М.Е. СОРОКИНА

Бирациональные свойства многообразия модулей стабильных пучков ранга 2 с классами Чжэня $c_1 = 0$, $c_2 = 3$ на поверхности F_1

В статье для открытого подмножества многообразия $\overline{M_{P^2}(0,3)}$ модулей стабильных пучков ранга 2 с классами Чжэня $c_1 = 0$, $c_2 = 3$ на проективной плоскости P^2 получено доказательство гипотезы А.С. Тихомирова, согласно которой многообразие $\overline{M^H_{F_1}(0,n)}$ модулей H-полустабильных пучков ранга 2 с классами Чжэня $c_1 = 0$, $c_2 = n$ на поверхности Хирцебруха F_1 для малых n и надлежащим образом выбранной поляризации H получается из многообразия $\overline{M_{P^2}(0,n)}$ раздутием вдоль подмногообразия пучков, не локально свободных в точке x_0 − центре раздутия $\sigma: F_1 \to P^2$.

Введение

Настоящая статья посвящена изучению геометрических свойств многообразия $\overline{M_S(0,3)}$ модулей стабильных пучков ранга 2 с классами Чжэня $c_1 = 0$, $c_2 = 3$ на поверхности Хирцебруха $S = F_1 = P(O_{P^1} \oplus O_{P^1}(1))$. Рассмотрим раздутие $\sigma: S \to P^2$ проективной плоскости P^2 в точке x_0. А.С. Тихомиров в 2002 г. сформулировал гипотезу, согласно которой для малых значений n второго класса Чжэня и надлежащим образом выбранной поляризации H на поверхности S многообразие $\overline{M^H_S(0,n)}$ модулей H-полустабильных когерентных пучков ранга 2 с классами Чжэня $c_1 = 0$, $c_2 = n$ на S получается из многообразия $\overline{M_{P^2}(0,n)}$ модулей полустабильных когерентных пучков ранга 2 с классами Чжэня $c_1 = 0$, $c_2 = n$ на проективной плоскости P^2 раздутием вдоль подмногообразия пучков, не локально свободных в центре x_0 раздутия σ. В работе [7] было получено доказательство данной гипотезы в первом нетривиальном случае $c_2 = 2$. В настоящей статье продолжается исследование бирациональных перестроек многообразий модулей при раздутии поверхности и рассматривается следующий случай $c_2 = 3$. Целью работы является доказательство гипотезы А.С. Тихомирова для открытого подмножества M_0 многообразия $\overline{M_{P^2}(0,3)}$, полученного удалением из $\overline{M_{P^2}(0,3)}$ точек, соответствующих классам изоморфизма пучков, имеющих двойную особенность в точке x_0 или имеющих особенность в x_0, но с $l(\mathrm{Sing}E) = 3$.

1. Предварительные сведения и обозначения

Всюду мы работаем над алгебраически замкнутым полем k характеристики 0.

Итак, пусть $M(0,3):=\overline{M_{P^2}(0,3)}$ и $\overline{M_S^H(0,3)}$ − многообразия модулей стабильных пучков ранга 2 с классами Чжэня $c_1=0$ и $c_2=3$ на P^2 и, соответственно, стабильных относительно поляризации H пучков ранга 2 с $c_1=0$ и $c_2=3$ на S. Поскольку $M(0,3)$ содержит только стабильные точки, то $M(0,3)$ гладкое (см., например, [3, Corollary 4.5.2]). Согласно [4, Théorème 0.2] многообразие $M(0,3)$ изоморфно $\hat{Gr}$− грассманову многообразию $Gr(2,P^5)=Gr(2,P(\Gamma(O_{P^2}(2))))$, раздутому вдоль образа двойственной плоскости $\breve{P}^2$ при вложении $i:\ \breve{P}^2\to Gr(2,P^5)$, которое строится следующим образом: каждой прямой $l\in P^2$ с уравнением $u=0$ ставится в соответствие связка коник с уравнениями $uv=0$ для $v\in\Gamma(O_{P^2}(1))$. Таким образом, многообразие $M(0,3)$ имеет размерность 9.

Нам потребуется конструкция многообразия $M(0,3)$ с точки зрения геометрической теории инвариантов (см. [1], [5], [6]). Любой стабильный пучок E на P^2 ранга 2 с классами Чжэня $c_1=0$, $c_2=3$ является когомологическим пучком монады $0\to K\otimes O_{P^2}(-1)\to H\otimes\Omega_{P^2}(1)\to L\otimes O_{P^2}\to 0$,в которой K, H и L − векторные пространства размерностей $\dim K=\dim H=3$, $\dim L=1$ и для которой выполняются следующие требования:

(i) $a=H^0(\alpha(1)):K\to H\otimes V$ − вложение, $b=H^2(\beta(-3)):H\otimes V^*\to L$ − сюръекция;

(ii) для любого ненулевого собственного подпространства H' в H, $K':=a^{-1}(H'\otimes V)$ и $L'=b(H'\otimes V^*)$ выполняется неравенство $\dim K'\le 3\dim L'$.

Пространство монад, для которых выполняются требования (i) и (ii), вкладывается в произведение грассмановых многообразий $Gr(3,H\otimes V)\times Gr(1,H\otimes V^*)=G_A\times G_B$ посредством отображения $(a,b)\mapsto(\mathrm{im}a,\ker b)$. Образ данного вложения обозначим R. Тогда $M(0,3)=R//SL(H)$ − геометрический фактор.

Пусть $[E]\in M(0,3)$. В силу стабильности пучок $E\in[E]$ может задаваться одним из двух нетривиальных расширений:

$$0\to I_{Z_2}\to E\to I_{Z_1}\to 0,\ l(Z_2)=2,(Z_1)=1 \quad (1.1)$$

или

$$0\to I_{Z_3}\to E\to O_{P^2}\to 0,\ \ l(Z_3)=3, (1.2)$$

где I_Z − пучок идеалов подсхемы Z в P^2. Заметим, что в $M(0,3)$ подмножества расширений вида (1.1) и вида (1.2) не пересекаются, при этом первое подмножество содержит классы изоморфизма пучков E, таких, что $l(\mathrm{Sing}E)=2$, второе − классы изоморфизма пучков E с $l(\mathrm{Sing}E)=3$. Обозначим через M_0 открытое подмножество многообразия $M(0,3)$, полученное удалением из $M(0,3)$ точек, соответствующих классам изоморфизма пучков, имеющих двойную особенность в точке x_0 или имеющих особенность в x_0, но с $l(\mathrm{Sing}E)=3$.

Пусть $M(1,0,n)$ − многообразие модулей пучков I_Z ранга 1 с $c_2(I_Z)=l(Z)=n$ на P^2. Обозначим Z'_n универсальный пучок на $M(1,0,n)\times P^2$. Рассмотрим проекцию $pr_n:\ (1,0,n)\times M(1,0,m)\times P^2\to M(1,0,n)\times P^2$. Обозначим $\mathsf{Z}_n:=pr_n^*\mathsf{Z}'_n$. Пусть $q:\ (1,0,2)\times M(1,0,1)\times P^2\to M(1,0,2)\times M(1,0,1)$ − проекция. Рассмотрим пучок $\mathsf{E}xt_q^1(\mathsf{Z}_1,\mathsf{Z}_2)$. В точке $q(I_Z,I_x,P^2)=(I_Z,I_x)$, где $l(Z)=2$, имеем: $\mathsf{E}xt_q^1(\mathsf{Z}_1,\mathsf{Z}_2)|_{(I_Z,I_x)}=\mathrm{Ext}^1(I_x,I_Z)=k^2$.

Рассмотрим в M_0 приведенную подсхему Σ_0, точки которой соответствуют классам изоморфизма пучков с $l(\mathrm{Sing}E)=2$, имеющих простейшую особенность в точке x_0, являющейся центром раздутия $\sigma:S\to P^2$, и таких, что в расширении $0\to I_{x_0\cup x_1}\to E\to I_{x_2}\to 0$ точка x_2 не совпадает с x_0. Данная подсхема имеет следующее описание: Σ_0 изоморфна расслоению со слоем $P(\mathsf{E}xt_q^1(\mathsf{Z}_1,\mathsf{Z}_2))=P^1$ над $(S\setminus l_0)\times(P^2\setminus\{x_0\})\cong(P^2\setminus\{x_0\})\times(P^2\setminus\{x_0\})$, т.е. Σ_0. гладкая коразмерности 4 в M_0.

Пусть $p:\ R\to M(0,3)$ − проекция. Обозначим $W_0:=p^{-1}(M_0)$. Тогда $\pi:=p|_W:\ W_0\to M_0$ − геометрический фактор по действию группы $SL(H)$. Пусть $Y:=p_0^{-1}(\Sigma_0)\subset W_0$. Многообразие Y неособо. Рассмотрим раздутие $\theta:\widetilde{M}_0\to M_0$. многообразия M_0 вдоль Σ_0. По построению имеем следующий расслоенный квадрат:

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{f} & W_0 \\ \tilde{\pi}\downarrow & & \downarrow\pi \\ \widetilde{M}_0 & \xrightarrow{\theta} & M_0. \end{array}$$

Здесь $f:\ W\to W_0$ − раздутие многообразия W_0 вдоль Y. Обозначим $\Sigma=\theta^{-1}(\Sigma_0)$ − исключительный дивизор на $\widetilde{M}_0$, $D=f^{-1}(Y)$ − исключительный дивизор на W.

2. Универсальное семейство на $W\times P^2$

Ограничивая универсальную монаду на $R\times P^2$ на многообразие $W_0\times P^2$, мы получим комплекс

$$0\to \mathsf{K}':O_{P^2}(-1)\to H\otimes O_{W_0}:\Omega_{P^2}(1)\to \mathsf{L}':O_{P^2}\to 0, \qquad (2.1)$$

в котором $\mathsf{K}':=S_A:O_{G_B}|_{W_0}$ и $\mathsf{L}'':=S_B:O_{G_A}|_{W_0}$, где S_A − тавтологическое расслоение на G_A ранга 3, $S_B=O_{P(H\otimes V^*)}(1)$ − антитавтологическое расслоение на G_B. Когомологический пучок F монады (2.1) является универсальным семейством пучков на P^2, классы S-эквивалентности которых представлены точками многообразия M_0. Рассмотрим морфизм $\psi=f\times\mathrm{id}_{P^2}:\ \ W\times P^2\to W_0\times P^2$. Пучок ψ^*F − когомологический пучок монады $0 \to \mathsf{K} : O_{P^2}(-1) \xrightarrow{\alpha} H \otimes O_W : \Omega_{P^2}(1) \xrightarrow{\beta} \mathsf{L} : O_{P^2} \to 0$, где обозначено $\mathsf{K} := f^* \mathsf{K}'$, $\mathsf{L} := f^* \mathsf{L}'$.

Выполним раздутие $\varphi : W \times S \to W \times P^2$ вдоль $W \times \{x_0\}$. Пусть $F' := \varphi^* \psi^* F$. Нетрудно видеть, что ранг F' подскакивает на $D \times l_0$ и имеет место изоморфизм $Tors(F'|_{y \times S}) \cong O_{l_0}(-1)$ для произвольной точки $y \in D$.

Пусть w: $\mathbf{S} \to W \times S$ − раздутие с центром в $D \times l_0$. Обозначим через $\mathbf{D}$ исключительный дивизор раздутия w, и пусть $д := \varphi \circ w$: $\mathbf{S} \to W \times P^2$, $\delta_{\mathbf{D}} := д|_{\mathbf{D}}$: $\mathbf{D} \to D \times \{x_0\}$. Проекция $pr_1 \circ w$: $\mathbf{S} \to W$ имеет следующее описание. Для $y \in W \setminus D$ имеем $(pr_1 \circ w)^{-1}(y) = S_y \cong S$, а для $y \in D$ − $(pr_1 \circ w)^{-1}(y) = S_y \cup F_y \cong S \cup F_1$, где F_1 − поверхность Хирцебруха, при этом $S_y \cap F_y = l_{0y}$ − исключительная прямая на S_y, но не исключительная на F_y.

Обозначим $\widetilde{F} = д^* \psi^* F = w^* F'$. Пусть $G_1 := д^* \ker\beta$. Это локально свободный пучок, поскольку он является ядром морфизма $w^*(H \otimes O_W : \sigma^* \Omega_{P^2}(1)) \to w^*(\mathsf{L} : O_{P^2})$ морфизма локально свободных пучков. Тогда пучок $\widetilde{F}$ имеет локально свободную резольвенту

$$0 \to w^*(\mathsf{K} : O_{P^2}(-1)) \to G_1 \to \widetilde{F} \to 0.$$

Имеет место следующее утверждение.

Предложение 2.1. *Пучок $\widetilde{F}$ имеет кручение вдоль дивизора $\mathbf{D}$; при этом $Tors\widetilde{F} \cong O_{\mathbf{D}}(\mathbf{D}) \otimes \delta^*_{\mathbf{D}} B$, где B − обратимый пучок на $D \times \{x_0\} \cong D$.*

Доказательство. Проводя рассуждение, аналогичное доказательству предложения 3.1 в [7], получим, что $(Tors\widetilde{F})|_{F_y} \cong O_{F_y}(-\tau)$ для $\forall y \in D$. Рассмотрим теперь подкомплекс $0 \to \mathsf{K}_2 : O_{P^2}(-1) \to \mathsf{H}_2 : \Omega_{P^2}(1) \to \mathsf{L} : O_{P^2} \to 0$ универсальной монады (2.1) на $W_0 \times P^2$, ограниченной на $Y \times P^2$, такой, что в каждой точке $y \in Y$ $\mathsf{H}_2|_y = H^1(I_{x_0 \cup x_1}(-1))$, $\mathsf{K}_2|_y = H^1(I_{x_0 \cup x_1}(-2))$ и, следовательно, $\dim \mathsf{H}_2|_y = 2$, $\dim \mathsf{K}_2|_y = 2$. Когомологический пучок такой монады есть $I_{Y \times \{x_0\} \cup Y'} \otimes (O_{G_A}(1) : O_{G_B}(-1)|_Y \otimes \det \mathsf{H}_2^{\otimes 2} : O_{P^2})$, где $I_{Y \times \{x_0\} \cup Y'}$ − пучок идеалов подсхемы $Y \times \{x_0\} \cup Y' \subset W_0$, в которой $Y' \cong Y$. Пусть $B := f^*(O_{G_A}(1) : O_{G_B}(-1)|_Y \otimes \det \mathsf{H}_2^{\otimes 2} : O_{P^2})$. Имеется вложение $I_{Y \times \{x_0\} \cup Y'} \otimes B : O_{P^2} \to F|_{Y \times P^2}$, откуда $Tors\widetilde{F} \cong O_{\mathbf{D}}(\mathbf{D}) \otimes \delta^*_{\mathbf{D}} B$.

Определим пучок $\mathbf{F}$ точной тройкой

$$0 \to Tors\widetilde{F} \to \widetilde{F} \to \mathbf{F} \to 0. \quad (2.2)$$

Предложение 2.2. *Пучок $\mathbf{F}$ имеет локально свободную резольвенту длины 1.*

Доказательство. Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму, в которой $G := \ker(G_1 \to \mathbf{F})$:

$$
\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
 & 0 \arrow[d] & & Tors\widetilde{F} \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & w^{*}(\mathcal{K} : O_S(-\tau)) \arrow[r] \arrow[d] & G_1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & \widetilde{F} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & G \arrow[r] \arrow[d] & G_1 \arrow[r] & \mathbf{F} \arrow[r] \arrow[d] & 0. \\
 & O_{\mathbf{D}}(\mathbf{D}) \otimes \delta_{\mathbf{D}}^{*} B \arrow[d] & & 0 & \\
 & 0 & & &
\end{tikzcd}
$$

Покажем, что пучок G локально свободен ранга 3. Действительно, по аналогии с предложением 3.3,2) [7] имеет место вложение подрасслоения

$$0 \to B \xrightarrow{s_B} \mathcal{K}\,|_D\,. \qquad (2.3)$$

Далее, расширение $0 \to w^{*}(\mathcal{K} : O_S(-\tau)) \to G \to O_{\mathbf{D}}(\mathbf{D}) \otimes \delta_{\mathbf{D}}^{*} B \to 0$ задается элементом $\xi \in \operatorname{Ext}^1(O_{\mathbf{D}}(\mathbf{D}) \otimes \delta_{\mathbf{D}}^{*} B, w^{*}(\mathcal{K} : O_S(-\tau)))$. Нетрудно видеть, что существует изоморфизм $\operatorname{Ext}^1(O_{\mathbf{D}}(\mathbf{D}) \otimes \delta_{\mathbf{D}}^{*} B, w^{*}(\mathcal{K} : O_S(-\tau))) \cong \operatorname{Hom}(B, \mathcal{K}\,|_D)$: $\xi \mapsto s_B$, где s_B – морфизм подрасслоения из (2.3). Следовательно, ξ как сечение пучка $\mathcal{H}om_{O_D}(B, \mathcal{K}\,|_D)$ нигде не обращается в нуль. Тем самым, по конструкции Серра вышерассмотренное расширение дает локально свободный пучок G.

Таким образом,

$$0 \to G \to G_1 \to \mathbf{F} \to 0 \qquad (2.4)$$

– искомая локально свободная резольвента пучка $\mathbf{F}$.

Рассмотрим последовательность

$$0 \to G\,|_{\mathbf{D}} \to G_1\,|_{\mathbf{D}} \to \mathbf{F}_{\mathbf{D}} \to 0 \; (2.5)$$

$O_{\mathbf{D}}$-пучков, которая точна, так как особенности $\mathbf{F}$ лежат вне $\mathbf{D}$ и, следовательно, $\mathbf{F}_{\mathbf{D}}$ локально свободен на $\mathbf{D}$ ранга 2. Ограничим (2.5) на компоненту F_y слоя над точкой $y \in D$ проекции $pr_1 \circ w : \mathbf{S} \to W$: $0 \to G\,|_{F_y} \to G_1\,|_{F_y} \to \mathbf{F}\,|_{F_y} \to 0.$ Здесь $G_1\,|_{F_y} \cong 5O_{F_y}$, $G\,|_{F_y} \cong O_{F_y}(-\tau) \oplus 2O_{F_y}$. Таким образом, точна последовательность $0 \to O_{F_y}(-\tau) \to 3O_{F_y} \to \mathbf{F}\,|_{F_y} \to 0,$ поэтому $\mathbf{F}\,|_{F_y} \cong \sigma_x{}^{*} T_{P^2}(-\tau)$, где $\sigma_x : F_y \to P^2$ – стягивание исключительной прямой l_{0y} на поверхности Хирцебруха F_y.

Таким образом, пучок $\mathbf{F}\,|_{F_y}(-l_0)$ включается в точную последовательность $0 \to O_{F_y} \to \mathbf{F}\,|_{F_y}(-l_0) \to O_{F_y}(2h - \tau) \to 0$ и в произвольной точке $y \in D$ имеют место равенства $h^0(\mathbf{F}\,|_{F_y}(-l_0)) = 1$ и $h^1(\mathbf{F}\,|_{F_y}(-l_0)) = h^2(\mathbf{F}\,|_{F_y}(-l_0)) = 0$.

Рассмотрим в $\mathbf{S}$ дивизор $Q = w^{-1}(W \times l_0) \cong W \times l_0$, пересекающийся с $\mathbf{D}$ по подмногообразию $w_{prop}^{-1}(D \times l_0) \cong D \times l_0$. Доказано следующее утверждение.

Предложение 2.3. *Пучок* $\delta_{\mathbf{D}*}\mathbf{F}_{\mathbf{D}}(-Q)$ *обратим, и морфизм замены базы* $bch:\ \delta_{\mathbf{D}*}\mathbf{F}_{\mathbf{D}}(-Q) \otimes k_{y\times x_0} \to H^0(\mathbf{F}_{F_y}(-l_0))$ − *изоморфизм в каждой точке* $y \in D$.

Обозначим через N коядро инъективного морфизма $ev(Q):\ \delta_{\mathbf{D}}^*\delta_{\mathbf{D}*}\mathbf{F}_{\mathbf{D}}(-Q) \otimes O_{\mathbf{D}}(Q) \to \mathbf{F}_{\mathbf{D}}$. Пусть $J = \delta_{\mathbf{D}}^*\delta_{\mathbf{D}*}\mathbf{F}_{\mathbf{D}}(-Q) \otimes O_{\mathbf{D}}(Q)$. Это локально свободный $O_{\mathbf{D}}$-пучок ранга 1. Тогда точна тройка $0 \to J \to \mathbf{F}_{\mathbf{D}} \to N \to 0$. Пучок $\mathbf{E}$ определим с помощью точной последовательности

$$0 \to \mathbf{E}(-\mathbf{D}) \to \mathbf{F} \to N \to 0.$$

Предложение 2.4. *Имеет место изоморфизм* $w^*w_*\mathbf{E} \cong \mathbf{E}$.

Доказательство. Поскольку $\mathrm{Tor}_1^{O_{\mathbf{S}}}(O_{\mathbf{D}},\mathbf{F}) = 0$ (см. последовательность (2.5)), то имеется коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathbf{F}(-\mathbf{D}) & \to & \mathbf{E}(-\mathbf{D}) & \to & J & \to & 0 \\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathbf{F}(-\mathbf{D}) & \to & \mathbf{F} & \to & \mathbf{F}_{\mathbf{D}} & \to & 0, \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & N & = & N & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

которая показывает, что точна тройка

$$0 \to \mathbf{F} \to \mathbf{E} \to J(\mathbf{D}) \to 0. \qquad (2.6)$$

Так как пучок $O_{\mathbf{D}}(\mathbf{D}) \otimes \delta_{\mathbf{D}}^* B$ − плоский над $D \times l_0$ и при ограничении на слой P^1 проекции $w|_{\mathbf{D}}$: $\mathbf{D} \to D \times l_0$ имеем $O_{\mathbf{D}}(\mathbf{D}) \otimes \delta_{\mathbf{D}}^* B|_{P^1} \cong O_{P^1}(-1)$, то $w^*w_*\mathbf{F} \cong w^*w_*\widetilde{F} \cong \widetilde{F}$ по последовательности (2.2). Далее, $R^1w_*\mathbf{F} = 0$, поскольку для $\mathbf{F}$ имеется локально свободная резольвента (2.4). Кроме того, нетрудно видеть, что пучок $J(\mathbf{D})$ поднят с $W \times S$, поэтому, применяя последовательно функторы w_* и w^* к тройке (2.6), получим точную последовательность

$$\mathrm{Tor}_1^{O_{W\times S}}(w_*J(\mathbf{D}), O_{\mathbf{S}}) \to \widetilde{F} \to w^*w_*\mathbf{E} \to J(\mathbf{D}) \to 0.$$

Так же, как в предложении 3.9 [7] доказывается изоморфизм

$$\mathrm{Tor}_1^{O_{W\times S}}(w_*J(\mathbf{D}), O_{\mathbf{S}}) \cong O_{\mathbf{D}}(\mathbf{D}) \otimes \det w|_{\mathbf{D}}{}^*$$

$$N^{\vee}_{D\times l_0/W\times S} \otimes J(\mathbf{D}) \cong Tors\widetilde{F} \cong O_{\mathbf{D}}(\mathbf{D}) \otimes \delta_{\mathbf{D}}{}^* B.$$

Тогда точна последовательность $0 \to \mathbf{F} \to w^*w_*\mathbf{E} \to J(\mathbf{D}) \to 0$, и в силу существования морфизма $ev:\ w^*w_*\mathbf{E} \to \mathbf{E}$ по лемме о змее получаем требуемое.

Таким образом, согласно предложению 2.4 ограничение $w_*\mathbf{E}$ на слой S_y проекции $W \times S \to W$ над точкой $y \in D$ изоморфно ограничению пучка $\mathbf{E}$ на компоненту S_y слоя над точкой $y \in D$ проекции $\mathbf{S} \to W$. Далее для семейства $w_*\mathbf{E}$ на $W \times S$ будем использовать то же обозначение $\mathbf{E}$.

Замечание 2.5. *Рассуждая так же, как в замечании 3.11 [7] , получим следующее: пучки в семействе* $\mathbf{E}|_{\mathbf{D}}$ *при ограничении на исключительную прямую* l_0 *имеют единственное прямое слагаемое* $O_{l_0}(-1)$.

Замечание 2.6. *Пользуясь методом Эллингсруда-Геттше [4], можно показать, что от выбора поляризации зависит стабильность только тех пучков E на S, которые являются расширениями вида* $0 \to O_S(\tau - 2h) \to E \to O_S(-\tau + 2h) \to 0$ *или* $0 \to O_S(-\tau + 2h) \to E \to O_S(\tau - 2h) \to 0$. *Нетрудно проверить, в результате перестройки Маруямы пучка* F *мы получаем семейство* $\mathbf{E}$, *такое, что* $\mathbf{E}|_{D\times S}$ *содержит пучки, имеющие либо одну простейшую особенность вне исключительной прямой* l_0, *либо одну простейшую особенность на прямой* l_0 *и одну вне ее, при этом согласно замечанию 2.2.5 при ограничении пучков из* $\mathbf{E}|_{D\times S}$ *на* l_0 *будем иметь в первом случае* $O_{l_0}(-1) \oplus O_{l_0}(1)$ *и* $O_{l_0}(-1) \oplus O_{l_0} \oplus k_x$ *во втором. Пучки, являющиеся расширениями вида* $0 \to O_S(l_0 - h) \to E \to O_S(-l_0 + h) \to 0$ *или* $0 \to O_S(-l_0 + h) \to E \to O_S(l_0 - h) \to 0$, *локально свободны, поэтому не могут появиться в семействе* $\mathbf{E}$.

Непосредственной проверкой с учетом замечания 2.6 получаем следующее утверждение.

Предложение 2.7. *Для произвольной точки* $y \in D$ *пучок* $\mathbf{E}|_{S_y}$ *стабилен относительно любой поляризации* H *на S.*

3. Многообразие $\widetilde{M}_0$

Многообразие $\widetilde{M}_0$ обладает следующим свойством универсальности.

Предложение 3.1. *Пусть* U − *семейство с базой* $\mathbf{B}$, *содержащее стабильные пучки* E *на* S *без кручения ранга 2 с классами Чжэня* $c_1 = 0, c_2 = 3$ *следующих видов:*

(i) $E|_{l_0} = 2O_{l_0}$;

(ii) $E|_{l_0} = O_{l_0}(-1) \oplus O_{l_0}(1)$ *и* E − *пучок с простейшей особенностью вне исключительной прямой;*

(iii) $E|_{l_0} = O_{l_0}(-1) \oplus O_{l_0} \oplus k_z$ *и* E − *пучок с простейшей особенностью вне исключительной прямой и простейшей особенностью на исключительной прямой.*

Тогда семейство U *определяет морфизм* $\Phi : \mathbf{B} \to \widetilde{M}_0$.

Доказательство аналогично [7, §5].

Замечание 3.2. *Из предложения 3.1 также следует, что для различных точек* x *и* x' *в* $\widetilde{M}_0$ *классы изоморфизма* $[\mathbf{E}|_{x\times S}]$ *и* $[\mathbf{E}|_{x'\times S}]$

различны. Действительно, произвольному семейству U *с базой* **B** *соответствует морфизм* $\mathbf{B} \to \widetilde{M}_0$*; с другой стороны, семейство* **E** *определяет морфизм* $\widetilde{M}_0 \to \overline{M_S(0,3)}$ *в многообразие модулей* $\overline{M_S(0,3)}$ *стабильных пучков на* S.

Все вышеизложенное дает нам следующую основную теорему настоящей работы.

Теорема 3.3. *Пусть* M_0 *− открытое подмножество многообразия* $\overline{M_{P^2}(0,3)}$ *модулей стабильных пучков ранга 2 на* P^2 *с классами Чжэня* $c_1 = 0$, $c_2 = 3$, *полученное удалением из* $\overline{M_{P^2}(0,3)}$ *точек, соответствующих классам изоморфизма пучков, имеющих двойную особенность в точке* x_0 *или имеющих особенность в* x_0 *и удовлетворяющих условию* $l(\mathrm{Sing}E) = 3$, *и* $\sigma : S \to P^2$ *− раздутие проективной плоскости* P^2 *в точке* x_0. *Рассмотрим в* M_0 *подсхему* $\Sigma=\{[E]\in M_0 \mid 0\to I_{x_0\cup x_1} \to E \to I_{x_2} \to 0, x_1 \neq x_0, x_2 \neq x_0\}$ *изоморфную расслоению со слоем* P^1 *над произведением* $(P^2 \setminus \{x_0\}) \times (P^2 \setminus \{x_0\})$.

Пусть $\theta : \widetilde{M}_0 \to M_0$ *− раздутие многообразия* M_0 *вдоль* Σ. *Тогда многообразие* $\widetilde{M}_0$ *− открытое подмножество многообразия* $\overline{M_S(0,3)}$ *модулей стабильных (относительно любой поляризации) пучков ранга 2 на* S *с классами Чжэня* $c_1 = 0$, $c_2 = 3$, *точки которого соответствуют классам* $[E]$ *пучков таких, что либо* $E|_{l_0} = 2O_{l_0}$, *либо* $E|_{l_0} = O_{l_0}(-1) \oplus O_{l_0}(1)$ *и* E *− пучок с простейшей особенностью вне исключительной прямой, либо* $E|_{l_0} = O_{l_0}(-1) \oplus O_{l_0} \oplus k_z$ *и* E *− пучок с простейшей особенностью вне исключительной прямой и простейшей особенностью на исключительной прямой.*

Библиографический список

1. Barth W. Moduli of vector bundles on the projective plane // Invent. Math. 42 (1977), 63-91.
2. Ellingsrud G., Göttsche L. Variation of moduli spaces and Donaldson invariants under change of polarizatio // J. Reine Angew. Math. 467 (1995), 1-49.
3. Huybrechts D., Lehn M. The geometry of Moduli Spaces of Sheaves. Aspects of Mathematics. E 31. Braunschweig: Vieweg, 1997.
4. Hulek K., Le Potier J. Sur l'espace de modules des faisceaux semistables de rang 2, de classes de Chern (0,3) sur // Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 39, 2 (1989), 251-292.
5. Le Potier J. Fibres stables de rang 2 sur $P_2(\mathbf{C})$ // Math. Ann. 241 (1979), 217-256.
6. Le Potier J. A propos de la construction de l’espace de modules des faisceaux semi-stables sur le plan projectif // Bull. Soc. math. France, 122 (1994), 363-369.

7. Сорокина М.Е. Бирациональные свойства многообразия модулей полустабильных пучков ранга 2 с классами Чжэня $c_1 = 0$, $c_2 = 2$ на проективной плоскости // Математика в Ярославском университете: сборник обзорных статей к 20-летию математического факультета. Ярославль: ЯрГУ, 2006.