teaching activity during the course of the course «number theory». *Yaroslavl pedagogical bulletin. 2022;(5):* 67-76. (In Russ.). http://dx.doi.org/10.20323/1813-145X-2022-5-128-67-76. https://elibrary.ru/kwxtgo

Введение

Изучение математических дисциплин является обязательной частью программ обучения в большинстве вузов. Это связано не только с тем, что трудно переоценить роль математики в создании и развитии всей человеческой цивилизации. Активная математическая деятельность дает запас конкретных знаний и оказывает огромное влияние на формирование интеллектуальных качеств каждого человека, развитие его мышления, помогает в повседневной жизни [Семенов, 2014]. Свойство универсальности математического языка и приобретаемых знаний используется при изучении других предметов, и не только таких родственных математике, как экономика, физика, или информатика, но и относящиеся к гуманитарному циклу. Однако успешность изучения математических дисциплин зависит, прежде всего, от желания самих обучаемых овладеть этой наукой. А наблюдаемое сейчас общее снижение математической подготовки студентов, и как следствие, снижение мотивации изучения различных разделов математики требует особого подхода к организации обучения, отбору материала, разработке методик [Старостина, 2020; Щетинина, 2020]. Немаловажным аспектом становится реализация условий, при которых приобретаемые знания участвуют в самостоятельной деятельности по добыванию новых знаний и развитию новых умений, в частности исследовательских [Дробышева, 2018; Маркова, 2015; Павленко, 2015].

В связи с этим организация качественной подготовки студентов невозможна без достаточного уровня творческой активности при изучении учебных дисциплин, при этом должна быть очевидна связь обучения с будущей преподавательской деятельностью и нацеленность на дальнейшую самостоятельную работу по собственному профессиональному совершенствованию [Алмазова, 2020; Бакманова, 2021]. В таких условиях от преподавателя требуется соответствующее управление учебным процессом, создание условий для эффективной самостоятельной работы, что включает в том числе решение проблемы распределения времени, наполнения содержания, обеспечивающих подход, основанный на собственном желании студента выполнять предложенные преподавателем задания [Керимова, 2014; Коваль, 2022; Мешкова, 2020].

Методы исследования

Основными методами исследования являлись анализ литературы [Князев, 2021; Кузнецова, 2015; Лидак, 2020; Михайленко, 2021; Овчинникова, 2015; Печкунова, 2019], наблюдение и обобщение имеющегося опыта преподавания. Материал собран на основе проведения лекционных и практических занятий с использованием элементов самостоятельной исследовательской деятельности.

Представленные в статье методические разработки могут быть применены на занятиях по теории чисел со студентами математических факультетов педагогических вузов.

Результаты исследования

Теория чисел представляет собой довольно абстрактный материал, наполненный формальными понятиями. Воспринимать его студентам со слабой математической подготовкой достаточно трудно. С другой стороны, с некоторыми понятиями студенты знакомы с начальной и средней школы. Поэтому введение заданий, предполагающих использование имеющегося математического опыта, опирается на понятия, применение которых очевидно для студентов, позволяет повысить мотивацию обучающихся, что приводит к осознанной познавательной потребности, таким образом, изучение материала для обучающегося становится личностно значимым, практически востребованным [Гамова, 2016].

Таким образом, теоретико-числовой материал обладает значительным потенциалом для участия студентов в самостоятельной исследовательской деятельности как составляющей учебной математической деятельности и в контексте их профессионального роста. Это определяется, в первую очередь, тем фактом, что числовой материал составляет базу программы школьной математики. Учащиеся обладают достаточным запасом знаний еще из начальной школы и некоторым опытом решения задач, оперирования основными понятиями. Вследствие этого студенты могут проводить с необходимой долей самостоятельности исследовательскую работу уже на этапе изучения теоретического материала. Кроме того, «Теория чисел» содержит достаточно задач, решение которых может представлять собой полноценное учебное исследование. Таким образом, студентам по силам справиться с основными моментами исследовательской работы: от осознания проблемы, построения математической модели, ее решения и получения результата, который может стать новым знанием. В этом смысле очень удобно использовать диофантовы уравнения, которые могут иллюстрировать применение различных теоретических положений дисциплины и являются моделями ряда задач. В итоге через содержание учебного материала можно вовлекать обучающихся в исследовательскую деятельность, формировать соответствующие умения и способствовать появлению познавательного мотива.

Конечно, несмотря на определенную подготовленность студентов, полностью самостоятельно провести все шаги исследования и прийти к результату им довольно непросто. Студенты должны увидеть образец деятельности, провести исследование в сопровождении преподавателя, прежде чем смогут самостоятельно проявлять владение исследовательскими умениями. При решении диофантовых уравнений, а тем более при их составлении, они имеют дело с выполнением алгоритма, который содержит необходимые шаги исследовательской деятельности, включающие элементы творчества. Такого рода задания наилучшим образом подходят для развития исследовательских умений в рамках занятий по «Теории чисел».

Решение диофантовых уравнений отличается разнообразием методов, они охватывают разные разделы и темы дисциплины. В частности, целый класс уравнений может быть решен с опорой на определение деления целых чисел с остатком и различные свойства делимости, причем многие свойства теории делимости могут быть получены как раз в процессе исследования специально подобранных задач [Хамов, 2018; Цюцюра, 2017].

К примеру, интересно использовать факт и, главное, его легко проверить, что при возведении целого числа в квадрат меняются остатки, которые давало это число при делении на другое целое число, точнее, некоторые остатки оно уже давать не может. Это позволяет исследовать и, соответственно, составить целый класс уравнений, решаемых с использованием вышеприведенного свойства. Скажем, если рассмотреть деление на три, то среди остатков при делении квадрата целого числа на 3 уже не будет остатка 2, а в случае, если делителем является 5, мы не сможем получить чисел 2 и 3 в остатке. Не составит труда доказать с учетом этих условий неразрешимость на множестве целых чисел уравнений типа

1) $x^2 - 3y^2 = 5$; 2) $3^n = x^2 + 25$;

3) $y^2 + 5x + 8 = 0$; 4) $y^2 = 5x^n + 2$.

Теперь приведем уравнения, решение которых опирается на свойства деления на простые числа, известные студентам из лекционного курса [Хамов, 2021].

В качестве иллюстрирующего примера воспользуемся следующим свойством: если, по крайней мере, один из множителей рассматриваемого произведения делится на заданное простое число, то и само произведение этих множителей будет делиться на это же самое число.

Допустим, требуется решить уравнение $22 \cdot 3^x = y^2$. Среди делителей левой части будут простые числа 2 и 11, причем в первой степени. Справа стоит квадрат целого числа, поэтому правая часть должна делиться на вторую степень чисел 2 и 11, что противоречит утверждению, полученному для левой части. Делаем вывод об отсутствии решений.

Или пусть дано, что квадраты некоторых целых чисел не делятся на предложенное простое число p, не меньшее 3, и более того, в остатках деления не дают числа, сумма которых равна p. Тогда можем утверждать, что деление суммы квадратов двух целых чисел на предложенное простое число p, $p \geq 3$, требует деления исходных чисел на него. Проверкой легко установить, что, к примеру, это свойство характерно для чисел 3, 7 или 11.

Тогда можно решить следующее уравнение $x^2 + y^2 = 2022\left(z^2 + t^2\right)$. Оно содержит четыре переменные.

Одно решение очевидно: $(0; 0; 0; 0)$.

Отметим, что число 2022 делится на 3, но на 9 уже делиться не будет, тогда как деление на 3 суммы квадратов $x^2 + y^2$ возможно лишь при делении на это число обоих чисел (x и y). Это определяет ограничение, что левая часть будет делиться обязательно на четную степень числа 3, а правая — на нечетную. Вывод: других решений не будет.

Следующим этапом являются задания на составление уравнений с заранее заданными методами решения. Рассмотрим тот же самый метод решения: будем одновременно делить правую и левую части уравнения на известное число. Предложим в качестве делителя число 7.

Студенты определяют числа, которые могут быть остатками от деления квадрата целого числа x^2 на 7 (это множество чисел $\{0, 1, 2, 4\}$), такие ограничения появляются при применении свойства деления степени числа и степени остатка такого же порядка. Далее делается утверждение, что для неразрешимости составляемого уравнения необходимо, чтобы квадрат числа давал остатки $\{3, 5, 6\}$.

Обозначим остаток от деления — r, делимое — a, неполное частное — q, тогда за основу берется формула $a = 7q + r$, которая следует из теоремы о делении с остатком.

Положим, $a = x^2$, $q = y$, r можно заменить любым числом, скажем 2022. В результате искомое уравнение можно записать $x^2 = 7y + 2022$, и оно не будет иметь решений, так как левая часть при делении на 7 как раз дает остаток 6.

Обучаемые могут дополнительно определить, что для неразрешимости уравнения, содержащего x^3, удобны будут остатки $\{2, 3, 4, 5\}$.

Можно записать более интересные неразрешимые уравнения этого же типа: $x^2 \pm 7y^n = 7z + r$, где $r = 3; 5; 6$, а n — натуральное число.

Поставим задачу сконструировать разрешимое в целых числах уравнение более общего вида, имеющее в качестве делителя число 7. Возьмем наше уже составленное уравнение $x^2 = 7y + 2022$ и добавим в левую часть слагаемое $2ax$, затем выделим полный квадрат, прибавив к левой и правой частям a^2. Далее число a подберем таким образом, чтобы остаток от деления суммы $2022 + a^2$ на семь принадлежал мно-

жеству $\{0, 1, 2, 4\}$, что гарантирует нам разрешимость уравнения. Пусть $a = 3$.

Итак, имеем $x^2 + 6x = 7y + 2022$ — искомое уравнение.

Решим его с помощью равносильного перехода к уравнению $(x+3)^2 = 7y + 2031$.

При делении на 7 правой части остаток оказывается равным 1, следовательно, выражение $(x+3)^2$ должно давать тот же остаток, а $x+3$, соответственно, остатки 1 и 6, то есть тогда $x+3 = 7t+1$ и $x+3 = 7t+6$.

Тогда множество решений можно представить с помощью формул:

$$\begin{cases} x = 7t+3 \\ y = 7t^2 + 12t - 285 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 7t+5 \\ y = 7t^2 + 16t - 281 \end{cases},$$

$t \in Z$.

По аналогии для самостоятельного исследования можно предложить составить уравнение третьей степени.

Записываем вариант такого уравнения: $x^3 + 3x^2 + 3x - 7y = 5$.

Оно также является разрешимым, и множество решений представлено следующим образом:

$$\begin{cases} x = 7t+2 \\ y = 49t^3 + 63t^2 + 27t + 3 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x = 7t+4 \\ y = 49t^3 + 105t^2 + 75t + 17 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x = 7t+5 \\ y = 49t^3 + 126t^2 + 108t + 30 \end{cases}, \ t \in Z.$$

Расширить множество исследуемых уравнений можно также за счет увеличения числа переменных и добавления коэффициентов к старшей степени уравнения. В частности, уравнения, получаемые по формуле $(7z+r)x^2 \pm 7y^n = 7m+5$, $m \in Z$, при $r = 0; 1; 2; 4$ не будут иметь решений в целых числах, так как остаток от деления выражения $(7z+r)x^2$ на 7 не является числом 5.

С другой стороны, составленные уравнения $(7z+r)x^2 \pm 7y = 7m+5$, $m \in Z$ разрешимы и имеют бесконечное множество решений, если число $r = 3; 5; 6$.

Примером может послужить уравнение $3x^2 - 7y = 2000$. Его решение имеет вид $\begin{cases} x = 7t \pm 2 \\ y = 21t^2 \pm 12t - 284 \end{cases}$, где знаки в формулах одинаковые и $t \in Z$.

Для дифференцирования заданий по уровню сложности также можно повысить степень уравнения и составить неразрешимые уравнения третьей степени, записываемые по формуле (слева любое число, дающее при делении на 7 число 5 в остатке) $(7z+r)x^3 \pm 7y^n = 5$, при $r = 0; 1; 3; 4; 6$.

Или, к примеру, разрешимое уравнение: $2x^3 - 7y = 5$.

Множество решений:

$$\begin{cases} x = 7t+3 \\ y = 98t^3 + 126t^2 + 54t + 7 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x = 7t+5 \\ y = 98t^3 + 210t^2 + 150t + 35 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x = 7t+6 \\ y = 98t^3 + 252t^2 + 216t + 61 \end{cases}, \ t \in Z.$$

Можно разнообразить вид уравнений и представить уравнения с коэффициентом, делящимся на 7 с остатком 5, при x^2, x^3:

$12x^2 \pm 7y^n = 7z + r$, $r = 1; 2; 4$. Решений нет.

$26x^3 \pm 7y^n = 7z + r$, $r = 1; 3; 4; 6$. Решений нет.

Несмотря на внешнюю простоту и доступность решения, требуется проявить определенную фантазию и применить имеющиеся знания как для решения, так и для составления этих уравнений.

Еще один способ решения и конструирования уравнений опирается на возможность разложения многочленов, входящих в него, на множители, с использованием известных формул. Эти множители приравниваются к делителям числа, которое должно остаться в правой части.

В качестве примера рассмотрим уравнение:

$x^2 = y^2 + 2y + 13 \Leftrightarrow x^2 - (y+1)^2 = 12 \Leftrightarrow (x-y-1)(x+y+1) = 12$.

Так как сумма $(x-y-1) + (x+y+1) = 2x$ — четное число, то оба числа $x-y-1$, $x+y+1$ либо четные, либо нечетные. Возможные варианты:

$\begin{cases} x-y-1=2 \\ x+y+1=6 \end{cases}$, $\begin{cases} x-y-1=-2 \\ x+y+1=-6 \end{cases}$,

$\begin{cases} x-y-1=6 \\ x+y+1=2 \end{cases}$, $\begin{cases} x-y-1=-6 \\ x+y+1=-2 \end{cases}$.

Множество решений: $\{(4,1);(-4,-3);(4,-3);(-4,1)\}$.

Аналогично можно предложить составить уравнение, решаемое данным методом, скажем, с применением формулы

$$(x+a)(y+b)=c \Leftrightarrow xy+bx+ay+ab=c.$$

Это уже задание более высокого уровня сложности.

Выберем в качестве коэффициентов при неизвестных числа $b=31$, $a=-65$, а $c=7$ — простое число:

$(x-65)(y+31)=7 \Leftrightarrow$

$xy+31x-65y-2015=7 \Leftrightarrow$

$xy+31x-65y=2022$ — искомое уравнение.

При его решении переходим к совокупности систем:

$\begin{cases} x-65=1 \\ y+31=7 \end{cases}$, $\begin{cases} x-65=7 \\ y+31=1 \end{cases}$, $\begin{cases} x-65=-1 \\ y+31=-7 \end{cases}$,

$\begin{cases} x-65=-7 \\ y+31=-1 \end{cases}$.

Записываем ответ в виде множества пар: $\{(66,-24);(72,-30);(64,-38);(58,-32)\}$.

Добавим в предыдущую формулу коэффициенты при переменных

$$(ax+b)(cy+d)=acxy+adx+bcy+bd. \quad (1)$$

Правая часть этой формулы определяет тип неопределенного уравнения, которое можно решить с ее помощью.

Требуется найти решение уравнения в целых числах:

$$33xy+24x-55y=287 \quad (2)$$

Сравнивая запись уравнения с формулой (1), приходим к системе:

$$\begin{cases} ac=33 \\ ad=24 \\ bc=-55 \end{cases}.$$

Из первых двух равенств можно сделать вывод, что $a=3$ или $a=-3$. При $a=3$: $c=11$, $d=8$, $b=-5$. Если взять $a=-3$, то знаки чисел c, d, b меняются на противоположные, однако это не отразится на записи левой части уравнения (2).

Чтобы левую часть уравнения (2) разложить на множители в соответствии с вышеприведенной формулой, прибавим к обеим частям этого уравнения число $bd=-40$:

$$(3x-5)(11y+8)=247.$$

Приравниваем полученные множители $3x-5$ и $11y+8$ к возможным делителям числа 247, при этом отметим, что их произведение должно быть равно этому числу. Таким образом, найдем все решения уравнения (2): x = 6, $y=1$.

Рассмотрим обратную задачу, составим уравнение с использованием формулы (1). В общем виде оно выглядит следующим образом:

$$acxy+adx+bcy=k. \quad (3)$$

Конструирование уравнения (3) начнем с задания одного из коэффициентов, например, $ac=21$, и выберем какой-то из вариантов возможных множителей: $a=3$, $c=7$. Получаем уравнение $(3x+b)(7y+d)=k$.

Отсюда, $\begin{cases} 3x+b=m \\ 7y+d=n \end{cases}$, $m\cdot n=k$.

Для минимизации последующих вычислений логично взять в качестве чисел m, n простые числа, например, $m=17$, $n=19$. Тогда

$$\begin{cases} 3x+b=17 \\ 7y+d=19 \end{cases}.$$

Имеем систему уравнений с двумя переменными первой степени относительно неизвестных величин.

Найдем их решения $\begin{cases} b=3t+2 \\ x=-t+5 \end{cases}$,

$\begin{cases} d=7t+5 \\ y=-t+2 \end{cases}$, t — целое число.

Для иллюстрации результата примем $t=2$ для первой системы, в таком случае $b=8$, $x=3$; а для второй $t=1$, тогда $d=12$, $y=1$. В результате наше искомое уравнение $21xy+36x+56y=227$ имеет единственное решение $x=3, y=1$.

Следующим шагом переходим к неопределенному уравнению вида

$$Ax^2+Bxy+Cy^2=D, \quad (4)$$

решение и составление которого опирается на формулу:

$$(ax+by)(cx+dy)=acx^2+(ad+bc)xy+bdy^2. \quad (5)$$

Работу по созданию уравнения начнем с подбора начальных числовых данных: выбираем коэффициент при одном из квадратов или задаем значение свободного члена. Примем $ac=28$, а точнее $a=7$, $c=4$. В результате приходим к системе $\begin{cases}7x+by=m\\4x+dy=n\end{cases}$, где произведение $m\cdot n$ будет играть роль свободного члена уравнения.

В качестве решения искомого уравнения зададим значения $x=2$, $y=3$, тогда, соответственно, получим уравнения $14+3b=m$, $8+3d=n$. Решения их можно записать в виде следующих множеств:

$$\begin{cases}b=t\\m=3t+14\end{cases},\ t\in Z;\ \begin{cases}d=z\\n=3z+8\end{cases},\ t\in Z$$

Потребуем, чтобы числа m и n были простыми, что позволит нам существенно минимизировать вычисления, когда будем решать составляемое уравнение. В соответствии с этим подбираем значения t и z. Примем $t=-3$, а $z=11$, тогда $b=-3$, $m=5$, $d=11$, $n=41$. Тогда искомое уравнение можно записать: $28x^2+65xy-33y^2=205$, а $\{(2;3),(-2;-3)\}$ — множество его решений.

Теперь перейдем к проблеме решения уравнения (4). Используя формулу (5), разложим многочлен, стоящий в левой части приведенного ниже уравнения, на множители:

$$10x^2+xy-21y^2=12.$$

И перейдем к системе

$$\begin{cases}ac=10\\ad+bc=1\\bd=-21\end{cases}.$$

Первое равенство дает следующие возможные варианты: $a=2$, $c=5$; $a=-2$, $c=-5$ или $a=1$, $c=10$; $a=-1$, $c=-10$.

Возьмем $a=2$, $c=5$, тогда, решая систему

$$\begin{cases}2d+5b=1\\bd=-21\end{cases},$$

получаем числа $b=3$, $d=-7$.

Итогом является переход к равносильному уравнению:

$$10x^2+xy-21y^2=12 \Leftrightarrow (2x+3y)(5x-7y)=12.$$

Проверка показывает: либо другие комбинации a и c дают то же разложение, либо получаемая система не разрешима на множестве целых чисел.

Результатом решения уравнения является множество $\{(3;2),(-3;-2)\}$.

Заключение

Следует отметить, что перед обучаемыми ставится цель не просто решить задачу, пусть даже исследовательского характера, а разобраться в алгоритме ее построения, научиться самим составлять задачи и придумывать новые алгоритмы. Причем задания построены по принципу постепенного усложнения, перехода от легких к более трудным, объем самостоятельного исследования на каждом уровне увеличивается, что позволяет студентам с любой подготовкой прочувствовать собственный успех, утвердиться в своих возможностях и повысить мотивацию к дальнейшей работе. Это отражается и на изменении ближайших целей обучаемых: появляется направленность на более глубокое усвоение материала и на подготовку к освоению нового материала.

Опыт проведения занятий с использованием данной методики показывает, что студенты активно включаются в работу, видят ее результаты, математические знания становятся актуальными, причем интерес проявляется у студентов с разным уровнем подготовки.

Таким образом, использование исследовательских заданий подобного плана на практических занятиях по «Теории чисел» оказывает влияние на такие общие задачи учебного процесса, как повышение мотивации к изучению математических дисциплин; рост познавательной активности студентов; практическое применение уже имеющихся знаний и полученных на лекциях теоретических положений; внесение вклада в формирование так называемых универсальных компетенций, в том числе способности осуществлять целенаправленный поиск, критический анализ и синтез получаемой информации, применять осознанный системный подход для решения поставленных задач, которые, несомненно, пригодятся при изучении других дисциплин и в дальнейшей профессиональной деятельности.

Библиографический список

1. Алмазова Т. А. К вопросу о разработке технологии формирования индивидуальной образовательной траектории обучающихся в процессе изучения дисциплин математического цикла / Т. А. Алмазова, Н. В. Никаноркина, О. В. Зилюкина // Современные проблемы науки и образования. 2020. № 2. С. 23.

2. Бакманова А. И. Подготовка студентов-математиков педагогического университета к развитию познавательной активности учащихся // Коррекционно-педагогическое образование. 2021. № 1-2 (25). С. 35-44.

3. Гамова Н. А. Развивающие возможности самостоятельной работы студентов / Н. А. Гамова, Н. В. Кулиш, И. П. Томина // Вестник Оренбургского государственного университета. 2016. № 2 (190). С. 10-14.

4. Дробышева И. В. Средства повышения эффективности обучения математике в условиях компетентностного подхода / И. В. Дробышева, Ю. А. Дробышев // Ученые записки Орловского государственного университета. 2018. № 4 (81). С. 313-316.

5. Керимова С. Б. Об использовании дифференцированного подхода в обучении математическому анализу будущих учителей математики // Ярославский педагогический вестник. 2014. Т. 2. № 3. С. 73-78.

6. Князев О. В. О методических особенностях преподавания дисциплины «алгебра и теория чисел» в вузе / О. В. Князев, О. О. Князева // Инновационные подходы к обучению математике в школе и вузе : материалы Всероссийской научно-практической конференции, Омск, 01-03 марта 2021 года. Омск : ФГБОУ ВО «Омский государственный педагогический университет», 2021. С. 225-230.

7. Коваль А. П. Индивидуализация профессионально-педагогической подготовки студентов // Актуальные исследования. 2022. № 23 (102). С. 73-75.

8. Кудрина Е. В. Об опыте использования задач исследовательского типа в учебном процессе / Е. В. Кудрина, М. В. Огнева // Образование в современном мире : сборник научных статей / под редакцией Ю. Г. Голуба. Саратов : Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, 2020. С. 44-49.

9. Кузнецова Н. В. Организация самостоятельной исследовательской деятельности учащихся в процессе обучения математике // Концепт. 2015. № 6. С. 16-20.

10. Лидак Л. В. Особенности развития исследовательских компетенций бакалавров в условиях информационной среды технического вуза / Л. В. Лидак, И. В. Сергеева // Гуманитарные науки (г. Ялта). 2020. № 2 (50). С. 20-28.

11. Маркова Т. Н. Организация научно-исследовательской деятельности студентов по дисциплине «Математика» в свете профессиональной направленности // Актуальные проблемы социально-экономической и экологической безопасности Поволжского региона : сборник материалов VII Международной научно-практической конференции, Казань, 15 марта 2015 года / Казанский филиал МИИТ. Казань : Издательский дом «Мир без границ», 2015. С. 260-263.

12. Мешкова Л. М. Формирование учебно-познавательной деятельности у будущих учителей начальных классов при использовании дифференцированного подхода в обучении (на примере изучения дисциплины «Математика») // Проблемы современного педагогического образования. 2020. № 67-1. С. 177-181.

13. Михайленко Т. С. Развитие исследовательской компетентности: задачный подход // Ярославский педагогический вестник. 2021. № 1 (118). С. 63-71.

14. Овчинникова М. В. Научно-исследовательская деятельность будущего учителя математики в системе его самостоятельной работы // Актуальные проблемы современной науки : IV Международная научно-практическая конференция : в трех томах, Алушта, 27-30 апреля 2015 года. Алушта : Ставропольский университет, 2015. С. 269-273.

15. Павленко С. А. Особенности организации исследовательской деятельности при обучении математике студентов технических вузов // Актуальные проблемы современного образования. 2015. № 1 (18). С. 32-34.

16. Печкунова Н. А. Организация самостоятельной учебно-исследовательской деятельности в техникуме / Н. А. Печкунова, А. В. Шаурова // Новый взгляд на систему образования : сборник материалов II Международной научно-практической конференции, Прокопьевск, 10 апреля 2019 года / ответственный редактор Е. Ю. Пудов. Прокопьевск : Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева, 2019. С. 46-52.

17. Семенов А. Т. О значении математики и математического образования в современном мире // Современные технологии в физико-математическом образовании : сборник трудов научно-практической конференции, Челябинск, 26-28 июня 2014 года / под редакцией С. А. Загребиной. Челябинск : Издательский центр ЮУрГУ, 2014. С. 117-121.

18. Старостина С. Е. Современное математическое образование: возможности формирования ИКТ-компетентности будущего учителя / С. Е. Старостина, А. Д. Федотова // Ученые записки Забайкальского государственного университета. 2020. Т. 15. № 5. С. 56-63.

19. Хамов Г. Г. Диофантовы уравнения как средство формирования практико-ориентированной деятельности будущего учителя математики / Г. Г. Хамов, Л. Н. Тимофеева // Ярославский педагогический вестник. 2018. № 3. С. 94-100.

20. Хамов Г. Г. Исследовательские задачи в обучении математике студентов педвузов / Г. Г. Хамов, Л. Н. Тимофеева // Ярославский педагогический вестник. 2021. № 6 (123). С. 38-45.

21. Цюцюра А. М. Особенности при составлении практических заданий по дисциплине «Алгебра и теория чисел», раздел: «Теория чисел» / А. М. Цюцюра, Е. М. Кузьменко // Математика, информатика, компьютерные науки, моделирование, образование : сборник научных трудов научно-практической конференции МИКМО-2017 и Таврической научной конференции студентов и молодых специалистов по математике и информатике, Симферополь, 10-14 апреля 2017 года / Таврическая академия (структурное подразделение) ФГАОУ ВО «КФУ им. В. И. Вернадского» ; под ред. В. А. Лукьяненко. Симферополь : ИП Корниенко А. А., 2017. С. 296-302.

22. Щетинина Н. Е. Психолого-педагогические основы дифференцированного подхода при обучении математике // Вопросы педагогики. 2020. № 8-1. С. 130-133.

Reference list

1. Almazova T. A. K voprosu o razrabotke tehnologii formirovanija individual'noj obrazovatel'noj traektorii obuchajushhihsja v processe izuchenija disciplin matematicheskogo cikla = On the development of technology for the formation of an individual educational trajectory for students in the process of studying mathematical cycle disciplines / T. A. Almazova, N. V. Nikanorkina, O. V. Ziljukina // Sovremennye problemy nauki i obrazovanija. 2020. № 2. S. 23.

2. Bakmanova A. I. Podgotovka studentov-matematikov pedagogicheskogo universiteta k razvitiju poznavatel'noj aktivnosti uchashhihsja = Training of student-mathematicians of the Pedagogical University for the development of students' cognitive activity // Korrekcionno-pedagogicheskoe obrazovanie. 2021. № 1-2 (25). S. 35-44.

3. Gamova N. A. Razvivajushhie vozmozhnosti samostojatel'noj raboty studentov = Developing opportunities for students to work independently / N. A. Gamova, N. V. Kulish, I. P. Tomina // Vestnik Orenburgskogo gosudarstvennogo universiteta. 2016. № 2 (190). S. 10-14.

4. Drobysheva I. V. Sredstva povyshenija jeffektivnosti obuchenija matematike v uslovijah kompetentnostnogo podhoda = Means of improving the efficiency of mathematics training in a competent approach / I. V. Drobysheva, Ju. A. Drobyshev // Uchenye zapiski Orlovskogo gosudarstvennogo universiteta. 2018. № 4 (81). S. 313-316.

5. Kerimova S. B. Ob ispol'zovanii differencirovannogo podhoda v obuchenii matematicheskomu analizu budushhih uchitelej matematiki = On the use of a differentiated approach in teaching mathematical analysis to future mathematics teachers // Jaroslavskij pedagogicheskij vestnik. 2014. T. 2. № 3. S. 73-78.

6. Knjazev O. V. O metodicheskih osobennostjah prepodavanija discipliny «algebra i teorija chisel» v vuze = On the methodological features of teaching the discipline «algebra and number theory» at the university / O. V. Knjazev, O. O. Knjazeva // Innovacionnye podhody k obucheniju matematike v shkole i vuze : materialy Vserossijskoj nauchno-prakticheskoj konferencii, Omsk, 01-03 marta 2021 goda. Omsk : FGBOU VO «Omskij gosudarstvennyj pedagogicheskij universitet», 2021. S. 225-230.

7. Koval' A. P. Individualizacija professional'no-pedagogicheskoj podgotovki studentov = Individualization of professional and pedagogical training of students // Aktual'nye issledovanija. 2022. № 23 (102). S. 73-75.

8. Kudrina E. V. Ob opyte ispol'zovanija zadach issledovatel'skogo tipa v uchebnom processe = About the experience of using research-type tasks in the learning process / E. V. Kudrina, M. V. Ogneva // Obrazovanie v sovremennom mire : sbornik nauchnyh statej / pod redakciej Ju. G. Goluba. Saratov : Saratovskij nacional'nyj issledovatel'skij gosudarstvennyj universitet imeni N. G. Chernyshevskogo, 2020. S. 44-49.

9. Kuznecova N. V. Organizacija samostojatel'noj issledovatel'skoj dejatel'nosti uchashhihsja v processe obuchenija matematike = Organization of students' independent research activities in the process of teaching mathematics // Koncept. 2015. № 6. S. 16-20.

10. Lidak L. V. Osobennosti razvitija issledovatel'skih kompetencij bakalavrov v uslovijah informacionnoj sredy tehnicheskogo vuza = Features of the development of research competencies of bachelors in the information environment in a technical university / L. V. Lidak, I. V. Sergeeva // Gumanitarnye nauki (g. Jalta). 2020. № 2 (50). S. 20-28.

11. Markova T. N. Organizacija nauchno-issledovatel'skoj dejatel'nosti studentov po discipline «Matematika» v svete professional'noj napravlennosti = Organization of students' research activities in the discipline «Mathematics» in the light of professional orientation // Aktual'nye problemy social'no-jekonomicheskoj i jekologicheskoj bezopasnosti Povolzhskogo regiona : sbornik materialov VII Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoj konferencii, Kazan', 15 marta 2015 goda / Kazanskij filial MIIT. Kazan' : Izdatel'skij dom «Mir bez granic», 2015. S. 260-263.

12. Meshkova L. M. Formirovanie uchebno-poznavatel'noj dejatel'nosti u budushhih uchitelej nachal'nyh klassov pri ispol'zovanii differencirovannogo podhoda v obuchenii (na primere izuchenija discipliny «Matematika») = Formation of educational and cognitive activity in future primary school teachers using a differentiated approach in teaching (using the example of studying the discipline «Mathematics») // Problemy sovremennogo pedagogicheskogo obrazovanija. 2020. № 67-1. S. 177-181.

13. Mihajlenko T. S. Razvitie issledovatel'skoj kompetentnosti: zadachnyj podhod = Developing research competence: a task approach // Jaroslavskij pedagogicheskij vestnik. 2021. № 1 (118). S. 63-71.

14. Ovchinnikova M. V. Nauchno-issledovatel'skaja dejatel'nost' budushhego uchitelja matematiki v sisteme ego samostojatel'noj raboty = Research activities of the

future mathematics teacher in the system of his independent work // Aktual'nye problemy sovremennoj nauki : IV Mezhdunarodnaja nauchno-prakticheskaja konferencija : v treh tomah, Alushta, 27-30 aprelja 2015 goda. Alushta : Stavropol'skij universitet, 2015. S. 269-273.

15. Pavlenko S. A. Osobennosti organizacii issledovatel'skoj dejatel'nosti pri obuchenii matematike studentov tehnicheskih vuzov = Features of the organization of research activities in teaching mathematics to students of technical universities // Aktual'nye problemy sovremennogo obrazovanija. 2015. № 1 (18). S. 32-34.

16. Pechkunova N. A. Organizacija samostojatel'noj uchebno-issledovatel'skoj dejatel'nosti v tehnikume = Organization of independent educational and research activities in the technical school / N. A. Pechkunova, A. V. Shaurova // Novyj vzgljad na sistemu obrazovanija : sbornik materialov II Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoj konferencii, Prokop'evsk, 10 aprelja 2019 goda / otvetstvennyj redaktor E. Ju. Pudov. Prokop'evsk : Kuzbasskij gosudarstvennyj tehnicheskij universitet imeni T. F. Gorbacheva, 2019. S. 46-52.

17. Semenov A. T. O znachenii matematiki i matematicheskogo obrazovanija v sovremennom mire = On the importance of mathematics and mathematical education in the modern world // Sovremennye tehnologii v fiziko-matematicheskom obrazovanii : sbornik trudov nauchno-prakticheskoj konferencii, Cheljabinsk, 26-28 ijunja 2014 goda / pod redakciej S. A. Zagrebinoj. Cheljabinsk : Izdatel'skij centr JuUrGU, 2014. S. 117-121.

18. Starostina S. E. Sovremennoe matematicheskoe obrazovanie: vozmozhnosti formirovanija IKT-kompetentnosti budushhego uchitelja = Modern mathematical education: opportunities for the formation of ICT competence of the future teacher / S. E. Starostina, A. D. Fedotova // Uchenye zapiski Zabajkal'skogo gosudarstvennogo universiteta. 2020. T. 15. № 5. S. 56-63.

19. Hamov G. G. Diofantovy uravnenija kak sredstvo formirovanija praktiko-orientirovannoj dejatel'nosti budushhego uchitelja matematiki = Diophantine equations as a means of shaping the practice-oriented activities of a future mathematics teacher / G. G. Hamov, L. N. Timofeeva // Jaroslavskij pedagogicheskij vestnik. 2018. № 3. C. 94-100.

20. Hamov G. G. Issledovatel'skie zadachi v obuchenii matematike studentov pedvuzov = Research problems in teaching mathematics to students of pedagogical universities / G. G. Hamov, L. N. Timofeeva // Jaroslavskij pedagogicheskij vestnik. 2021. № 6 (123). S. 38-45.

21. Cjucjura A. M. Osobennosti pri sostavlenii prakticheskih zadanij po discipline «Algebra i teorija chisel», razdel: «Teorija chisel» = Features when compiling practical tasks in the discipline «Algebra and Number Theory», section: «Number Theory» / A. M. Cjucjura, E. M. Kuz'menko // Matematika, informatika, komp'juternye nauki, modelirovanie, obrazovanie : sbornik nauchnyh trudov nauchno-prakticheskoj konferencii MIKMO-2017 i Tavricheskoj nauchnoj konferencii studentov i molodyh specialistov po matematike i informatike, Simferopol', 10-14 aprelja 2017 goda / Tavricheskaja akademija (strukturnoe podrazdelenie) FGAOU VO «KFU im. V. I. Vernadskogo» ; pod red. V. A. Luk'janenko. Simferopol' : IP Kornienko A. A., 2017. S. 296-302.

22. Shhetinina N. E. Psihologo-pedagogicheskie osnovy differencirovannogo podhoda pri obuchenii matematike = Psychological and pedagogical foundations of a differentiated approach in teaching mathematics // Voprosy pedagogiki. 2020. № 8-1. S. 130-133.

Статья поступила в редакцию 28.07.2022; одобрена после рецензирования 12.08.2022; принята к публикации 22.09.2022.
The article was submitted on 28.07.2022; approved after reviewing 12.08.2022; accepted for publication on 22.09.2022.