С.А. ТИХОМИРОВ

Замыкания Понселе и многообразие M(0,2) модулей стабильных векторных расслоений ранга 2 на пространстве P^3. I

Многообразие M(0,2) модулей стабильных векторных расслоений ранга 2 с классами Черна $c_1=0$ и $c_2=2$ на P^3 было впервые рассмотрено в работе Р. Хартсхорна [2]. В этой работе он доказал, используя так называемые замыкания Понселе, что M(0,2) имеет структуру расслоенного пространства со слоем − открытым подмножеством гладкой квадрики в P^5 над 9-мерным многообразием так называемых регулюсов − гладких квадрик в P^3 с выделенной системой образующих прямых. Дальнейшему изучению свойств пространства M(0,2) посвящена серия работ [3]-[7]. В частности, М.Нарасимхан и Г.Траутманн в статье [3] построили компактификацию $\widetilde{M}(0,2)$ пространства M(0,2) в терминах замыканий Понселе и построили морфизм $\varphi:\widetilde{M}(0,2)\to M(0,2)^{v}$, где $M(0,2)^{v}$ − нормализация замыкания пространства M(0,2) в схеме Маруямы полустабильных пучков на P^3 с классами Черна $c_1=0$, $c_2=2$, $c_3=0$. Кроме того, из результатов [2] и [3] непосредственно вытекает существование морфизма p: $\widetilde{M}(0,2)\to P^{20}$ такого, что $p|_{M(0,2)}$ − вложение. (Ниже в статье мы приводим конструкцию морфизма p.)

Рассмотрим 4-мерное векторное пространство T и его вторую внешнюю степень $H:=\Lambda^2T$ и будем интерпретировать пространство $P(S^2H^\vee)\cong P^{20}$ как пространство квадрик в $P(H)\cong P^5$. Рассмотрим многообразие $\Delta=\{x\in P(S^2H^\vee)|$ квадрика $Q_x\subset P(H)$ имеет ранг $\le 3\}$, где под Q_x понимается квадрика в P(H), соответствующая точке в $x\in P(S^2H^\vee)$. В работе [4] Ж. Ле Потье показал, что: 1) Δ изоморфно хорошему в смысле геометрической теории инвариантов фактору $L^{ss}//GL(V)$, где V − двумерное векторное пространство, а L^{ss} − множество GL(V)-полустабильных по Мамфорду точек пространства $L:=\mathrm{Hom}(H,S^2V^\vee)$; 2) замыкание $\overline{M(0,2)}$ образа многообразия M(0,2) при вложении $p:M(0,2)\to P^{20}$ есть дивизор из линейного ряда $|O_{P^{20}}(2)|\Delta|$; 3) пусть $D=\pi^{-1}\overline{M(0,2)}$, где $\pi:L^{ss}\to\Delta$ − каноническая проекция; тогда D задается уравнением пфаффиана Pfaff(x)=0 для точек $x\in L^{ss}$, интерпретируемых как кососимметрические гомоморфизмы $x:T^\vee\otimes V\to T\otimes V^\vee$.

В настоящей статье устанавливается взаимосвязь между вышеуказанными результами работ [3] и [4], а именно, мы находим точное описание многообразия $\overline{M(0,2)}$ в Δ как пересечения Δ с гиперквадрикой Понселе Φ_{Ponc} в P^{20}, задаваемой уравнением $F_G=0$, где квадратичная форма F_G определена ниже в (5). Отсюда вытекает связь пфаффиана Pfaff и формы F_G через равенство $\mathrm{const.Pfaff}=p^*F_G$. Эти и другие результаты собраны в теоремах 1, 2 и 3 в конце статьи.

Всюду в статье в качестве основного поля берется k=C. Пусть $G:=G(1,3)$ − грассманиан прямых пространства $P^3=P(T)$, соответственно $G:=G(2,5)$ − грассманиан плоскостей пространства $P^5=P(H)$, $X=\{(P^2,x)\in G\times P^{20}|P^2\subset \mathrm{Sing}\,Q_x\}\xrightarrow{\theta}\Delta$ − стандартное детерминантное разрешение многообразия Δ. На G имеет место стандартная точная тройка

$$0\to S\to H\otimes O_G\xrightarrow{\varepsilon}W^\vee\to 0, \quad (1)$$

где S − тавтологическое подрасслоение ранга 3, а W − второе тавтологическое расслоение ранга 3 на G. Тройка (1) индуцирует точные тройки

$$0\to K\to S^2H\otimes O_G\xrightarrow{s^2\varepsilon}S^2W^\vee\to 0 \quad (2)$$

и

$$0\to B\to S^2(S^2H)\otimes O_G\xrightarrow{e:=s^2(s^2\varepsilon)}S^2(S^2W^\vee)\to 0, \quad (3)$$

где $K:=\ker s^2\varepsilon$ и $B:=\ker e$, соответственно.

Естественный изоморфизм $\sigma_G:H^\vee\xrightarrow{\approx}\Lambda^4T^\vee\otimes H\cong H$, определенный однозначно с точностью до скалярного множителя, является квадратичной формой на $H^\vee$, то есть $\sigma_G\in S^2H=H^0(S^2H\otimes O_G)$. В дальнейшем будем интерпретировать произвольный слой W

расслоения W как подпространство в H и, тем самым, P(W) как точку в G посредством вложения $W \xrightarrow{\varepsilon^{\vee}} H^{\vee} \xrightarrow{\approx\sigma_G} H$, где ε − морфизм в (1). Заметим, что эпиморфизм $s^2\varepsilon$ в (2) индуцирует вложение проективных спектров $P(S^2W^{\vee})=P(S^2W) \to P(S^2H\otimes O_G) = P(S^2H^{\vee})\times G=P^{20}\times G$, образ которого по построению совпадает с вышеуказанным разрешением X детерминантали Δ. Тем самым, $\rho: X \to P^{20}\times G \xrightarrow{pr_2} G$ − проективное расслоение со слоем $P(S^2W)\cong P^5$ над произвольной точкой $P(W)\in G$, такое, что $O_{P(S^2W^{\vee})}(1)=\theta^*(O_{P^{20}}(1)|_{\Delta})$.
Отсюда следует, в частности, что эпиморфизм e в (3) совпадает с композицией
e: $S^2(S^2H)\otimes O_G = pr_{2*}pr_1^*O_{P^{20}}(2) \to \rho_*\theta^*(O_{P^{20}}(2)|_{\Delta}) = \rho_*O_{P(S^2W^{\vee})}(2) = S^2(S^2W^{\vee})$, (4)
где pr_1 – проекция $P^{20}\times G \to P^{20}$, а морфизм ρ определен ниже в диаграмме (10).

Рассмотрим сечение

$$\sigma = h^0(\varepsilon)(\sigma_G)\in H^0(S^2W). \quad (5)$$

Морфизм e в (3) индуцирует гомоморфизм групп сечений $\varphi=h^0(e)$: $S^2(S^2H)=H^0(S^2(S^2H)\otimes O_G) \to H^0(S^2(S^2W^{\vee}))$, переводящий квадратичную форму

$$\Phi_G:=S^2\sigma_G-\frac{1}{2}\sigma_G\circ\sigma_G \quad (6)$$

на $S^2H^{\vee}$ в сечение

$$\Phi_\sigma:=S^2\sigma-\frac{1}{2}\sigma\circ\sigma\in H^0(S^2(S^2W^{\vee})). \quad (7)$$

(Напомним, следуя [3,§3.2], что по определению $\sigma_G\circ\sigma_G$ есть симметрический гомоморфизм $S^2H^{\vee} \to S^2H: x\circ y \mapsto \sigma_G(x\circ y)\sigma_G$).

Пусть P^3_α − база семейства α-плоскостей на G и, соответственно, P^3_β − база β-семейства на G, где под α-плоскостью (соответственно, β-плоскостью) понимается плоскость, параметризующая прямые в P^3, проходящие через фиксированную точку (соответственно, лежащие в фиксированной плоскости). Так как для произвольной плоскости $P^2=P(W) \in P^3_\alpha \bigcup P^3_\beta$ форма $\sigma_G|_W$ тождественно обращается в нуль, то из (6) имеем:

$$P^3_\alpha \coprod P^3_\beta=(\Phi_\sigma)_0. \quad (8)$$

Будем говорить, что коника $C^{\vee}$ в двойственной к P^2 плоскости $P^{2\vee}$ находится в замыкании Понселе с коникой S в плоскости P^2, и называть пару $(S,C^{\vee})$ парой Понселе, если существует треугольник, описанный около S, вершины которого лежат на двойственной к $C^{\vee}$ конике $C=(C^{\vee})^{\vee}$. Как показано в [2,§3], для общей плоскости $P(W)\subset P^5$ и коники $S=P(W)\cap G=\{Cx\in P(W)|\sigma_G(x)=0\}$ множество $Ponc(P(W),S)=\{C^{\vee}$ − коника в $P(W^{\vee})$ | $(S,C^{\vee})$ – пара Понселе$\}$ удовлетворяет как подмножество в $P(S^2W)$ уравнению:

$Ponc(P(W),S)=\{y\in P(S^2W)|\ \Phi_\sigma(y)=0\}$. (9)

Пусть C(G) − схема Гильберта коник, лежащих в G. Рассмотрим расслоенный квадрат

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{X} & \xrightarrow{\tau} & X \\ f\downarrow & & \downarrow\rho \\ C(G) & \xrightarrow{\delta} & G, \end{array} \quad (10)$$

в котором $\delta: C(G) \to G$ − раздутие G с центром в $P^3_\alpha \coprod P^3_\beta$, так что $X=P(\delta^*S^2W^{\vee}) \to C(G)$ − расслоение со слоем P^5, и обозначим $M:=\{x\in P(S^2W^{\vee})|(((x)=0\}$. Как показано в [3], многообразие $\widetilde{M}(0,2)$ реализуется как дивизор в X такой, что $\widetilde{M}(0,2)$ =M. Отсюда с учетом (8) и (9) следует, что (i) $\widetilde{X}\times_X M$ есть объединение двух дивизоров в $\widetilde{X}$:

$$\widetilde{X}\times_X M=C(G)\times_G M=Y\cup \widetilde{M}(0,2), \quad (11)$$

где $Y:=(\rho\circ\tau)^{-1}(P^3_\alpha \coprod P^3_\beta)$;

(ii) $\widetilde{M}(0,2) \to$ C(G) − расслоение со слоем Ponc(P(W),S) над произвольной точкой (P(W),S)$\in$C(G). Таким образом, предыдущая диаграмма достраивается до диаграммы, состоящей из расслоенных квадратов:

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Y} \cup \widetilde{M}(0,2) & \to & \widetilde{X} & \xrightarrow{f} & \mathrm{C(G)} \\ \tau\downarrow & & \tau\downarrow & & \delta\downarrow \\ \mathrm{M} & \to & \mathrm{X} & \xrightarrow{\rho} & \mathrm{G}. \end{array}$$

При этом упомянутый в начале статьи морфизм p: $\widetilde{M}(0,2) \to \mathrm{P}^{20}$ строится как композиция $\widetilde{M}(0,2) \to \widetilde{X} \xrightarrow{\tau} X \to P^{20} \times G \xrightarrow{pr_1} P^{20}$ (см. [3,§2]).

Напомним, что, как доказано в [2,§9], $p|_{M(0,2)}$ − вложение, а значит, $p: \widetilde{M}(0,2) \to \overline{M(0,2)} = p(\widetilde{M}(0,2))$ − бирациональный морфизм. Теперь заметим, что при этом бирациональном морфизме слои проекции $\widetilde{M}(0,2) \to$ C(G) в силу определения формы Φ_σ (см. (6) и (7)) переходят в подмногообразия в детерминантали Δ в P^{20} вида $\{ y \in \mathrm{P(S^2W)} \subset \Delta \,|\, \Phi_{\mathrm{G}}(y) = 0 \}$. Следовательно,

$$\overline{M(0,2)} = \Delta \cap Q_{Ponc}, \qquad (12)$$

где $\mathrm{Q_{Ponc}}$ – гиперквадрика в P^{20} с уравнением Φ_{G}=0. Назовем $\mathrm{Q_{Ponc}}$ *гиперквадрикой Понселе*.

Далее, как известно, для $x \in \mathrm{L^{ss}} \subset \mathrm{Hom(H,S^2V^\vee)} \subset \Lambda^2(\mathrm{T^\vee} \otimes \mathrm{V^\vee})$ определен пфаффиан Pfaff(x):= Λ^4x как элемент пространства $\Lambda^8(\mathrm{T^\vee} \otimes \mathrm{V^\vee})$, и согласно Ле Потье [4, предложение 5.1], дивизор $\pi^{-1}(\overline{M(0,2)})$ на $\mathrm{L^{ss}}$ задается уравнением Pfaff(x)=0 (здесь $\pi: \mathrm{L^{ss}} \to \Delta = \mathrm{L^{ss}}//\mathrm{GL(V)}$ − отображение факторизации).

Собирая вместе полученные результаты, имеем следующую теорему.

Теорема 1.

(1) Существует выделенная гиперквадрика $\mathrm{Q_{Ponc}}$ *в* P^{20} *с уравнением* $\mathrm{F_G}$*=0* *такая, что* $\overline{M(0,2)} = \Delta \cap \mathrm{Q_{Ponc}}$.

*(2) const.*Pfaff=$p^*\mathrm{F_G}$.

(3) Многообразие $\widetilde{M}(0,2)$ *как дивизор в* $X=P(S^2 W^\vee) \times_G C(G)$ *задается равенством* $\widetilde{M}(0,2) = (\Phi)_0$, *где* $\Phi = pr_2^* \Phi_{\mathrm{G}}(-Y)$, *а* pr_2 *означает композицию*

$$X \to C(\mathrm{G}) \times P^{20} \to P^{20}. \text{ Соответственно, } O_X(\widetilde{M}(0,2)) = pr_2^* O_{P^{20}}(2)(-Y).$$

(4) $\widetilde{M}(0,2)$ *есть раздутие M вдоль подсхемы* $Z=\rho^{-1}(P^3_\alpha \coprod P^3_\beta)$, *где морфизм* $\rho: X \to G$ *определен в диаграмме* (10).

Естественный вопрос, возникающий в связи с описанием (12) многообразия $\overline{M(0,2)}$, состоит в том, является ли $\mathrm{Q_{Ponc}}$ единственной гиперквадрикой в P^{20}, пересекающей Δ по многообразию $\overline{M(0,2)}$, то есть какова размерность линейного ряда $|I_{\overline{M(0,2)},\Delta}(2)|$. Для этого нам потребуется следующая лемма.

Лемма. *Пусть V - тавтологическое расслоение ранга 2 на грассманниане* $G' = G(1,P^5)$. *Тогда* $h^0(S^2(S^2V^\vee))=231$.

Доказательство. Рассмотрим многообразие флагов $\Gamma = \{(x, P^1) \in P^5 \times G' | x \in P^1\}$ с проекциями $P^5 \xleftarrow{r} \Gamma \xrightarrow{q} G'$ и обозначим H=q*$O_{\mathrm{G'}}$(1), R=r*O_{P^5}(1). Как известно (см., например, [1,(5.2.2-3) и (5.11.5)]), на Γ точна тройка

$$0 \to \mathrm{H} \otimes \mathrm{R}^{-1} \to \mathrm{q}^* V^\vee \to \mathrm{R} \to 0 \qquad (13)$$

и, тем самым, тройка

$$0 \to \mathrm{q}^* V^\vee \otimes \mathrm{H} \otimes \mathrm{R}^{-1} \to \mathrm{E} \xrightarrow{\gamma} \mathrm{R}^2 \to 0, \qquad (14)$$

где E:=q*$S^2V^\vee$. Заметим, что det q* $V^\vee$=H, так что det E=H^3 и имеем изоморфизмы $\Lambda^2E \cong E^\vee \otimes H^3 \cong E\otimes H$, поэтому разложение $E\otimes E = S^2E \oplus \Lambda^2 E$ можно переписать в виде:

$$E\otimes E = S^2E\oplus E\otimes H. \qquad (15)$$

Далее, тензорно умножая (13) на R^2 и соответственно (14) на E, R^2 и H, получаем с учетом (13) точные тройки

$0\to H^2 \to q^*V^\vee \otimes H\otimes R \to H\otimes R^2 \to 0$, (16)

$0\to q^*V^\vee \otimes E\otimes H\otimes R^{-1} \to E\otimes E \xrightarrow{id\otimes\gamma} E\otimes R^2 \to 0$, (17)

$0\to q^*V^\vee \otimes H\otimes R \to E\otimes R^2 \xrightarrow{\gamma\otimes id} R^4 \to 0$, (18)

$0\to q^*V^\vee \otimes H^2\otimes R^{-1} \to E\otimes H \xrightarrow{\gamma\otimes id} H\otimes R^2 \to 0$. (19)

Так как левые расслоения в тройках (17) и (19), будучи ограничены на слой P^1 проекции q, имеют, очевидно, нулевые когомологии, то в силу замены базы и спектральной последовательности Лере для проекции q все когомологии этих пучков зануляются, и мы получаем изоморфизмы

$$h^i(id\otimes\gamma): H^i(E\otimes E) \xrightarrow{\approx} H^i(E\otimes R^2),\ h^i(\gamma\otimes id): E\otimes H \xrightarrow{\approx} H^i(H\otimes R^2). \qquad (20)$$

Далее, поскольку $r_*H^2=S^2\Omega_{P^5}(2)$, $R^ir_*H^2=0$, i>0, из точной последовательности Эйлера и спектральной последовательности Лере для проекции r находим: $h^0(H^2)=105$, $h^i(H^2)=0$, i>0. Аналогично, $h^i(H\otimes R^2)=0$, i>0. Отсюда ввиду (16) и (20) имеем: $h^0(q^*V^\vee\otimes H\otimes R)=105+h^0(H\otimes R^2)=105+h^0(E\otimes H)$, $h^i(q^*V^\vee\otimes H\otimes R)=0$, i>0. Последние равенства вместе с (18) и (20) дают: $h^0(E\otimes E)= h^0(E\otimes R^2)= h^0(R^4)+105+h^0(E\otimes H)$, откуда в силу (15) и равенства $h^0(R^4)=h^0(r^*O_{P^5}(4))= h^0(O_{P^5}(4))=126$ получаем: $h^0(S^2(S^2\ V^\vee))=h^0(S^2E)=231$.

Лемма доказана.

Теперь рассмотрим многообразие флагов $\Pi=\{(P^1,P^2)\in G'\times G\mid P^1\subset P^2\}$ с проекциями $G' \xleftarrow{u} \Pi \xrightarrow{v} G$ и обозначим $\widetilde{H}=v^*O_G(1)$, $\widetilde{R}=O_{G'}(1)$. На П имеется стандартная точная тройка расслоений: $0\to\widetilde{H}\otimes\widetilde{R}^{-1}\to A\to B\to 0$, где обозначено A=v*$W^\vee$, B=u*$V^\vee$. Эта тройка индуцирует точную тройку: $0\to\widetilde{H}\otimes\widetilde{R}^{-1}\otimes A\to S^2A\xrightarrow{s^2a} S^2B\to 0$, которая, в свою очередь, дает две точные тройки:

$$0\to \ker(s^2a)\to S^2(S^2A)\xrightarrow{s^2a} S^2(S^2B)\to 0, \qquad (21)$$

$$0\to \widetilde{H}^2\otimes\widetilde{R}^{-2}\otimes S^2A\to \ker(s^2a)\to \widetilde{H}\otimes\widetilde{R}^{-1}\otimes A\otimes S^2B\to 0. \qquad (22)$$

Нетрудно видеть, что ограничение расслоения B на произвольный слой P^2 проекции v изоморфно $T_{P^2}(-1)$, а значит, ограничение на этот слой расслоения $\widetilde{H}\otimes\widetilde{R}^{-1}\otimes A\otimes S^2B$ изоморфно $C^3\otimes S^2T_{P^2}(-3)$. Из точной последовательности Эйлера на P^2 получаем, что все когомологии последнего пучка тривиальны, а значит, в силу замены базы и спектральной последовательности Лере для проекции v все когомологии расслоения $\widetilde{H}\otimes\widetilde{R}^{-1}\otimes A\otimes S^2B$ зануляются. Аналогично зануляются все когомологии расслоения $\widetilde{H}^2\otimes\widetilde{R}^{-2}\otimes S^2A$. Отсюда и из (21), (22) и предыдущей леммы получаем: $h^0(S^2(S^2A))=h^0(S^2(S^2B))$. Тем самым,

$h^0(S^2(S^2W^\vee))=h^0(S^2(S^2A))=h^0(S^2(S^2B))=h^0(S^2(S^2V^\vee))=231=\dim S^2(S^2H)$. (23)

Сформулируем теперь следующее утверждение, подробное доказательство которого будет приведено в последующей публикации.

Теорема 2. *Отображение групп сечений* $h^0(e):S^2(S^2H) \to H^0(S^2(S^2W^\vee))$ *для точной тройки (3) сюръективно.*

Заметим, что в силу (4) гомоморфизм $h^0(e)$ разлагается в композицию

$$S^2(S^2H)=H^0(O_{P^{20}}(2)) \xrightarrow{h^0(res_\Delta)} H^0(O_{P^{20}}(2)|_\Delta \xrightarrow{\theta^*} H^0(O_{P(S^2W\ )}(2))=H^0(S^2(S^2W^\vee)).$$

Отсюда и из теоремы 2 и (23) вытекает

Теорема 3. *Отображение групп сечений*

$$H^0(\mathcal{O}_{P^{20}}(2)) \xrightarrow{h^0(res_\Delta)} H^0(\mathcal{O}_{P^{20}}(2)|_\Delta \xrightarrow{\theta^*} H^0(\mathcal{O}_{P(S^2W)}(2)) = H^0(S^2(S^2W^\vee)) -$$

изоморфизм. Тем самым, гиперквадрика Понселе Q_{Ponc} − *единственная гиперквадрика в* P^{20}, *высекающая многообразие* $\overline{M(0,2)}$ *из детерминантали* Δ.

Библиографический список

1. 1.Altman A.B., Kleiman S.L. Foundations of the theory of Fano schemes. // Compositio Math. 34 (1977), 3-47.
2. Hartshorne R. Stable vector bundles of rank 2 on P_3.//Math. Ann., 238 (1978), 229-280.
3. Narasimhan M.S., Trautmann G. Compactification of M_{P_3} 0,2) and Poncelet pairs of conics.//Pacific J. Math., 145 (1990), 255-365.
4. Le Potier J. Instantons de degre 2 et faisceaux quasi-symplectiques. Preprint, Univ. Paris VII, 1990.
5. Narasimhan M.S., Trautmann G. The Picard group of the compactification of M_{P_3} 0,2) .// J. Reine Angew. Math. 422, 21-44 (1991).
6. Singhof W., Trautmann G. On the topology of the moduli space M(0,2) of stable bundles of rank 2 on P^3.// Q. J. Math., Oxf. II. Ser. 41, No.163, 335-358 (1990).
7. Narasimhan M.S., Trautmann G. Compactification of M(0,2). Vector bundles on algebraic varieties, Pap. Colloq., Bombay 1984, Stud. Math., Tata Inst. Fundam. Res. 11, 429-443 (1987).