Г.Е. КОЗЛОВ, Е.И. СМИРНОВ

Наглядное моделирование в обучении математике студентов педагогических вузов

Задолго до открытия асимметрии человеческого мозга (правое полушарие оперирует наглядными образами, левое – словесно-логическими процедурами) известный математик Д. Гильберт замечал: «В математике, как и вообще в научных исследованиях, встречаются две тенденции: тенденция к абстракции – она пытается выработать логическую точку зрения на основе различного материала и привести этот материал в систематическую связь, и другая тенденция – тенденция к наглядности, которая в противоположность к этому стремится к живому пониманию объектов и их внутренних отношений». В то же время традиционная классификация мышления связана с разделением его на наглядно-действенное, наглядно-образное и словесно-логическое. Эти типологии естественно отражались на принципах и методах обучения математике: принцип наглядности в обучении, метод моделирования, теоретическое обобщение и т.п. Однако реализация принципа наглядности связывается обычно с использованием различных средств: технических (в том числе компьютера), плакатов, рисунков, моделей, схем и т.д., выполняющих функцию оперативного воздействия на органы чувств (в основном, зрения).

В этой связи исторический подход к наглядности в обучении математике как к опоре на чувственное восприятие дает максимальный эффект в начальной школе и явно недостаточен при изучении высших разделов математики. Дело в том, что, с одной стороны, математический язык обладает естественным «формализмом», каждый математический знак, символ, геометрическая фигура, диаграмма или график уже есть обобщение, «уход» от реальных объектов и ощущений, и чем выше раздел математики, тем абстрактнее математический язык. Поэтому необходимы анализ и моделирование студентами абстракций, ведущих к пониманию сущности математического объекта, явления или процесса. С другой стороны, личность обучаемого должна быть обогащена рациональным и логическим мышлением (анализ, синтез, аналогия, конкретизация и т.п.) в единстве с – «мгновенными актами» усмотрения сущности: инсайтом, интуицией, догадкой, основанных на наглядных образах и чувственной реальности, развитие которых является одной из важнейших задач математического образования. И как результат, получим наглядное оперирование математическими объектами и математическим языком с существенной опорой на рациональное и логическое мышление.

В то же время попытка описать какую-либо проблемную область в виде логической структуры аксиом, понятий, теорем, отражающих фундаментальные факты и закономерности, испытывает значительные трудности и приводит к неполноте описания. Глубина и широта поиска в логической структуре, процедура поиска оптимального пути вступают в противоречие с психофизиологическими возможностями восприятия человека (миллеровские числа, законы гештальта, психомоторика и т.п.). Возникает проблема адекватной структуризации на основе выделения существенных связей и наглядного моделирования логического поля в соответствии с закономерностями восприятия, памяти и мышления.

Технология наглядного моделирования [1] позволяет стимулировать мотивации разного уровня и длительности. Моделирование своим объектом имеет модели. В исследовании Н.Г. Салминой [2] разводятся понятия схемы и модели в учебной деятельности. Если модель не предполагает исследовательской функции, а применяется для иллюстрации каких-то положений или выступает как средство усвоения готового материала, то это схема, а вид знаково-символической деятельности – схематизация.

Представление знаний связано со знаково-символической деятельностью и характеризуется структурированностью, связностью и активностью представления. Виды знаково-символической деятельности порождают тип моделей представления знаний, принятых в инженерии знаний и решений проблем искусственного интеллекта: логические, реляционные, семантические сети, продукционные, фреймовые.

Модель должна адекватно отражать основные, главные черты исследовательской деятельности школьников и должна быть описана математически; кроме того, необходимо учесть роль каждого определяющего структуру элемента, его функции и характеристики. Исходя из системного подхода, при исследовании наглядного моделирования в обучении следует выявить структуру этого процесса, так как именно она и должна быть формализована при построении модели познавательной деятельности школьников. Изучение этой структуры невозможно без знания специфики учебного процесса и особенностей методики применения средств и видов наглядного обучения, без использования практического опыта имеющихся в педагогике подходов и методик. После изучения ориентировочной основы и структуры наглядного моделирования необходимо проектировать систему организации и управления исследовательской деятельностью школьников в условиях рефлексии и совместной работы в малых группах.

Поэтому актуальной является проблема такой организации процесса обучения математике, когда представления, возникающие в мышлении обучаемых, отражают основные, существенные, ключевые стороны предметов, явлений и процессов, в том числе посредством адекватного моделированиия математического знания.

Именно формирование этих узловых, опорных качеств объекта восприятия (перцептивная модель) и представляет собой суть процесса наглядного моделирования. Такой подход a priori предполагает моделирование объекта восприятия с опорой на нейрофизиологические механизмы памяти, закономерности восприятия, ментальные возможности и аффективные состояния личности. При этом особую значимость приобретают модели, фиксирующие процедуру математических действий в процессе исследовательской активности.

Таким образом, наглядность – не только особое свойство психических процессов, но и свойство математического объекта в рамках учебного исследования. Таковым он становится, когда у статистически достоверной выборки обучаемых возникают наглядные перцептивные образы (а значит, и у генеральной совокупности обучаемых). Это, возможно, снимает рассуждения такого свойства: «Поэтому можно говорить (и обычно так всегда и делают), что тот или иной предмет, явление, событие наглядны, имея в виду, что для нас наглядны образы этих объектов» [3].

Наглядность математического объекта (или перцептивного образа) определяется, как уже отмечалось, факторами восприятия, представления, мнемическими процессами в их единстве на основе диагностируемого целеполагания. Следующие критерии определяют существо наглядности математического объекта:

– диагностируемое целеполагание целостности математического объекта (моделирование, кодирование, схематизация, замещение);
– понимание обучаемым сущности математического объекта (адекватность восприятия);
– устойчивость перцептивного образа и представления;
– познавательная и творческая активность обучаемого на основе комфортности и успешности обучения.

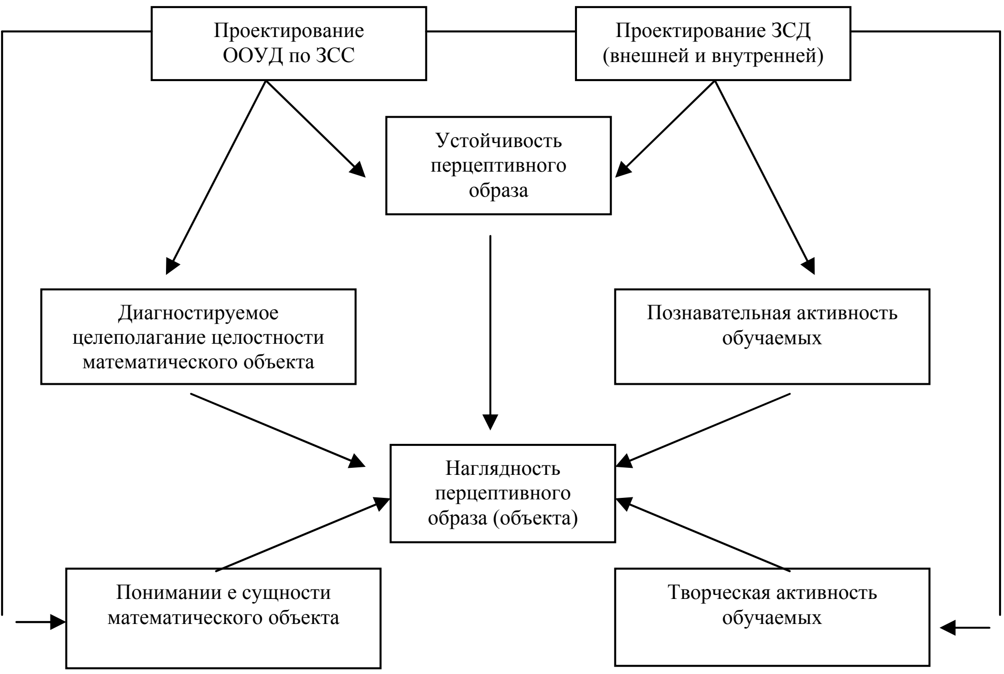
Первый и третий критерии обуславливаются проектированием ориентировочной основы учебной деятельности (ООУД) со знаково-символическими средствами учебного процесса, второй и четвертый – знаково-символической деятельностью как обучаемого, так и обучающего (как внешнего, так и внутреннего плана). Более наглядно это представляется на следующей схеме (ЗСС – знаково-символические средства; ЗСД – знаково-символическая деятельность).

Системная реализация в процессе исследовательского обучения математике всех видов наглядного моделирования выступает фактором формирования целостных образов математических объектов, неотъемлемым этапом имитации научного познания в обучении школьников, а значит, и значительно способствует усвоению математических знаний и развитию когнитивных способностей и математического мышления.

Наглядное моделирование – это формирование адекватного категории диагностично поставленной цели устойчивого результата внутренних действий обучаемого в процессе моделирования существенных свойств, отношений, связей и взаимодействий при непосредственном восприятии приемов знаково-символической деятельности с отдельными знаниями или упорядоченными наборами знаний.

Таким образом, наглядное моделирование в обучении есть процесс, включающий в себя как проектирование и построение a priori модели (схемы, кода, заместителя), отражающей существо объекта

результата внутренних действий обучаемых в процессе учебной деятельности. Предпочтение отдается «наглядной модели» в смысле опоры на устойчивые ассоциации, простые геометрические формы, психологические законы восприятия и нейрофизиологические механизмы памяти. Наглядная модель должна отражать суть понятия, формы или метода исследования. Выявление сущности каждого компонента наглядного моделирования в обучении математике предполагает поиск, познание и раскрытие закономерностей эффективного ее функционирования, создания условий для комфортной совместной деятельности преподавателя и ученика, получение диагностируемого адекватного результата внутренних действий обучаемого. Использование «мягких математических моделей» по В.И. Арнольду [4] при создании ориентировочной и информационной основы учебной деятельности создает условия для оптимального управления познавательной деятельностью обучаемых. Важным обстоятельством является то, что наглядное моделирование осуществляется по III типу



восприятия, так и формирование адекватного

ориентировки П.Я. Гальперина, способствует формированию теоретического (математического) мышления и целостному подходу к выявлению сущности учебных элементов.

Определение и наглядное моделирование ООУД в процессе исследовательского поведения школьников создает основы для формирования положительной мотивации достижения результатов, самореализации личности и мотивации интеллектуального напряжения. В обосновании такого подхода лежит методологический тезис А.Н. Леонтьева: «… актуально осознается только то содержание, которое является предметом целенаправленной деятельности ученика, т.е. занимает структурное место непосредственно цели внутреннего или внешнего действия в системе той или иной деятельности» [6].

Еще с начала XX столетия целый ряд психологов (О. Зельц, М. Вертгеймер, М. Бунге и др.) подчеркивали существенность процесса визуализации исследовательской ситуации как важного этапа решения задачи. Интересно отметить, что подобные вопросы возникают при анализе деятельности оператора автоматизированных систем управления (АСУ) в инженерной психологии, т.к. основным видом его деятельности является деятельность с информационными моделями. В информационную модель включаются данные об объектах управления, состоянии внешней среды и самой системы управления. «Информационная модель для оператора является источником информации, пользуясь которой он оценивает ситуацию и принимает решения, обеспечивающие правильную работу системы и выполнение возложенных на нее задач» [5. С. 122]. Работая с информационной моделью (доска управления, индикаторы, экраны и т.п.), оператор АСУ принимает решения вне непосредственного контакта с реальностью и объективно заинтересован в получении достоверной информации и адекватном реагировании на изменения ситуации. При этом наблюдаются очевидные аналогии с процессом обучения и проблемой наглядного моделирования объектов и действий. «Информационная модель должна быть наглядной, т. е. оператор должен иметь возможность воспринимать сведения, даваемые моделью быстро и без их кропотливого анализа» [5. С. 497].

Следующая таблица показывает прямые аналогии содержания понятия наглядного моделирования в обучении и требований к информационным моделям в инженерной психологии [5. С. 496-500].

Таблица 1

№	Существенные связи наглядного моделирования в обучении	Требования к проектированию информационных моделей в инженерной психологии
1	Отражение существенных свойств, отношений, взаимодействий математических объектов и действий.	Модель представляет собой абстракцию, в которой сохраняются существенные свойства, отношения, взаимодействия.
2	Непосредственное восприятие математических объектов и действий.	Модель должна быть наглядной т.е. сведения, поставляемые моделью, должны быть восприняты быстро и без их кропотливого анализа.
3	Адекватность категории диагностично поставленной цели результатам внутренних действий обучаемых.	Модель должна быть геометрически подобной их (структурных компонентов объекта) действительному расположению.
4	Моделирование существенных свойств математических объектов и действий.	Модель имеет правильную организацию структуры (отбор того существенного и типичного, что позволяет с максимальной эффективностью донести существо реальной ситуации).
5	Устойчивость результатов внутренних действий обучаемых, соответствие законам психологии восприятия.	Необходимо учитывать психофизиологические возможности человека.

Критерием эффективности при работе с информационной моделью (так же, как и с наглядной моделью в обучении) должны служить время и точность выполнения заданий при получении успешного результата. Безусловно, что в учебной деятельности критерием эффективности управляющих воздействий служат также (и в первую очередь) академическая успешность и позитивные изменения в когнитивной и аффективной сферах личностного развития.

В содержательной основе наглядного моделирования в обучении лежит типология моделей знаково-символических средств, реально используемых в математике.

Логические модели представляют математические знания посредством исчисления предикатов и адекватных "иерархических деревьев". Достоинством знаково-символичес-ких средств, использующих буквенно-цифровую символику, являются фиксированность алфавита и существование мощных процедур логического вывода. Дерево – это плоский, связный, ациклический граф. Каждый граф, не содержащий циклов, называется лесом. Таким образом, компонентами леса являются деревья. В вершинах графа обычно располагаются учебные элементы (понятия, теоремы, алгоритмы, математические методы, спирали фундирования и т.п.), ребра обозначают отношение между учебными элементами. Таким образом, можно построить логическую структуру понятий или теорем учебного предмета. Однако здесь прямые аналогии инженерии знаний и представления знаний в мышлении человека заканчиваются. Глубина и ширина поиска, процедуры поиска оптимального пути вступают в противоречие с физиологическими и психологическими возможностями восприятия (миллеровские числа, законы гештальта, психомоторика и т.п.). Поэтому, например, в логической структуре понятий должно быть 7±2 базовых понятий (вершин) и 3–4 уровня глубины дерева, с теми же миллеровскими числами в каждой промежуточной вершине. Если это не выполнимо в рамках данного учебного материала, то необходима его глобальная структуризация.

Реляционные модели в основном представляются разнообразными таблицами. В математике таблицы являются не только средством представления знаний, но и учебными элементами, например, матрицы в алгебре, таблицы производных и интегралов в математическом анализе, электронные таблицы в информатике и т.д. Таблицы легко воспринимаются, структура их доступна, данные группируются компактно.

Семантическая модель представляет собой ориентированный граф, в котором вершины соответствуют определенным объектам или понятиям, а дуги отражают отношения между вершинами. Семантическая модель допускает циклы, разнотипность отношений между вершинами, разнообразие видов информации о математических объектах в вершинах: это могут быть блок-схема изучения темы или доказательства теоремы, структурная модель полноты изучения понятия, спирали фундирования и мотивации базового школьного знания и т.д. Требования к построению семантических сетей коррелируют с основными закономерностями восприятия знаково-символических систем.

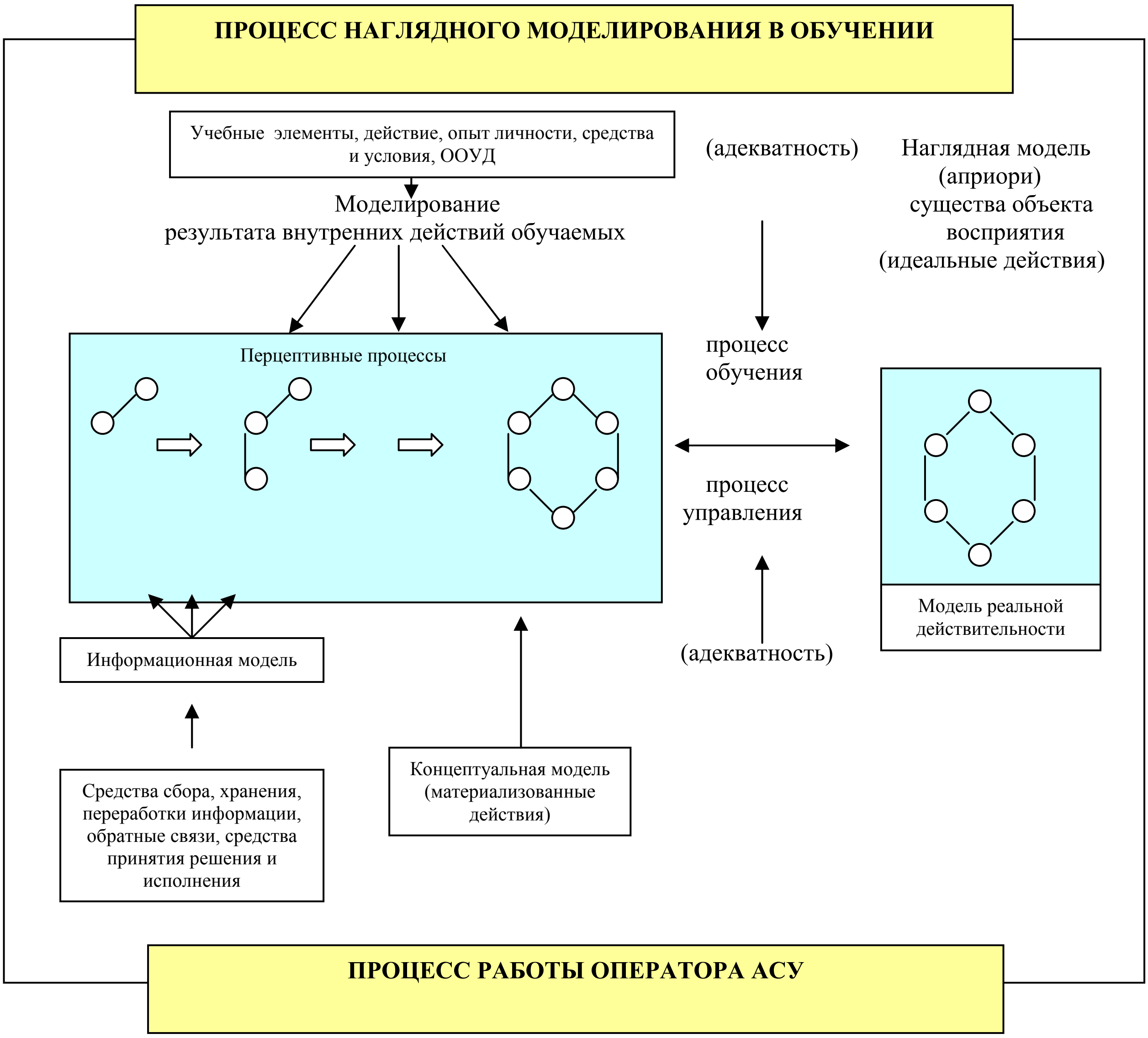


Схема 2. Аналогия процессов наглядного моделирования в обучении и работе оператора АСУ

Продукционная модель фиксирует процедуру математических действий при решении определенных задач. Например, схема исследования функции f действительного переменного выглядит следующим образом:

1. Найти область определения D(f) и область значений R(f) функции, точки пересечения с координатными осями, особые точки и пределы функции f на бесконечности и в особых точках.

2. Найти асимптоты f и построить эскиз графика.

3. Найти первую производную функции f', стационарные и критические точки. Найти промежутки монотонности f, экстремальные точки и значения f в них.

4. Найти вторую производную функции f", точки перегиба функции f. Найти промежутки выпуклости функции вверх и вниз.

5. Построить график функции.

Таким образом, данная процедура состоит из 5 правил (продукций).

По мере того, как математические и дидактические объекты усложняются, представления знаний в виде сетей уступают место *фреймовым моделям*. Основатель теории фреймов М. Минский дает следующее определение: "Фрейм (рамка) – это единица представления знаний, запомненная в прошлом, детали которой при необходимости могут быть изменены согласно текущей ситуации". В тех случаях, когда многое можно сказать о содержимом вершины сети, целесообразен переход к фреймовому представлению, содержащему ячейки (слоты) и имена ячеек. Фрейм может иметь многоуровневую структуру. Наличие имен фреймов и имен слотов обеспечивает возможность внутренней интерпретируемости знаний, хранимых во фреймах, а также активизации фрейма за счет процедурных слотов. Таким образом, фреймовые модели удовлетворяют всем четырем основным требованиям к знаниям (внутренняя интерпретируемость, структурированность, связность и активность).

Задача коммивояжера

Исходная постановка задачи

Торговцу (коммивояжеру) необходимо обойти ориентированное число пунктов, вернувшись в исходный, не побывав нигде дважды. Известны расстояния (стоимость) между пунктами. Определить маршрут, обладающий минимальным расстоянием (стоимостью). Оценочная функция – это суммарная длина полного пути, начинающегося и оканчивающегося в некотором пункте.

Концептуальное моделирование

Рассмотрим связный ориентированный график: $G=(V,E,h)$, в котором $V=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ - конечное множество вершин, $E=\{e_1,e_2,...,e_n\}$ -конечное множество дуг, $h*E\to Z_+$ -весовая функция дуг. Если дуга $e_k\in E$ соответствует упорядоченной паре вершин $\left(v_i;v_j\right)$, то обозначим $C_{ij}=h(e_k)$.

Требуется определить такое подмножество дуг $E_k\in E$ в графе G, которое образует в этой графе замкнутый путь, проходит через каждую вершину ровно один раз и обладает минимальной длиной.

Обозначим:

$$x_{ij}=\begin{cases}1\text{-если дуга}\left(v_i;v_j\right)\text{ входит в исходный маршрут}\\ 0-\text{если дуга }\left(v_i;v_j\right)\text{не входит в оптимальный маршрут}\end{cases}$$

Математическое моделирование

Математическая модель задачи:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\to\min \text{ , при ограничениях:}$$

$$\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}x_{ij}=1\ (\forall i\in\{1,2,...,n\}) & (1)\\ \sum\limits_{i=1}^{n}x_{ij}=1\ (\forall j\in\{1,2,...,n\}) & (2)\\ u_i-u_j+nx_{ij}\le n-1\ (\forall i,j\in\{2,3,...,n\},i\pm j) & (3)\\ x_{ij}\in\{0;1\}\ (\forall i,j\in\{2,3,...,n\}) & (4)\\ u_i\in R,(\forall i\in\{2,3,...,n\}) & (5)\end{cases}$$

Ограничения (1) и (2) обеспечивают выполнение следующих условий: каждая из вершин исходного графа должна иметь одну входящую и ровно одну исходящую дугу, а также количество дуг в оптимальном пути должно быть в точности равно n.

Ограниченная (3) задает условие:

Искомый путь не должен распадаться на отдельные циклы с количеством дуг, меньших n.

Общее количество ограничений равно $2n+(n+1)(n-2)=n^2-n+2$.

Как задача комбинаторной оптимизации, задача коммивояжера может быть сформулирована следующим образом:

$f(a_{i1},a_{i2},...,a_{in},a_{i1})\to\min\Delta\beta\to x$, где множество допустимых x альтернатив $\Delta\beta$ содержит все возможные численные перестановки вида $\left(i_1,i_2,...,i_n,i_1\right)$ элементов множества $\{1,2,..,n\}$.

При этом будем считать, что путь начинается и заканчивается в вершине с номером 1.

Для решения задачи коммивояжера в комбинаторной постановке запишем основное уравнение Р.Беллмана:

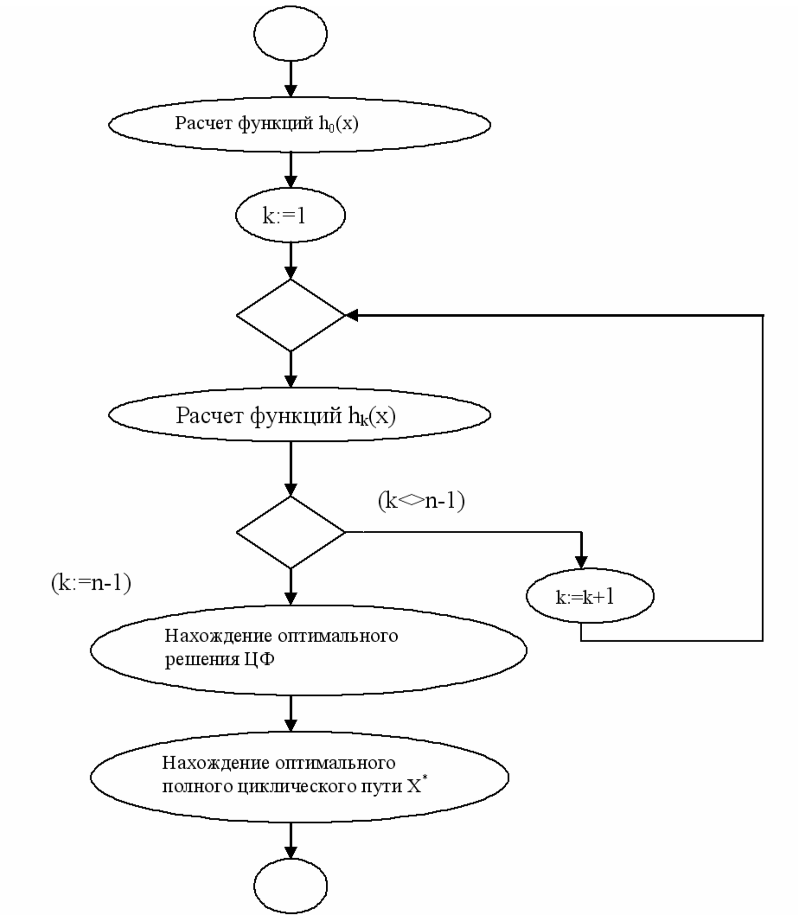
$$h_k(1;i_1,i_2,...i_k;i_{k+1})=\min_{a_k\in\{2,3,..,n\}|\{i_1,i_2,...,i_k\}}\left\{(h_{k-1}(1;i_1,i_2,...,i_k;a_k(+(c_{a_k}i_{k+1})\right\},\ (6)$$

где перестановки $(1;i_1,i_2,...i_k;i_{k+1})$ берутся из множества $\{1,2,..,n\}$ и последний элемент равен некоторому числу $i_{k+1}\in\{2,3,..,n\}\setminus\{i_1,i_2,...,i_k;a_k\}$, что отвечает требованиям однократного посещения коммивояжером каждого из пунктов. Для $k=n-1$ $i_n=1$ $(k=0,1,...,n-1)$ значения C_{ij} соответствуют весам дуг смежного исходного графа.

Оптимальное решение для циклического пути определяется формулой:

$$X^* = \underset{i\in\{2,3,..,n\}\setminus\{i_1,i_2,...,i_{n-1}\}}{\arg\min} (h_{n-1}(1;i_1,i_2,...,i_{n-1}:i)+C_{i1} \qquad (7)$$

Блок-схема алгоритма



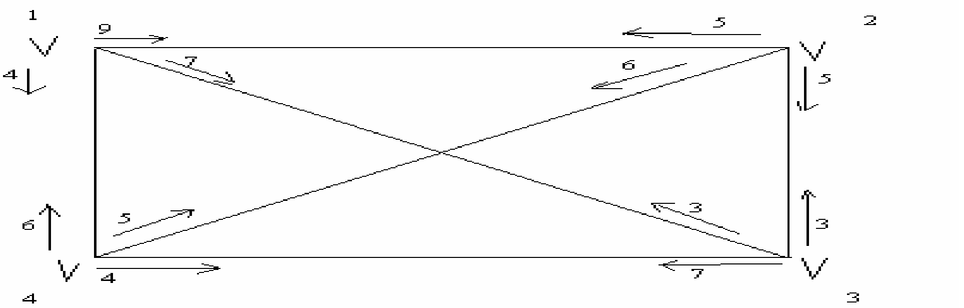
При реализации алгоритма необходимо выполнение следующих условий:

1. Предварительное определение значение функции h_0. Первоначально задаются значения функций $h_0(1;i)=C_{1i}$ $(i=2.3.....n)$.После чего переходят к шагу 2.

2. Прямая последовательность пересчета. С использованием рекуррентных соотношений последовательно рассчитываются значения функций h_k для значений K от 1 до n-1, где n-количество вершин одного графа. Одновременно с этим находятся условно оптимальные значения перестановок $(1;i_1,i_2,...i_k;i_{k+1})$ для всех значений I от 2 до n. Далее следует переход к шагу 3.

3. Для нахождения оптимального значения целевой функции среди найденных на предыдущем шаге значений функции h_{n-1} с использованием выражения (7) определяют минимальное значение.

Пример. Исходный граф задачи коммивояжера имеет вид.



Требуется найти полный замкнутый путь, начинающийся в вершине с номером 1 и заканчивающийся в вершине с номером 6, чтобы общая длина пути была минимальной.

Переменными математической модели являются : $x_{ij} (i, j = 1.2.3.4)$, каждая из которых принимает значение 0 или 1, а также 3 вспомогательных переменных $u_i \in R(i = 2.3.4)$.

Значение весов C_{1i} положим равным 100.

Математическая модель задачи имеет вид:

$$100x_{11} + 9x_{12} + 7x_{13} + 3x_{14} + 100x_{22} + 5x_{21} + 5x_{23}$$
$$+6x_{24} + 100x_{33} + 2x_{31} + 3x_{32} + 7x_{34} + 100x_{44} + 6x_{41} + 5x_{42} + 4x_{43} \to \min$$

Множество допустимых альтернатив формируется следующей системой ограничений:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 1 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 1 \\ u_2 - u_3 + 4x_{23} \le 3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ u_4 - u_3 + 4x_{43} \le 3 \\ x_{ij} \in \{0;1\} (i, j = 1.2.3.4) \\ u_i \in R(i = 2.3.4) \end{cases}$$

Информационное моделирование

Реализуем решение задачи методом динамического программирования.

Шаг 1. $h_0(1;2) = 9$, $h_0(1;3) = 7$, $h_0(1;4) = 4$

Шаг 2. (первая итерация), к=1. Последовательно рассчитываем значения функций h_1 для значений к=1, используя рекуррентные соотношения (6).

h_1(1;3;2)=10 h_1(1;4;2)=9

h_1(1;2;3)=14 h_1(1;4;3)=8

h_1(1;2;4)=15 h_1(1;3;4)=14

Шаг 2.(вторая итерация), к=2

$$h_2\left(1; i_1, i_2; 2\right) = \min\left\{h_1(1;3;4) + C_{42}\right\};$$

$$h_1(1;4;3) + C_{32}\Big\} = \min\{14+5; 8+3\} = h_2(1;4;3;2) = 11$$

Аналогично

$h_2\left(1;i_1,i_2;3\right)=h_2\left(1;4,2;3\right)=13$

$h_2\left(1;i_1,i_2;4\right)=h_2\left(1;3,2;4\right)=16$

Шаг 3. (третья итерация), к = 3

$h_3\left(1;4,3,2;1\right)=16$

$h_3\left(1;4,2,3;1\right)=17$

$h_3\left(1;3,2,4;1\right)=22$

Шаг 3. (третья итерация)

Оптимальному значению соответствует маршрут 1, 4, 3, 2, 1

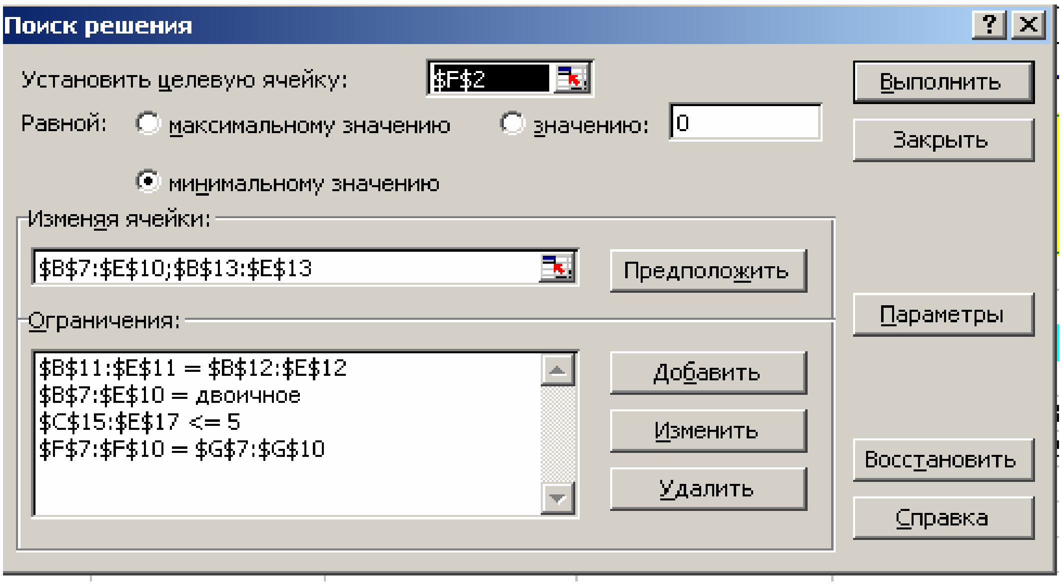
$X^*=(1,4,3,2,1)$

Минимальное расстояние равно 16.

Приведем решение задачи с помощью программы MS EXCEL.

Внешний вид рабочего листа задачи коммивояжера

	A	B	C	D	E	F	G
1			Коэффициенты ЦФ			Значения Цф	
2		100	9	7	4	=СУММПРОИЗВ(B2:E5;B7:E10)	
3		5	100	5	6		
4		3	3	100	7		
5		6	5	4	100		
6	Переменные	Xi1	Xi2	Xi3	Xi4	Ограничения 2	
7	X1j	0	0	0	0	=СУММ(B7:E7)	1
8	X2j	0	0	0	0	=СУММ(B8:E8)	1
9	X3j	0	0	0	0	=СУММ(B9:E9)	1
10	X4j	0	0	0	0	=СУММ(B10:E10)	1
11	Ограничения 1	=СУММ(B7:B10)	=СУММ(C7:C10)	=СУММ(D7:D10)	=СУММ(E7:E10)		
12		1	1	1	1		
13	Uij	0	0	0	0		
14			Ограничения 3				
15	U2-Uj+4X2j		0	=$C$13-D13+4*D8	=$C$13-E13+4*E8		
16	U3-Uj+4X3j		=$D$13-C13+4*C9	0	=$D$13-E13+4*E9		
17	U4-Uj+4X4j		=$E$13-C13+4*C1	=$E$13-D13+4*D10	0		
18							



Результат количественного решения:

	A	B	C	D	E	F	G
1		Коэффициенты ЦФ				Значения Цф	
2		100	9	7	4	16	
3		5	100	5	6		
4		3	3	100	7		
5		6	5	4	100		
6	Переменные	Xi1	Xi2	Xi3	Xi4	Ограничения 2	
7	X1j	0	0	0	1	1	1
8	X2j	1	0	0	0	1	1
9	X3j	0	1	0	0	1	1
10	X4j	0	0	1	0	1	1
11	Ограничения 1	1	1	1	1		
12		1	1	1	1		
13	Uij	0	0	0	0		
14		Ограничения 3					
15	U2-Uj+4X2j		0	0	0		
16	U3-Uj+4X3j		4	0	0		
17	U4-Uj+4X4j		0	4	0		

$X14 = 1$, $X43 = 1$, $X32 = 1$, $X21 = 1$.

При большом количестве пунктов удобнее применять алгоритм приближенного решения задачи коммивояжера.

Библиографический список

1. Смирнов, Е.И. Технология наглядно-модельного обучения математике [Текст]: монография. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 1998. – 313 с.
2. Салмина, Н.С. Виды и функции материализации в обучении [Текст]. – М.: Изд-во МГУ, 1981. – 134 с.
3. Фридман, Л.М. Наглядность и моделирование в обучении [Текст]. – М.: Знание, 1984. – 79 с.
4. Арнольд, В.И. «Жесткие» и «мягкие» математические модели [Текст]. – М.: МЦНМО, 2000. – 32 с.
5. Зинченко, В.П. Образ и деятельность [Текст]. – М.: Изд-во «Институт педагогической психологии», Воронеж: НПО «МОДЭК», 1997. – 608 с.
6. Леонтьев, А.Н. Деятельность, сознание, личность [Текст]. – М.: Политиздат, 1975. – 304 с.