А.В. БОРОДИН

Барианализ точных решений нелинейных эволюционных уравнений

Настоящая статья является развитием работ [1, 2]. Но сначала изложим в сжатой форме необходимый минимум бариоперационных понятий из [3, 4, 5].

Пусть $\langle x\rangle = \langle x_0, x_1\rangle$ — упорядоченная пара чисел $x_0, x_1 \in \mathbf{C}$; $x^0 = \mu^0(\langle x\rangle) = x_0$ и $x^1 = \mu^1(\langle x\rangle) = x_0 x_1$ — её моменты 0-го и 1-го порядка соответственно. Тогда $\langle x\rangle = \langle x^0; x^1/x^0\rangle$, причём если $x^0 = 0$, а $x^1 \neq 0$, то нуль "$x^0 = 0$", стоящий в знаменателе, называется нестандартным и обозначается символом $\langle 0\rangle$. В этом случае $\langle x\rangle = \langle\langle 0\rangle; x^1/\langle 0\rangle\rangle = \langle\langle 0\rangle; x^1\langle\infty\rangle\rangle$, где $\langle\infty\rangle = \langle 0\rangle^{-1}$ — нестандартная бесконечность, такая что $\langle\infty\rangle\langle 0\rangle = 1$, но $\langle\infty\rangle 0 = 0$. Если же и $x^0 = 0$ и $x^1 = 0$, т.е. $\langle x\rangle = \langle 0; x_1\rangle$, то элемент $\langle 0; x_1\rangle$ называется баринулевым и обозначается символом $\langle\tilde{0}\rangle$. Два элемента $\langle x\rangle = \langle x^0; x^1/x^0\rangle$ и $\langle y\rangle = \langle y^0; y^1/y^0\rangle$ называются равными, если $\mu^k(\langle x\rangle) = \mu^k(\langle y\rangle)$ $(k = 0,1)$.

Далее, если $\langle x\rangle = \langle x^0; x^1/x^0\rangle$, $\langle y\rangle = \langle y^0; y^1/y^0\rangle$ и $\lambda \in \mathbf{C}$, то по определению

$$л\langle x\rangle = \langle \lambda x_0; x_1\rangle, , \tag{1}$$

$$\langle x\rangle + \langle y\rangle = \langle x^0 + y^0; (x^1 + y^1)/(x^0 + y^0)\rangle, \tag{2}$$

$$\langle x\rangle\langle y\rangle = \langle x^0 y^0 - x^1 y^1; (x^0 y^1 + x^1 y^0)/(x^0 y^0 - x^1 y^1)\rangle. \tag{3}$$

В работах [3, 4] показано, что операции умножения на скаляр (1), сложения (2) и *эллиптического умножения* (3) удовлетворяют аксиомам коммутативной ассоциативной алгебры; при этом для сложения нулём будет $\langle\tilde{0}\rangle$, противоположным к элементу $\langle x\rangle = \langle x^0; x^1/x^0\rangle$ будет элемент $-\langle x\rangle = \langle -x^0; x^1/x^0\rangle$; для умножения (3) единицей будет элемент $\langle e\rangle = \langle 1; 0\rangle$, обратным к элементу $\langle x\rangle = \langle x^0; x^1/x^0\rangle \neq \langle\tilde{0}\rangle$ будет элемент $\langle x\rangle^{-1} = \langle x_0; -x^1/x^0\rangle / \|\langle x\rangle\|^2$, где $\|\langle x\rangle\|$ — норма элемента $\langle x\rangle$, порожденная скалярным произведением $\langle\langle x\rangle, \langle y\rangle\rangle = \ = x^0 (y^0)^* + x^1 (y^1)^*$. В работе [4] эта алгебра названа *эллиптической бариалгеброй* (ЭБА) 1-*го порядка* и обозначена символом $\langle\mathbf{C}\rangle_e^1$, элементы $\langle x\rangle \in \langle\mathbf{C}\rangle_e^1$ этой алгебры названы *бариэлементами* (БЭ) *1-го порядка*. Там же заложены основы анализа на ЭБА $\langle\mathbf{C}\rangle_e^n$ любого порядка n. Естественный бариортонормированный базис в $\langle\mathbf{C}\rangle_e^1$ образуют бариорты $\langle e\rangle_0 = \langle 1; 0\rangle$ и $\langle e\rangle_1 = \langle\langle 0\rangle; \langle\infty\rangle\rangle$, при этом $\forall\langle x\rangle = \langle x^0; x^1/x^0\rangle \in \langle\mathbf{C}\rangle_e^1$ имеет место разложение $\langle x\rangle = x^0\langle e\rangle_0 + x^1\langle e\rangle_1$.

Барилинейной структуре на $\langle\mathbf{C}\rangle_e^1$, индуцированной бариумножением на скаляр (1) и барисложением (2), отвечает барилинейный оператор (БЛО) $\langle A\rangle$ на $\langle\mathbf{C}\rangle_e^1$, который определяется по формуле

$$\langle A\rangle(\langle x\rangle) = \langle\langle a\rangle_0; \langle a\rangle_1\rangle(\langle x\rangle) = x^0\langle a\rangle_0 + x^1\langle a\rangle_1, \tag{4}$$

где $\langle a\rangle_k = \langle A\rangle|_k = \langle A\rangle(\langle e\rangle_k) = \langle a_{k0}; a_{k1}\rangle = \langle a_k^0; a_k^1/a_k^0\rangle \in \langle\mathbf{C}\rangle_e^1$ $(k = 0, 1)$ — барикомпоненты БЛО $\langle A\rangle$. В частности, $\langle I\rangle = \langle\langle e\rangle_0; \langle e\rangle_1\rangle$ — единичный БЛО. Величина $|\langle A\rangle| = a_0^0 a_1^1 - a_0^1 a_1^0$

называется определителем, а $\left\|\langle A\rangle\right\| = \left(\left\|\langle a\rangle_1\right\|^2 + \left\|\langle a\rangle_2\right\|^2\right)^{1/2}$ — нормой БЛО (4). Если $\left|\langle A\rangle\right| \neq 0$, то $\langle A\rangle^{-1} = \left\langle\left\langle a_1^1; -a_0^1/a_1^1\right\rangle; \left\langle -a_1^0; -a_0^0/a_1^0\right\rangle\right\rangle \big/ \left|\langle A\rangle\right|$ — обратный к $\langle A\rangle$ БЛО.

Далее, функция вида

$$\langle u\rangle = \langle u(x,t)\rangle = \langle u_0(x,t); u_1(x,t)\rangle = \left\langle u^0(x,t); u^1(x,t)/u^0(x,t)\right\rangle, \qquad (5)$$

где $\langle u\rangle \in \langle \mathbf{C}\rangle_e^1$ — зависимая барипеременная, $x,t \in \mathbf{R}$ – независимые переменные, называется барифункцией (БФ) вещественных переменных, или, короче, $\langle \mathbf{C}\rangle_e^1$ - функцией $\mathbf{R}$-переменных. Частная барипроизводная k-го порядка $\partial_x^k\langle u(x,t)\rangle$ (при $k=1$ $\partial_x^1\langle u(x,t)\rangle = \partial_x\langle u(x,t)\rangle$) от БФ (5) по переменной $x\in\mathbf{R}$ определяется так:

$$\partial_x^k\langle u\rangle = \partial_x^k\langle u(x,t)\rangle = \left\langle \partial_x^k u^0(x,t); \partial_x^k u^1(x,t)/\partial_x^k u^0(x,t)\right\rangle.$$

Соответственно, бариинтеграл $\int\langle u(x,t)\rangle dx$ от $\langle u(x,t)\rangle$ по $x\in\mathbf{R}$ так:

$$\int\langle u(x,t)\rangle dt = \left\langle \int u^0(x,t)\,dx; \int u^1(x,t)\,dx \Big/ \int u^0(x,t)\,dx\right\rangle$$

(по переменной $t\in\mathbf{R}$ всё аналогично). Множество непрерывно дифференцируемых (дважды по $x\in\mathbf{R}$ и один раз по $t\in\mathbf{R}$) в области $D\subseteq\mathbf{R}^2$ БФ (5) обозначается через $\left\langle C^{(2,1)}(D)\right\rangle$. Подробнее обо всех этих понятиях см. [3, 4].

Рассмотрим на $\left\langle C^{(2,1)}(D)\right\rangle$, где $D = \mathbf{R}\times(0,\infty)$, эволюционное барилинейное дифференциальное уравнение (БЛДУ) в частных производных второго порядка вида

$$\partial_t\langle \mathrm{w}\rangle = \langle \mathrm{C}\rangle\left(\partial_x^2\langle \mathrm{w}\rangle\right) + \langle \mathrm{B}\rangle\left(\partial_x\langle \mathrm{w}\rangle\right) + \langle \mathrm{A}\rangle\left(\langle \mathrm{w}\rangle\right), \qquad (6)$$

где $\langle w\rangle = \langle w(x,t)\rangle = \langle v(x,t); u(x,t)\rangle$ — неизвестная БФ; $\langle A\rangle = \langle A(x,t)\rangle$, $\langle B\rangle = \langle B(x,t)\rangle$, $\langle C\rangle = \langle C(x,t)\rangle$ — заданные БЛО вида (4). Относительно 1-й $\langle w\rangle|_1 = v$ и 2-й $\langle w\rangle|_2 = u$ бари-компонент БФ $\langle w\rangle$ БЛДУ (6) равносильно системе ДУ в частных производных 2-го порядка

$$\partial_t v = c_0^0\,\partial_x^2 v + c_1^0\,\partial_x^2(vu) + b_0^0\partial_x^1 v + b_1^0\partial_x^1(vu) + a_0^0\,v + a_1^0\,vu, \qquad (7)$$

$$\begin{aligned}\partial_t u = {} & \left(c_1^1 - c_1^0 u\right)\partial_x^2 u + \left(b_1^1 + 2c_1^1\frac{\partial_x^1 v}{v} - \left(b_1^0 + 2c_1^0\frac{\partial_x^1 v}{v}\right)u\right)\partial_x u + \left(a_0^1 + b_0^1\frac{\partial_x^1 v}{v} + c_0^1\frac{\partial_x^2 v}{v}\right) + \\ & + \left(a_1^1 - a_0^0 + \left(b_1^1 - b_0^0\right)\frac{\partial_x^1 v}{v} + (c_1^1 - c_0^0)\frac{\partial_x^2 v}{v}\right)u - \left(a_1^0 + b_1^0\frac{\partial_x^1 v}{v} + c_1^0\frac{\partial_x^2 v}{v}\right)u^2,\end{aligned} \qquad (8)$$

где $a_k^j = м^j\left(\langle A\rangle\big|_k\right)$, $b_k^j = м^j\left(\langle B\rangle\big|_k\right)$, $c_k^j = м^j\left(\langle C\rangle\big|_k\right)$ $(j,k = 0,1)$.

Для решений этой барисвязанной системы имеет место типичное для бариоперационного исчисления утверждение [3 –6].

Теорема 1. *Если* $v(x,t;\xi)$ *и* $u(x,t;\xi)$ $(\xi = 1,2,\ldots,m)$ *— решения системы ДУ* (7), (8), *то* $\left(\forall\, c(\xi)\in\mathbf{C}\ \ (\xi = 1,2,\ldots,m)\right)$:

$$v(x,t) = \sum_{o=1}^{m} c(o)v(x,t;o),$$

$$u(x,t) = \sum_{o=1}^{m} c(o)v(x,t;o)u(x,t;o) \Big/ \sum_{o=1}^{m} c(o)v(x,t;o)$$

— решения системы ДУ (7), (8).

Тем самым, множество $\langle V\rangle$ решений $v = v(x,t)$ ДУ (7) в барисвязке $\langle v;u\rangle$ с множеством $\langle U\rangle$ соответствующих решений $u = u(x,t)$ ДУ (8) образует барилинейное пространство

$\langle V;U\rangle$ барирешений $\langle v(x,t);u(x,t)\rangle$ БЛДУ (6) [3, 4]. Если решения v и u система (7), (8) связаны между собой вытекающим из вида ДУ (8) преобразованием Коула-Хопфа [7, 8]:

$$u(x,t)=\partial_x^1 v(x,t)/v(x,t), \tag{9}$$

то система (7), (8) распадается на два формально не связных ДУ. А именно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Для того, чтобы функция (9), где v — решение ДУ (7), (9), т.е. решение ДУ

$$\partial_t^1(v)=c_1^0\,\partial_x^3(v)+\left(c_0^0+b_1^0\right)\partial_x^2(v)+\left(b_0^0+a_1^0\right)\partial_x^1(v)+a_0^0\,v\,, \tag{10}$$

была решением ДУ (8), (9), т.е. решением ДУ

$$\begin{aligned}\partial_t u=\left(c_1^1-c_1^0 u\right)\partial_x^2 u+\left(c_0^1+b_1^1+\left(3c_1^1-c_0^0-b_1^0\right)u-3c_1^0\,u^2\right)\partial_x^1 u+\\ +a_0^1+\left(b_0^1+a_1^1-a_0^0\right)u+\left(c_0^1+b_1^1-b_0^0-a_1^0\right)u^2+\left(c_1^1-c_0^0-b_1^0\right)u^3-c_1^0\,u^4,\end{aligned} \tag{11}$$

необходимо и достаточно, чтобы функция v была одновременно решением ЛДУ

$$\begin{aligned}c_1^0\partial_x^4 v+\left(\partial_x^1 c_1^0+c_0^0-c_1^1+b_1^0\right)\partial_x^3 v+\left(\partial_x^1 c_0^0+\partial_x^1 b_1^0-c_0^1+b_0^0-b_1^1+a_1^0\right)\partial_x^2 v+\\ +\ \left(\partial_x^1 b_0^0+\partial_x^1 a_1^0-b_0^1+a_0^0-a_1^1\right)\partial_x^1 v+\left(\partial_x^1 a_0^0-a_0^1\right)v=0\,,\end{aligned} \tag{12}$$

или, если параметры БЛДУ (6) не зависят от x, ЛДУ

$$\begin{aligned}c_1^0\partial_x^4 v+\left(c_0^0-c_1^1+b_1^0\right)\partial_x^3 v+\left(-c_0^1+b_0^0-b_1^1+a_1^0\right)\partial_x^2 v+\\ +\left(-b_0^1+a_0^0-a_1^1\right)\partial_x^1 v-a_0^1\,v=0\,.\end{aligned} \tag{13}$$

Кроме того, при условии (12) *функция* (9), (10) *является решением ДУ*

$$\partial_t u=\partial_x\left(c_1^0\partial_x^2 u+\left(c_0^0+b_1^0+3c_1^0 u\right)\partial_x u+c_1^0 u^3+\left(c_0^0+b_1^0\right)u^2+\left(b_0^0+a_1^0\right)u+a_0^0\right). \tag{14}$$

Отметим, что ДУ (14) является обобщением аналогичного ДУ из работ [5,6,9], где оно было получено барионерационным методом из БЛДУ 3-го порядка и где была выявлена тесная связь его решений с нелинейными волнами типа кинков, солитонов, волнистой боры.

Понятно, что (10) — линеаризованное уравнение КдФ-Бюргерса, (11) — квази-линейное (КВЛ) параболическое уравнение, обобщающее известные ДУ Бюргерса-Хаксли, КПП, Фитц-Хью-Нагумо-Семёнова (см. [8, 10] и ссылки в них); (12) — ЛДУ согласования между (10) и (11).

Сначала рассмотрим случай (13). Пусть

$$v_k=v_k(x,t)\quad(k=1,2,3,4) \tag{15}$$

— фундаментальные решения (ФР) , а

$$v(x,t)=\sum_{k=1}^{4}c_k(t)v_k(x,t) \tag{16}$$

— общее решение (ОР) ЛДУ (13), где $c_k(t)\in C^{(1)}(\mathbf{R})$ $(k=1,2,3,4)$ — произвольные функции от t, где время t играет роль параметра. Для определения этих функций воспользуемся теоремой 2 и подставим (16) в (10). В результате получим ДУ

$$\partial_t^1 c_k=Л_k(t)\,c_k\quad(k=1,2,3,4), \tag{17}$$

где

$$Л_k(t)=\left(-\partial_t^1 v_k+c_1^0\,\partial_x^3 v_k+\left(c_0^0+b_1^0\right)\partial_x^2 v_k+\left(b_0^0+a_1^0\right)\partial_x^1 v_k+a_0^0\,v_k\right)/\,v_k$$

— функции, зависящие только от t. Чтобы их найти, выпишем характеристическое уравнение для ДУ (13):

$$б\,л^4+в\,л^3+г л^2+д\,л+е=0, \tag{18}$$

где

$$б=c_1^0\,,\ \ в=c_0^0-c_1^1+b_1^0\,,\ \ г=-c_0^1+b_0^0-b_1^1+a_1^0\,,\ \ д=-b_0^1+a_0^0-a_1^1\,,\ \ е=-a_0^1 \tag{19}$$

независимые друг от друга коэффициенты алгебраического уравнения (АУ) (18). Пусть

$$\boldsymbol{л_k}\quad(k=1,2,3,4) \tag{20}$$

его простые характеристические корни. Тогда

$$v_k(x,t)=\exp(\lambda_k x)\quad(k=1,2,3,4) \tag{21}$$

— соответствующие ФР. Подставляя (21) в (17), получим:

$$Л_k = -x\,\partial_t^1 л_k + c_1^0\, л_k^{\,3} + \left(c_0^0 + b_1^0\right) л_k^{\,2} + \left(b_0^0 + a_1^0\right) л_k + a_0^0 \quad \left(k = 1, 2, 3, 4\right). \quad (22)$$

Следовательно, чтобы $Л_k$ не зависели от x, необходимо и достаточно, чтобы

$$\partial_t^1 л_k = 0 \quad \left(k = 1, 2, 3, 4\right). \quad (23)$$

С этого места условие (23) предполагается выполненным.

Далее, подставляя (22), (23) в (17) и решая полученное ДУ, имеем

$$c_k(t) = C_k \exp(Л_k\, t) \quad \left(k = 1, 2, 3, 4\right), \quad (24)$$

где

$$Л_k = c_1^0\, л_k^{\,3} + \left(c_0^0 + b_1^0\right) л_k^{\,2} + \left(b_0^0 + a_1^0\right) л_k + a_0^0 \quad \left(k = 1, 2, 3, 4\right), \quad (25)$$

а $C_k \in \mathbf{C}$ $\left(k = 1, 2, 3, 4\right)$ — произвольные постоянные. Из (16), (21) и (24) получаем сначала частные решения

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{4} C_k \exp\left(л_k x + Л_k t\right) \quad (26)$$

ЛДУ (10), а затем посредством (9) находим частные решения

$$u(x,t) = \frac{\partial_x^1 v}{v} = \sum_{k=1}^{4} C_k л_k \exp\left(л_k\left(x + x_k t\right)\right) \Big/ \sum_{k=1}^{4} C_k \exp\left(л_k\left(x + x_k t\right)\right), \quad (27)$$

$$x_k = c_1^0 л_k^{\,2} + \left(c_0^0 + b_1^0\right) л_k + \left(b_0^0 + a_1^0\right) \quad \left(k = 1, 2, 3, 4\right), \quad (28)$$

КВЛДУ (11).

Согласно теореме 1, 4-мерное над $\mathbf{C}$ (и соответственно 8-мерное над $\mathbf{R}$) линейное множество V_4 решений (26) ЛДУ (10) в барисвязке $\langle v : u\rangle$ с нелинейым множеством U_4 решений (27), (28) КВЛДУ (6) образует 4-мерное над $\mathbf{C}$ барилинейное множество $\langle W_4\rangle = \langle V_4 ; U_4\rangle$ барирешений БЛДУ (6). Отсюда, если $u_j = \partial_x^1(v_j) \big/ v_j \in U_4 \ (j = 1, 2)$, то

$$u_1 \dotplus u_2 \overset{\text{def}}{=} \frac{v_1 u_1 + v_2 u_2}{v_1 + v_2} = \frac{\partial_x^1 v_1 + \partial_x^1 v_2}{v_1 + v_2} \in U_4, \quad (29)$$

и значит, (29) — операция "сложения" в U_4. Другими словами, формула (29) описывает (над $\mathbf{R}$) взаимодействие двух "волн-кинков" вида (27), (28). Понятно, что волны-кинки (27), (28) расположены между двумя своими горизонтальными асимптотами $u_\bullet = \min_{1\le k\le 4} л_k$ и $u^\bullet = \max_{1\le k\le 4} л_k$. Поэтому, если все корни (20) и коэффициенты $C_k \in \mathbf{R}$ $\left(k = 1, 2, 3, 4\right)$ положительные, то и решения (27), (28) положительные. Кинки (27), (28), как частные случаи, включают в себя кинки, описанные в работе [1], а также частично в [10] (где они получены с помощью анзаца метода Р. Хироты).

Возникает естественный вопрос: когда "узкое" линейное множество V_4 (в (29)) можно заменить на "широкое" линейное множество V всех решений ЛДУ (10). Согласно условию согласования (13), для этого необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты (19) ЛДУ (13) равнялись нулю. В этом случае ЛДУ (10) и КВЛДУ (11) примут соответственно вид:

$$\partial_t^1 v = c_1^1\, \partial_x^2 v + \left(c_0^1 + b_1^1\right) \partial_x^1 v + \left(b_0^1 + a_1^1\right) v, \quad (30)$$

$$\partial_t u = c_1^1\, \partial_x^2 u + \left(c_0^1 + b_1^1 + 2 c_1^1 u\right) \partial_x u. \quad (31)$$

При этом ЛДУ (30), будучи переписанным посредством (7) в равносильной форме

$$i\,\partial_t^1 v = \widetilde{c}_1^{\,1}\, \partial_x^2 v + \widetilde{b}_0^{\,0}\, \partial_x^1 v + (\widetilde{a}_0^{\,0} + \widetilde{a}_1^{\,0}\, u) v, \quad (32)$$

где $\widetilde{c}^{\,1}_{\,1} = i\,c^1_1$, $\widetilde{b}^{\,1}_{\,1} = i\,b^1_1$, $\widetilde{a}^{\,0}_{\,0} = i\,a^0_0$, $\widetilde{a}^{\,0}_{\,1} = i\,a^0_1$, является одномерным нестационарным ДУ Шредингера с собственным значением $л = \widetilde{a}_0^0$ и потенциалом $\widetilde{U} = \widetilde{a}^{\,0}_{\,0}\, u$, где $u = \partial_x^1 v \big/ v$ —

решение ДУ Бюргерса (31). Нетрудно показать, что если $u = u(x,t)$ — решение ДУ Бюргерса (31), $x_0 \in \mathbf{R}$ — любое допустимое фиксированное значение и

$$s(t) = \exp\left(\int_0^t \left(c_1^1\,\partial_x^1(u) + (b_0^1 + a_1^1) + (c_0^1 + b_1^1)\,u + c_1^1\,u^2\right)\Big|_{x=x_0} dt\right),$$

то функция

$$v(x,t) = s(t)\exp\left(\int_{x_0}^x u(o\,,t\,)\,do\right)$$

— решение ДУ (30) (или (32)). Следовательно, для решений ДУ Бюргерса (31) формула сложения (взаимодействия) (29) примет вид

$$u_1 \dot{+} u_2 = \frac{u_1\,s_1(t)\exp\left(\int_{x_0}^x u_1\,dx\right) + u_2\,s_1(t)\exp\left(\int_{x_0}^x u_2\,dx\right)}{s_1(t)\exp\left(\int_{x_0}^x u_1\,dx\right) + s_2(t)\exp\left(\int_{x_0}^x u_2\,dx\right)} \qquad (33)$$

Тем самым, множество решений ДУ Бюргерса (31) относительно операции “сложения” (33) образует коммутативную полугруппу без “нуля”. Кроме того, формула (33) позволяет по известным решениям ДУ Бюргерса (31) строить его новые решения.

Замечание 1. Относительно потенциала

$$U(x,t;C_1,C_2,C_3,C_4) = a_1^0\,u(x,t;C_1,C_2,C_3,C_4),$$

где $u(x,t;C_1,C_2,C_3,C_4)$ определено по формуле (27), и собственного значения $л = a_0^0$ ЛДУ (7), переписанного в форме

$$\partial_t^1 v = c_1^0\,\partial_x^3 v + \left(c_0^0 + b_1^0\right)\partial_x^2 v + b_0^0\,\partial_x^1 v + \left(л + U(x,t;C_1,C_2,C_3,C_4)\right) v,$$

является изоспектральным, т.е. $л = a_0^0$ не зависит от постоянных $C_k\ (k = 1, 2, 3, 4)$.

Замечание 2. Для ДУ Шредингера (32) собственное значение $л = \tilde{a}_0^0$ не зависит от решений ДУ Бюргерса (31), и в этом смысле ДУ Бюргерса (31) подобно ДУ КдФ [7].

Вернемся к общему КВЛДУ (11). Согласно теореме 2, каждое решение v ЛДУ (10) определяет по формуле (9) решение u КВЛДУ (11), тогда и только тогда, когда все коэффициенты ЛДУ (12) равны нулю, т.е. выполняются условия:

$$c_1^0 = 0,\quad c_0^0 + b_1^0 = c_1^1,\quad \partial_x^1 c_0^0 + \partial_x^1 b_1^0 + b_0^0 + a_1^0 = c_0^1 + b_1^1,$$

$$\partial_x^1\,\mathrm{b}_0^0 + \partial_x^1\,\mathrm{a}_1^0 + \mathrm{a}_0^0 = \mathrm{b}_0^1 + \mathrm{a}_1^1,\quad \partial_x^1\,\mathrm{a}_0^0 = \mathrm{a}_0^1. \qquad (34)$$

При условиях (34) ЛДУ (10) и КВЛДУ (11) принимают соответственно вид:

$$\partial_t^1 v = c^0 \partial_x^2 v + b^0 \partial_x^1 v + a^0 v\,, \qquad (35)$$

$$\partial_t u = c^0\,\partial_x^2 u + \left(c^1 + 2c^0 u\right)\partial_x^1 u + \partial_x a^0 + (\partial_x b^0)\,u + (\partial_x c^0)\,u^2, \qquad (36)$$

где $c^0 = c_0^0 + b_1^0$, $b^0 = b_0^0 + a_1^0$, $a^0 = a_0^0$, $c^1 = \partial_x^1 c^0 + b^0$ — произвольные (за исключением последней c^1) дифференцируемые по x функции от $(x,t) \in D$.

Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. Множество решений U КВЛДУ (36), определенное по формуле (9) (посредством всего линейного множества решений V ЛДУ (35)), образует относительно операции “сложения” (29) ((33)) коммутативную полугруппу без нуля.

Это утверждение существенно расширяет и уточняет заключительные результаты работы [1].

Библиографический список

1. Бородин А.В. Бариоперационное исчисление и нелинейные уравнения для химических реакций в газе.III // Изв. вузов. Химия и хим. технология. 2004. Т. 47. Вып.6. С. 95-98.
2. Бородин А.В. Бариоперационное исчисление и нелинейные эволюционные уравнения // Сб. тр. МНК ММТТ-19. В 10 т. Т.1. Воронеж: ВГТА, 2006. С. 21-25.

3. Бородин А.В. Одномерный барилинейный анализ и изоспектральные уравнения Шредингера. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 1997. 177 с.
4. Бородин А.В. Многомерный барианализ и его приложения. Ч. I. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2005. 432 с.
5. Бородин А.В. Нелинейные уединенные волны — барисоны // Материалы конф. "Чтения Ушинского" ФМФ. Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2003. С. 22-27.
6. Бородин А.В. Спектральные бариалгебры и их приложения I (II) // Вестник ЯГТУ. Вып.4(5). Ярославль.2004 (2005). С.192-206 (93-114).
7. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир. 1988. 694 с.
8. Кудряшов Н.А. Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. 360 с.
9. Бородин А.В. Уединенные волны — барисоны // Сб. тр. МНК ММТТ-2003 Т. 1, СПб.: СПГТИ, 2003. С. 73-77.
10. Волосов К.А. Об одном свойстве анзаца метода Хироты для квазилинейных параболических уравнений // Математические заметки. 2002. Т. 71. Вып. 3. С. 373-389.