МАТЕМАТИКА

Г.В. КИОТИНА, О.В. ЗАЦЕПИНА

Косая равнобокая трапеция и её применение для классификации движений пространства

Посвящается памяти З.А.Скопеца
(к 90-летию со дня рождения).

З.А. Скопец – ведущий геометр своего времени. Его работы отличаются высоким мастерством. Они содержат множество новых интересных фактов, имеющих широкое практическое применение.

В данной работе, используя свойства косого параллелограмма, введенного и изученного в [1], и соответствующей ему косой равнобокой трапеции, введенной авторами, дается конструктивное решение вопроса классификации движений пространства, что позволило дополнить естественным образом известную классификацию одним частным видом и значительно сократить ее изложение.

Косой параллелограмм и косая равнобокая трапеция

Косым (пространственным) четырехугольником называется упорядоченная четверка точек (вершин), не принадлежащих одной плоскости.

В отличие от тетраэдра, косой четырехугольник, как и плоский, имеет две пары противоположных сторон, пару диагоналей и четыре внутренних угла. В отличие от плоского четырехугольника, для косого четырехугольника выполняются следующие *свойства*:

1. Любой внутренний угол меньше суммы углов, которые образуют его стороны с диагональю, выходящей из вершины данного угла.

2. Сумма внутренних углов косого четырехугольника меньше 2π.

Первое свойство вытекает непосредственно из того, что сумма двух плоских углов трехгранного угла больше третьего [1], [4], [3].

Второе свойство следует из первого с учетом того, что сумма всех плоских углов тетраэдра равна 4π, а в косой четырехугольник входит по одному углу из каждого трехгранного угла, то есть меньше половины.

Докажем признак равенства косых четырехугольников, который используем в дальнейшем.

Теорема 1. Два косых четырёхугольника равны, если равны их углы и сторона одного равна соответствующей стороне другого.

Доказательство:

Пусть в косых четырёхугольниках $A_1A_2A_3A_4$ и $B_1B_2B_3B_4$ равны стороны A_1A_2 и B_1B_2 и соответственные углы. На лучах A_1A_4 и A_2A_3 выберем точки C_4 и C_3 таким образом, что $A_1C_4 = B_1B_4$, $A_2C_3 = B_2B_3$. Получим, что косой четырехугольник $A_1C_4C_3A_2$ равен косому четырехугольнику $B_1B_4B_3B_2$, поэтому $\angle A_1C_4C_3 = \angle A_1A_4A_3 = \alpha$, $\angle A_2C_3C_4 = \angle A_2A_3A_4 = \beta$.

Предположим, что $C_3 = A_3$, $C_4 \neq A_4$, тогда получим, что внешний угол $\alpha\,(\beta)$ треугольника $C_4C_3A_4$ равен его внутреннему, с ним не смежному. Предположим, что $C_4 \neq A_4$ и $C_3 \neq A_3$. Получим, что в косом четырехугольнике $C_4C_3A_3A_4$ сумма углов будет равна 2π не зависимо от расположения точек C_4 и C_3 на лучах A_1A_4 и A_2A_3.

Из полученных противоречий следует, что $C_4 \equiv A_4$, $C_3 \equiv A_3$, то есть косой четырехугольник $A_1A_2A_3A_4$ равен косому четырехугольнику $B_1B_2B_3B_4$.

Определение 1. Косым параллелограммом в [1. С. 92] назван четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно равны.

Определение 2. Косой равнобокой трапецией назовем косой четырехугольник, у которого равны диагонали и пара противоположных сторон.

Из определений 1 и 2 следует, что если $A_1A_2A_3A_4$ – косая равнобокая трапеция, то $A_1A_3A_2A_4$ – косой параллелограмм, и обратно, если $A_1A_2A_3A_4$ –косой параллелограмм, то

$A_1A_3A_2A_4$ – косая равнобокая трапеция. Таким образом, каждое свойство косого параллелограмма является определенным свойством косой равнобокой трапеции и наоборот.

Косая равнобокая трапеция обладает целым рядом свойств, аналогичных свойствам равнобокой трапеции.

Теорема 2. У косой равнобокой трапеции равны две пары граней, проходящих через основания, а середины всех сторон служат вершинами ромба, диагональ которого, проходящая через середины оснований, является осью симметрии косой равнобокой трапеции и содержит центр сферы, описанной около всех ее вершин.

Доказательство. Пусть $A_1A_2A_3A_4$ – косая равнобокая трапеция, у которой $A_1A_2 = A_3A_4$, $A_1A_3 = A_2A_4$. Тогда две пары треугольников $A_1A_2A_3$ и $A_4A_3A_2$, $A_1A_3A_4$ и $A_4A_2A_1$ равны по трем сторонам.

Пусть O_1, O_2, O_3, O_4 середины соответственно сторон A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1. Пары отрезков O_1O_2 и O_3O_4; O_2O_3 и O_1O_4 параллельны между собой и равны соответственно половинам диагоналей A_1A_3 и A_2A_4. Так как $A_1A_3 = A_2A_4$, то четырехугольник $O_1O_2O_3O_4$ является ромбом, а значит, точки O_1 и O_3 симметричны относительно прямой O_4O_2, которая является биссектрисой угла $O_1O_4O_3$. Из равенства треугольников $A_1O_4O_1$ и $A_4O_4O_3$ следует, что $\angle A_1O_4O_1 = \angle A_4O_4O_3$. Отсюда получим, что прямые O_2O_4 и A_1A_4 перпендикулярны. Таким образом, прямая O_2O_4 является осью симметрии косой равнобокой трапеции $A_1A_2A_3A_4$. Точки прямой O_2O_4 равноудалены от пар точек A_2A_3 и A_1A_4, поэтому плоскость, точки которой равноудалены от точек A_1 и A_2, пересечет прямую O_2O_4 в точке, равноудаленной от всех вершин косой равнобокой трапеции, то есть в центре O сферы, описанной около всех её вершин.

Теорема 3. Косой четырехугольник является косой равнобокой трапецией, если выполняется одно из следующих свойств:

1) равны две противоположные стороны и два угла, прилежащие к одной из остальных сторон;

2) равны диагонали и два угла, прилежащие к одной стороне, или два угла между диагоналями и одной из сторон;

3) прямая, проходящая через середины противоположных сторон, является его осью симметрии;

4) равны две пары углов, прилежащих к противоположным сторонам;

5) равны две пары углов, образованных различными диагоналями и различными противоположными сторонами.

Первые три признака легко доказать, рассматривая различные пары равных треугольников.

Докажем свойство пять.

Пусть $A_1A_2A_3A_4$ – косой четырехугольник, у которого

$\angle A_1A_2A_4 = \alpha = \angle A_1A_3A_4 = \alpha_1$ $\angle A_3A_4A_2 = \beta = \angle A_2A_1A_3 = \beta_1$,

а P и Q – концы общего перпендикуляра прямых A_1A_3 и A_2A_4. Рассмотрим косой четырехугольник $A_1A_2A_4A_3$. В нем пары углов $\alpha = \alpha_1$ и $\beta = \beta_1$ являются внутренними (противоположными), и, следовательно, $\alpha + \beta < \pi$. Отсюда следует, что точки P и Q принадлежат соответственно отрезкам A_1A_3 и A_2A_4, так как лишь при таком их расположении в каждом из косых четырехугольников PQA_2A_1 и QPA_3A_4 сумма углов будет меньше 2π. Четырехугольники PQA_2A_1 и QPA_3A_4 имеют общую сторону и равные соответственные углы, поэтому по теореме 1 они равны, то есть $A_1P=A_4Q$, $PA_3=QA_2$, $A_1A_2=A_3A_4$. Получили, что в четырехугольнике $A_1A_2A_4A_3$ равны обе пары противоположных сторон $A_1A_3 =A_2A_4$ и $A_1A_2 =A_3A_4$ и по определению1 он является косым параллелограммом, а четырехугольник $A_1A_2A_3A_4$ – косой равнобокой трапецией.

Свойство 4 доказывается аналогично, если рассмотреть общий перпендикуляр PQ для прямых A_2A_3 и A_1A_4.

В [1. С. 93, 94] приведены два доказательства признака косого параллелограмма по равенству противоположных углов, с использованием теорем косинусов для треугольника и трехгранного угла. Мы привели третье доказательство этого признака, используя теорему 1.

Применение свойств косой равнобокой трапеции для классификации движений пространства

Классификация движений пространства, имеющих не менее двух инвариантных точек, не вызывает затруднений. Такими движениями являются следующие четыре вида:

1) тождественное преобразование, при котором инвариантны каждая точка, каждая плоскость, каждая прямая;

2) отражение от плоскости α, при котором инвариантны каждая точка и каждая прямая плоскости α, а также плоскости и прямые, перпендикулярные ей;

3) поворот на угол $\varphi \neq 180^0$ относительно прямой m, при котором инвариантны каждая точка прямой m и каждая плоскость, перпендикулярная ей;

4) отражение от прямой m (поворот на угол 180^0), при котором инвариантны каждая точка прямой m, каждая плоскость, ей перпендикулярная, и каждая плоскость, через неё проходящая.

Проведем классификацию движений, имеющих не более одной инвариантной точки, используя свойства косой равнобокой трапеции.

В учебных пособиях [2, 3] классификацию движений в этом случае проводят, опираясь на лемму о существовании в любом движении инвариантной прямой, при этом в [2] данная лемма принимается без доказательства, а в [3] приводится довольно сложное ее доказательство. В учебном пособии [4] классификация движений пространства проводится с помощью представления движений в виде композиции отражений от плоскостей. Решение вопроса занимает более двадцати страниц. В других учебных пособиях классификация движений приводится без доказательства.

Сформулируем свойства инвариантных элементов (точек, прямых и плоскостей), которыми будем пользоваться в дальнейшем:

1) если движение имеет инвариантные плоскость α и точку А (прямую m), то оно имеет инвариантную прямую (плоскость), перпендикулярную плоскости α и проходящую через точку А (прямую m);

2) если при движении инвариантны точка А и прямая m, то инвариантна плоскость, перпендикулярная прямой m и проходящая через точку А;

3) если движение имеет единственную инвариантную точку, то эта точка принадлежит каждой инвариантной прямой и каждой инвариантной плоскости;

4) если движение f не имеет трех инвариантных точек, не принадлежащих одной прямой, но имеет прямую q инвариантных точек и инвариантную плоскость, проходящую через прямую q, то f – отражение от прямой q.

Свойства 1-3 используются в [2, 3] при проведении классификации движений, а свойство 4 вытекает из приведенной классификации движений, имеющих не менее двух инвариантных точек.

I. Движение f имеет одну инвариантную точку.

Пусть $f(0) = 0$, $f(A_1) = A_2$, $f(A_2) = A_3$, $f(A_3) = A_4$. Тогда $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$, $OA_1 = OA_2 = OA_3 = OA_4$, $A_1 \neq A_2 \neq A_3 \neq A_4$.

Рассмотрим случай, когда $A_3 \equiv A_1$ и, следовательно, прямая $m_1 \equiv A_1A_2$ – инвариантна при движении f. Так как точка O – единственная инвариантная точка движения f, то по свойству 3 она принадлежит прямой m_1, а по свойству 2 движение f имеет инвариантную плоскость α_1, перпендикулярную прямой m_1 и проходящую через точку O.

Пусть $A_3 \neq A_1$, то есть точки A_1, A_2, A_3 все различны, и, следовательно, они не могут принадлежать одной прямой в силу условия (1).

Рассмотрим случай, когда точки A_i, $i=\overline{1,4}$ принадлежат одной плоскости α_2, и, следовательно, α_2 инвариантная плоскость.

По свойству 3 точка O принадлежит плоскости α_2, а по свойству 1 движение f имеет инвариантную прямую m_2, проходящую через точку O и перпендикулярную плоскости α_2.

Рассмотрим общий случай, когда точки A_i одной плоскости не принадлежат. Тогда $A_1A_2A_3A_4$ косая равнобокая трапеция, так как $A_1A_4 = A_3A_2$ и $A_1A_2 = A_3A_4$, и по теореме 2 середины O отрезков A_jA_{j+1} ($j = \overline{1,3}$) принадлежат одной плоскости α_3 и содержат точку O. Учитывая, что $f(O_1) = O_2$, $f(O_2) = O_3$, $f(O) = O$, получим, что α_3 инвариантная плоскость и ей принадлежит инвариантная точка O, а значит, инвариантна прямая m_3, проходящая через точку O и перпендикулярная плоскости α_3.

Во всех трех случаях имеем инвариантную плоскость α_i, инвариантную точку O, ей принадлежащую, и инвариантную прямую m_i, проходящую через инвариантную точку O и перпендикулярную плоскости α_i. Отсюда следует, что в инвариантной плоскости α_i индуцируется движение f, имеющее инвариантную точку O, то есть поворот на некоторый угол φ относительно точки O, а на прямой m_i индуцируется отражение от точки O.

При $\varphi \neq 180^0$ рассмотрим движение $f_1 = f \circ f_2$, где f_2 – отражение от плоскости α_i. В преобразовании f_1 инвариантна каждая точка прямой и нет других инвариантных точек, поэтому оно является преобразованием поворота относительно прямой m_i на угол $\varphi \neq 180^0$. Так как f_2 – инволюционное преобразование, то получим, что $f_1 = f \circ f_2$, т.е. f является композицией поворота f_1 на отражение f_2 от плоскости α_i не зависимо от порядка их выполнения. Движение f в этом случае называется поворотным отражением с углом поворота $\varphi \neq 180^0$, оно имеет единственную инвариантную плоскость, точку и прямую.

При $\varphi = 180^0$ рассмотрим движение $f_2 = f \circ f_2$, где f_2 – отражение от точки O. При движении f_2 инвариантна каждая точка плоскости α_i и каждая точка прямой m_i, то есть f_2 – тождественное преобразование, а следовательно, f – отражение от точки O. Преобразование f имеет в этом случае связку инвариантных прямых и плоскостей.

II. Движение не имеет инвариантных точек.

1. Движение f имеет по крайней мере одну инвариантную плоскость. Так как f не имеет инвариантных точек, то в плоскости α индуцируется или параллельный перенос g_a на вектор $\vec{a}$, или скользящее отражение g от прямой m. В обоих случаях в плоскости α имеется инвариантная прямая b, а значит (по свойству1) инвариантна плоскость β, перпендикулярная к плоскости α и проходящая через прямую b, в которой также индуцируется одно из указанных движений. Так как на прямой b индуцируется параллельный перенос на некоторый вектор $\vec{a}$, то возможны следующие три случая:

а) в каждой из плоскостей α и β индуцируется параллельный перенос g_a на вектор $\vec{a}$;

б) в одной из плоскостей (например) индуцируется движение g_a, а в другой скользящее отражение g от прямой b, на тот же самый вектор $\vec{a}$;

в) в каждой из плоскостей α и β индуцируется скользящее отражение от прямой b на один и тот же вектор $\vec{a}$.

В случаях а) и б) рассмотрим движение $f_2 = f \circ g^{-1}$, где g^{-1} □ параллельный перенос на вектор $\vec{a}$. В первом случае при движении f_2 инвариантна каждая точка плоскостей α и β и, следовательно, f_2 – тождественное преобразование, а f – параллельный перенос. Во втором случае каждая точка плоскости α – инвариантна, а других инвариантных точек нет, то есть f_2 является отражением от плоскости α, а движение f является композицией отражения от плоскости α и параллельного переноса на вектор $\vec{a}$, причем независимо от порядка их выполнения. Движение f в этом случае называется скользящим отражением и имеет одну инвариантную плоскость, которой принадлежат середины всех отрезков, соединяющих соответственные точки, и пучок инвариантных плоскостей, параллельных вектору $\vec{a}$ и перпендикулярных плоскости α.

В случае в) при движении f_2 инвариантны любая точка прямой b и плоскости α и β. По свойству 4 оно является отражением от прямой b. Движение f в этом случае является композицией отражения от прямой b и параллельного переноса на вектор $\vec{p}$, параллельный b, не зависимо от их порядка. Такое движение естественно назвать скользящим отражением от прямой b. Этот вид движений ранее в учебной литературе не выделялся. Скользящее отражение от прямой имеет одну инвариантную прямую и пучок инвариантных плоскостей, через нее проходящих.

2. Движение f не имеет инвариантных точек и плоскостей.

Пусть $f(A_i) = A_{i+1}$, $i = \overline{1,4}$, а M_2 и M_3 – середины соответственно отрезков A_1A_3 и A_2A_4. Тогда $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5$, $A_1A_3 = A_2A_4$, $\angle A_1A_2A_3 = \angle A_2A_3A_4$; $f(M_2) = M_3$, $A_2M_2 = A_3M_3$, а прямые A_2M_2 и A_3M_3 перпендикулярны соответственно прямым A_1A_3 и A_2A_4 как медианы в равнобедренных треугольниках. Отсюда следует, что четырехугольник $A_2M_2M_3A_3$ является косой равнобокой трапецией по определению, поэтому $\angle A_2M_2M_3 = \angle M_2M_3A_3 = \beta$. Пусть B_2, B_3 – концы отрезка общего перпендикуляра скрещивающихся прямых A_2M_2 и A_3M_3. Косой четырехвершинник $B_2A_2A_3B_3$ является косой равнобокой трапецией по свойству 4, так как равны углы $\beta = \angle B_2A_2A_3$ и $\beta_1 = \angle A_2A_3B_3$, как половины равных углов, поэтому $B_2A_2 = A_3B_3$ и β – острый. Точки B_2, B_3 принадлежат соответственно отрезкам A_2M_2 и A_3M_3, если угол α – острый, если же угол α – тупой, то точки M_2, M_3 принадлежат отрезкам B_2A_2 и B_3A_3, то есть тройки точек B_2, M_2, A_2 и B_3, M_3, A_3 расположены одинаково. Поэтому из того, что $f(M_2) = M_3$, $f(A_2) = A_3$, $A_2B_2 = A_3B_3$, следует, что $f(B_2) = B_3$.

Обозначим через B_1 и B_4 ортогональные проекции точек A_1 и A_4 на прямую B_2B_3 и рассмотрим отображение S от прямой A_3B_3.

$S(A_2) = A_4$, $S(B_2) = B_4`$, при этом точка $B_4`$ принадлежит прямой B_2B_3, а прямая $A_3B_3`$ перпендикулярна прямой $B_2B_3$, так как $B_2B_3$ инварианта при отображении S. Из того, что $A_4B_4$ перпендикулярна $B_2B_3$, получим, что $B_4` = B_4$, т. е. $A_4B_4 = A_2B_2$ и $B_3B_2 = B_4B_2$.

Проведем через точку B_3 лучи $h = B_3C_3$ и $k = B_3C_4$, где вектор $\overrightarrow{B_3C_3} = \overrightarrow{B_2A_2}$, вектор $\overrightarrow{B_3C_4} = \overrightarrow{B_4A_4}$ перпендикулярны прямой B_2B_2 и $S(B_2A_2) = B_3A_3$, то и параллельные им лучи h и k также будут перпендикулярны прямой B_2B_3 и $S(h) = k$. Отсюда следует, что $\angle C_2B_3A_3 = \angle A_3B_3C_3 = \varphi$, и отрезок $B_2A_2\,(B_3A_3)$ перейдет в отрезок $B_3A_3\,(B_4A_4)$ в результате параллельного переноса на вектор $\overrightarrow{B_2B_3}$ и поворота на угол φ относительно точки $B_3\,(B_4)$ в плоскости, перпендикулярной B_3B_2.

Аналогично, рассматривая отображение S` от прямой $B_2A_2$, получим, что $S`(A_1) = A_3$, $S`(B_1) = B_3$, вектор $\overrightarrow{B_1B_2} = \overrightarrow{B_2B_3}$ и угол между лучами B_1A_1 и B_2A_2 равен углу между лучами B_2A_2 и B_3A_3, то есть равен φ. Это значит, что движение $f_1 = f_2 \circ g$, где g – параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{B_2B_3}$, а f_2 – поворот на угол φ относительно прямой B_2B_3, отрезок B_iA_i переводит в отрезок $B_{i+1}\,A_{i+1}$, т. е. $f_1(B_i) = B_{i+1}$, $f_1(A_i) = A_{i+1}$. Получили, что репер $A_1A_2A_3B_2$ переходит при движении f_1, как и при движении f, в репер $A_2A_3A_4B_3$, то есть $f = f_1$.

Таким образом, движение f является композицией поворота на угол $\varphi \neq 180^0$ относительно некоторой прямой m и параллельного переноса на вектор, параллельный этой прямой, причем не зависимо от их порядка.

Движение f имеет единственную инвариантную прямую m и называется винтовым движением. Отметим, что наш метод проведения классификации движений дает возможность конструктивно и аналитически найти ось винтового движения и его угол поворота.

Библиографический список

1. Скопец З.А., Понарин Я.П. Геометрия тетраэдра и его элементов. Ярославль, 1974.
2. Атанасян Л.С., Базылев В.Т. Геометрия. Ч. I. М.: Просвещение, 1986.
3. Атанасян Л.С., Денисова Н.С., Силаев Е.В. Курс элементарной геометрии. Ч. II. М.: Сантакс-Пресс, 1997.
4. Перепелкин Д.И. Курс элементарной геометрии. Ч. II. Геометрия в пространстве. М.: Л.: ГИТТЛ, 1949.