А.В. ЯСТРЕБОВ, Н.А. МЕНЬШИКОВА, Н.М. ЕПИФАНОВА

Выявление дуалистических свойств науки в процессе преподавания элементарной математики

Резюме. В статье показано, что целый спектр дуалистических свойств науки может быть выявлен в процессе изучения элементарной математики. Тем самым продолжается идейная линия на педагогическое использование дуалистических свойств науки, начатая в работах [1-3] применительно к математике, психологии и физике.

§ 1. Проявления дуалистических свойств математики в процессе изучения стереометрии

Начнем с рассмотрения трех простых, но необычных задач.

Задача 1. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 4, а угол между смежными боковыми гранями равен 90°. Найти объем пирамиды.

План решения вытекает из соответствующего условию задачи рис. 1, на котором $\angle BMD = 90^{\circ}$ представляет собой линейный угол двугранного угла между плоскостями *BSC* и *DSC*. Действительно, из ΔBMD

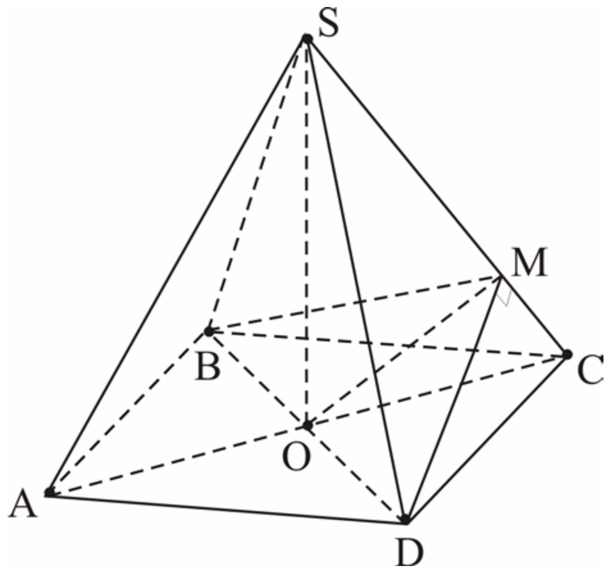

Рис.1.

можно было бы найти его высоту *OM*. Поскольку $OM \perp SC$ в силу признака перпендикулярности прямой и плоскости, из ΔOMC можно было бы найти отрезок *MC*, а затем из прямоугольного ΔSOC можно было бы найти отрезок *SM* и высоту пирамиды *SO*. Однако реализация этого плана сталкивается с непреодолимыми затруднениями. Действительно, из ΔBMD получаем, что $OM = 0{,}5BD = 2\sqrt{2} = OC$. Следовательно, из точки *O* к прямой *BC* проведены перпендикуляр и наклонная *равной длины*. Данное противоречие показывает, что задача не имеет решения. Другими словами, не существует правильной четырехугольной пирамиды с прямым углом между боковыми гранями.

Будучи математически несложной, возникшая ситуация психологически некомфортна для многих учащихся, поскольку оказывается, что обычная, естественная задача содержит внутреннее противоречие, которое может быть обнаружено только в результате специальных усилий. Приведем еще две задачи такого же типа.

Задача 2. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 6, а угол между смежными боковыми гранями равен 60°. Найти объем пирамиды.

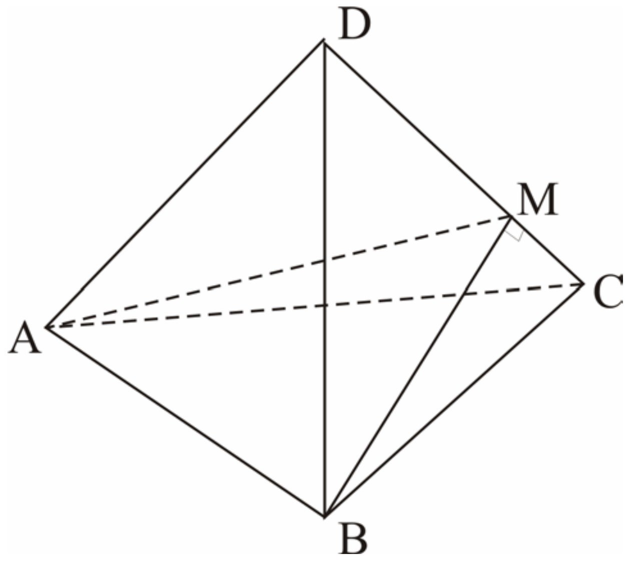

Рис. 2.

Идея решения та же, что и в задаче 1. Если на рис. 2 $\angle AMB$ является линейным углом двугранного угла с ребром DC, то можно доказать, что из точки B к прямой DC проведены перпендикуляр BM и наклонная BC равной длины. Таким образом, задача не имеет решения. Другими словами, не существует правильной треугольной пирамиды с углом *60°* между боковыми гранями.

Задача 3. В правильной шестиугольной пирамиде SABCDEF линейный угол двугранного угла между смежными боковыми гранями равен 120°. Ребро основания равно a. Найти объем пирамиды.

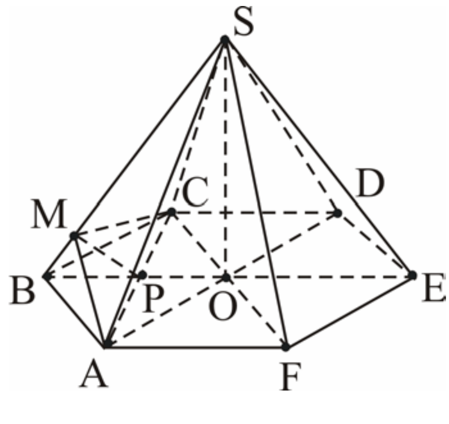

Рис. 3.

Вновь используем ту же идею (рис. 3): сравнивая треугольники ABC и AMC, нетрудно доказать, что перпендикуляр AM к ребру SB и наклонная AB к нему же равны между собой. Вновь получаем, что задача не имеет решения.

Опишем одну из возможных организационных форм работы с приведенными задачами, подчеркивая при этом некоторые идейные следствия по выявлению природы математики.

Пусть в классе с углубленным изучением математики проводится урок решения задач по теме «Объем пирамиды» продолжительностью 90 минут. Сначала учащиеся делятся на три микрогруппы, каждая из которых решает одну из вышеприведенных задач, а затем представители микрогрупп сообщают остальным учащимся о полученном решении.

На этом, первом, этапе урока достигаются два принципиальных результата. Во-первых, *класс в целом* делает ***качественный вывод:*** параметры реальных физических объектов не могут быть произвольными, а подчиняются определенным закономерностям. Во-вторых, учащиеся *самостоятельно формулируют* следующую ***задачу:*** при каких ограничениях на величину двугранного угла между боковыми гранями существуют пирамиды, описанные в задачах 1-3? Постановка новой задачи заставляет возобновить работу микрогрупп и провести дополнительное исследование первоначальных задач.

Исследование задачи 1. Пусть на рис. 1 $\angle BMD = \alpha$. План решения может быть реализован, если $OM<OC$, откуда вытекает цепь эквиваленций:

$$OM < OC \Leftrightarrow OB\,\mathrm{ctg}(\alpha/2) = OC \Leftrightarrow \mathrm{ctg}(\alpha/2)$$

$$< 1 \Leftrightarrow 45^\circ < (\alpha/2) < 90^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 90^\circ < \alpha < 180^\circ.$$

Исследование задачи 2. Пусть на рис. 4 $AB = a, \angle AMB = \alpha,$

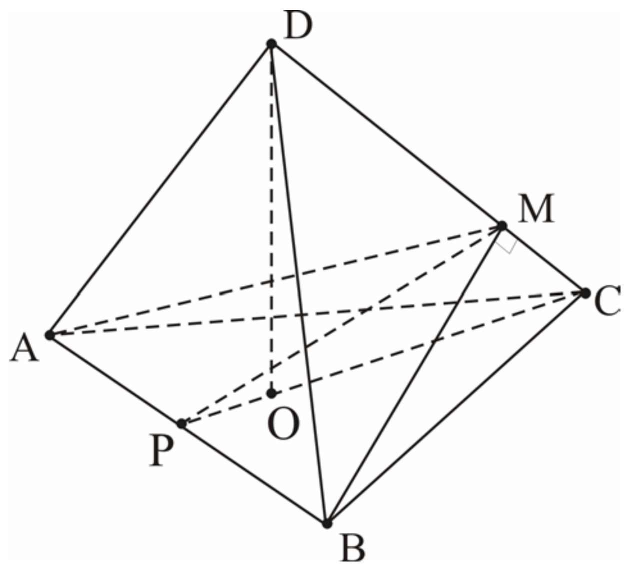

Рис. 4.

$AP = PB, \angle AMP = \alpha/2$. Для устранения ранее полученного противоречия необходимо и достаточно, чтобы $PM<PC$, откуда вытекает цепь эквиваленций:

$$PM < PC \Leftrightarrow \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} < \frac{a\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$$

$$< \sqrt{3} \Leftrightarrow 30^\circ < \frac{\alpha}{2} < 90^\circ \Leftrightarrow 60^\circ < \alpha < 180^\circ.$$

Исследование задачи 3. ΔABC на рис.3 является равнобедренным с углом 120° при вершине и боковой стороной a. В силу этого $AP = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Пусть двугранный угол с ребром BS равен α. Из ΔAMP получаем, что

$AM = \dfrac{AP}{\sin(\alpha/2)} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2\sin(\alpha/2)}$. Поскольку перпендикуляр AM к прямой BS должен быть короче наклонной AB, мы получаем цепь эквиваленций

$$AM < AB \Leftrightarrow \frac{a\sqrt{3}}{2\sin(\alpha/2)} < a \Leftrightarrow \sin\frac{\alpha}{2} > \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 60^\circ < \frac{\alpha}{2} < 90^\circ \Leftrightarrow 120^\circ < \alpha < 180^\circ.$$

Естественно, что представители микрогрупп снова сообщают классу о проведенном исследовании задачи. На этом, втором, этапе урока достигаются два результата. Во-первых, снимаются препятствия для вычисления объема пирамиды, поскольку достаточно взять любое значение угла в нужном диапазоне. Во-вторых, учащиеся могут *самостоятельно сформулировать* несколько ***задач:*** 1) как связано ограничение снизу на двугранный угол и величина угла при основании пирамиды? 2) как меняется высота пирамиды при стремлении допустимого значения двугранного угла к своим крайним пределам? 3) в чем геометрический смысл ограничения сверху на величину двугранного угла? 4) как движется точка M по боковому ребру при стремлении допустимого значения двугранного угла к своим крайним пределам? Почти очевидно, что эти задачи можно решить как по вычислительным формулам, так и на основе геометрической интуиции; последнее представляется нам особенно ценным.

Отметим, что в зависимости от педагогической ситуации учитель может варьировать многие организационные моменты. Например, исследование исходной задачи можно поручить той же микрогруппе, которая обнаружила противоречие в ней, а можно предложить сделать это другой микрогруппе. Учитель может сам поставить вопрос о допустимых значениях двугранных углов и другие дополнительные вопросы; может оказать дозированную помощь учащимся, пытающимся сформулировать их самостоятельно; может добиваться полностью самостоятельной формулировки их учащимися. Задачи, сформулированные в предыдущем абзаце, могут быть предложены в качестве домашнего задания или заменены на другие.

Обсудим все вышесказанное в терминах дуалистических свойств математики. Очевидно, что качественный вывод, сделанный на первом этапе урока, был получен в процессе сопоставления трех конкретных задач, т.е. в результате *индуктивного* умозаключения. В то же время решение каждой конкретной задачи является цепью *дедуктивных* умозаключений. Таким образом, в получении качественного вывода индуктивное и дедуктивное умозаключения играют каждое свою необходимую роль, причем оба типа умозаключений являются неизбежными. Тем самым показано, что в процессе преподавания школьного курса геометрии может быть выявлен ***индуктивно-дедуктивный дуализм*** математики в целом.

Общие выводы по первой части урока и по уроку в целом, которые в конце концов стали интеллектуальным достоянием *всего* класса, были получены в результате работы *отдельных его частей* (микрогрупп или отдельных учеников) и последующего *информационного обмена*. Тем самым иллюстрируется ***личностно-социальный дуализм*** математики, понимаемый в том смысле, что для математики необходимы как личностное, так и социальное начало, причем только их взаимодействия достаточно для существования математики как науки.

В процессе работы с задачным материалом класс дважды столкнулся с тем, что результаты решения задачи приводят к естественной постановке следующей задачи, которая с необходимостью вытекает из предыдущей. Самостоятельная постановка задач – необходимая часть работы математика-исследователя, быть может, самая трудная и полезная часть. В силу этого описанная методика проведения урока иллюстрирует ***деятельностно-продуктивный дуализм*** математики, поскольку для школьников становится очевидным, что математика является одновременно как суммой знаний, так и деятельностью по получению новых знаний.

Итак, мы видим, что весьма простой материал, полностью укладывающийся в стандарты школьного образования, позволяет выявить дуалистические свойства науки, описанные в статьях [1-3]. Для авторов важно, что целенаправленное выявление этих свойств является инструментом для отбора содержания урока и поиска организационных форм урока.

§ 2. Повседневные наблюдения и деятельностно-продуктивный дуализм математики

В предыдущем параграфе была описана работа учителя, проходившая в специальных условиях: старшее звено школы, профильный класс, сдвоенный урок. Было бы интересно понять, в какой мере дуалистические свойства математики могут быть выявлены в процессе изучения более простых тем, например, в среднем звене школы. Не решая этого вопроса в полной мере, покажем, что математический материал дает достаточно богатые возможности для этого. Для иллюстрации рассмотрим тему «Решение квадратных уравнений» из программы 8 класса.

Одна из домашних работ состоит в том, чтобы решить четыре квадратных уравнения, которые мы выпишем вместе с их решениями:

$$1)\ 2x^2+5x+2=0,$$

$$(x_1,x_2)=(-2,-\frac{1}{2}).$$

$$2)\ 3x^2-10x+3=0,$$

$$(x_1,x_2)=(3,\frac{1}{3}).$$

$$3)\ 4x^2+17x+4=0,$$

$$(x_1,x_2)=(-4,-\frac{1}{4}).$$

$$4)\,5x^2-26x+5=0,\ (x_1,x_2)=(5,\frac{1}{5}).$$

Если в процессе проверки домашнего задания данная или подобная запись появляется на доске, то учащиеся, как правило, обращают внимание на три обстоятельства: а) на особенности корней данных уравнений; б) на связь корней с коэффициентами уравнений; в) на взаимосвязь между коэффициентами уравнения. В этих условиях учитель ставит естественную задачу по обобщению сделанных наблюдений и выражению этого обобщения в словесной форме. Одна из возможных словесных формулировок такова: *«Если квадратное уравнение имеет вид* $ax^2\pm(a^2+1)x+a=0$*, то его корни находятся по формулам* $x_1=\mp a$*,* $x_2=\mp\frac{1}{a}$*»*. Затем учащимся предлагается два задания: а) по общему правилу составить новые уравнения данного вида и проверить правильность сделанного предположения, решив их; б) провести строгое доказательство сформулированного утверждения.

Покажем, что проверка высказанной гипотезы может оказаться не очень легкой для учащегося, поскольку простая техника решения квадратного уравнения имеет, в данном случае, некоторые особенности. Рассмотрим уравнение

$$ax^2\pm(a^2+1)x+a=0. \qquad (1)$$

Пользуясь формулой для нахождения корней квадратного уравнения и правилом извлечения квадратного корня из квадрата некоторого выражения, мы получим, что

$$(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{-a^2-1+|a^2-1|}{2a} \\ x_2=\dfrac{-a^2-1-|a^2-1|}{2a} \end{array}\right. \qquad (2)$$

Если $a^2-1\geq 0$, то по правилу раскрытия модуля получаем, что

$$\left[\begin{array}{l} x_1=-\dfrac{1}{a} \\ x_2=-a \end{array}\right.. \qquad (3)$$

Если же $a^2 - 1 < 0$, то

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = -a \\ x_2 = -\dfrac{1}{a} \end{array}\right. . \qquad (4)$$

Каждое решение совокупности (3) является решением совокупности (4) и обратно, что и доказывает наше утверждение.

Мы видим, что нам пришлось сделать три математические и одну логическую операцию, так что доказательство требуемого утверждения действительно нетривиально и заслуживает внимания даже в том случае, если формулировка гипотезы не вызвала затруднения у школьников.

Итак, при изучении рядовой, «рутинной» темы из программы 8 класса учащиеся выполняют умственные действия, типичные для работы профессионального математика: наблюдение, формулировка гипотезы, проверка гипотезы. Тем самым они усваивают не только продукт, т.е. утверждение, выделенное курсивом, но и элементы деятельности по его получению. Заметим, что утверждение само по себе не так уж интересно, зато процесс его получения отражает самую суть математики.

В заключение параграфа заметим, что даже устный счет дает пищу для серьезных математических обобщений. В качестве примера приведем картину Н.П. Богданова-Бельского «Устный счет в сельской школе», на которой изображены ученики дореволюционной русской школы, которые устно (!) вычисляют выражение

$$\frac{10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2}{365}.$$

В процессе вычислений ученики с неизбежностью приходят к промежуточному результату:

$$10^2+11^2+12^2=365=13^2+14^2.$$

Получается, что *сумма квадратов* ***трех*** *последовательных натуральных чисел* (10, 11 и 12) *равна сумме квадратов* ***двух*** *последующих натуральных чисел* (13 и 14). В сложившейся ситуации естественным образом возникают по крайней мере две задачи:

1) Существуют ли другие значения n, такие, что сумма квадратов n последовательных натуральных чисел равна сумме квадратов $n-1$ последующих натуральных чисел?

2) Имеет ли решение задача, аналогичная предшествующей, для первых, третьих, четвертых и других степеней?

Устный пример и последующие задачи заимствованы из книги [4], написанной С.А.Рачинским (1832-1902), народным учителем сельской школы, членом-корреспондентом Российской Академии наук. Как видим, существует достаточно старая традиция, состоящая в обобщении задач, решаемых повседневно.

§ 3. Однородность уравнений и графики функций

Продолжим нашу основную линию – поиск учащимися неявных, а то и глубоко скрытых закономерностей. Решим предварительное

Задание. В чем сходство и различие следующих равенств?

$2x^2 - 3xy + y^2 = 0$, (1)

$4x^2 - 4xy + y^2 = 0$, (2)

$x^2 + xy + y^2 = 0$, (3)

$2\sin^2 x - 3\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$, (4)

$4\sin^2 x - 4\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$, (5)

$\sin^2 x + \sin x\cos x + \cos^2 x = 0$, (6)

$2x^2 - 3x\sin x + \sin^2 x = 0$, (7)

$4x^2 - 4x\sin x + \sin^2 x = 0$, (8)

$x^2 + x\sin x + \sin^2 x = 0$, (9)

$\sin^2 x - (a+1)x\sin x + ax^2 = 0$, (10)

$\sin^2 x - (a+1)(\pi - x)\sin x + a(\pi - x)^2 = 0$, (11)

$\operatorname{tg}^2 x - (a+1)x\operatorname{tg} x + ax^2 = 0$, (12)

$\operatorname{tg}^2 x - (a+1)(x-\pi)\operatorname{tg} x + a(x-\pi)^2 = 0$, (13)

$\sin^2 x - 3ax\sin x + 2a^2x^2 = 0$. (14)

Нетрудно заметить, что равенства (1)-(3) характерны тем, что в их левых частях стоят однородные многочлены второй степени с переменными x и y. Левые части равенств (4)-(6) также представляют собой однородные многочлены второй степени относительно $\sin x$ и $\cos x$, поскольку получаются из равенств (1)-(3) заменой переменной x на $\sin x$ и y на $\cos x$. Если рассматривать их как уравнения относительно x, то это однородные тригонометрические уравнения, изучаемые в школе. Левые части равенств (7)-(9) также представляют собой однородные многочлены относительно x и $\sin x$, поскольку получаются из равенств (1)-(3) заменой переменной y на $\sin x$. Несмотря на их внешнее сходство с уравнениями (4)-(6), они не изучаются в школе и представляют собой нечто новое и необычное для учащихся. Левые части равенств (10)-(14) также представляют собой однородные многочлены относительно линейной функции и тригонометрической функции, коэффициенты которых зависят от параметра a.

Итак, мы видим, что понятие однородности многочлена от двух переменных предстает перед учащимися в различных формах. Это разнообразие форм позволяет сформулировать разнотипные задания. Приведем несколько таких заданий, адресуя их различным микрогруппам учащихся и предполагая при этом, что результаты решений будут в той или иной форме доложены на уроке и, следовательно, станут достоянием всего класса.

МКГ-1. Постройте графики уравнений (1)-(3) от переменных x и y. Какой вид они имеют? От чего зависит различие в видах графиков? Какой вид может иметь график уравнения $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$?

Очевидно, что начало координат принадлежит графику. Отыскивая другие точки графика, нужно поделить обе части на x^2, свести исходное уравнение к квадратному путем замены переменных $t = y/x$, решить его и выразить y через x. В зависимости от количества корней квадратного уравнения мы получим либо две прямые, проходящие через начало координат (уравнение (1)), либо одну такую прямую (уравнение (2)), либо только одну точку – начало координат (уравнение (3)). Переход к уравнению общего вида не добавляет новых видов графика.

МКГ-2. Решите тригонометрические уравнения (4)-(6). От чего зависит количество *простейших* тригонометрических уравнений, к которым сводится данное уравнение?

Данное задание является рутинным упражнением на решение однородных тригонометрических уравнений. Количество простейших тригонометрических уравнений совпадает с количеством корней квадратного уравнения, к которому сводится исходное уравнение.

МКГ-3. Решите уравнения (7)-(9). Можно ли сказать, что количество решений каждого из уравнений порождено одной и той же причиной?

Данное задание существенно сложнее, чем два предыдущих. Во-первых, мы не можем даже указать тип уравнения, если откажемся от малопонятного словосочетания «уравнение смешанного типа». Во-вторых, дополнительный вопрос задания достаточно расплывчат и предполагает, что в каждом случае будут не просто найдены все решения, но и выявлена причина, обуславливающая их количество.

Очевидно, что каждое уравнение имеет тривиальное решение $x = 0$. Для поиска других решений можно начать действовать так же, как при построении графиков уравнений: поделить обе части на x^2, ввести новую переменную $t = \dfrac{\sin x}{x}$ и решить полученное квадратное уравнение. Дальнейшее зависит от решаемого уравнения.

Для уравнения (7) мы получим, что

$$(7) \Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = x \\ \sin x = 2x \end{array}\right.$$

Решение каждого уравнения из полученной совокупности может быть найдено *графически*, причем в данном случае ответ прост: $x = 0$, т.е. найденное решение совпадает с тривиальным.

Для уравнения (8) рассуждения сходны, но все же отличаются от предыдущих: $(8) \Leftrightarrow t^2 - 4t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Leftrightarrow \sin x = 2x$. Мы вновь видим отсутствие нетривиальных решений, однако причина этого несколько иная: единственность решения уравнения (7) обусловлена тем, что в начале координат пересекаются графики *трех* функций – $y = \sin x, y = x$ и $y = 2x$, а единственность решения уравнения (8) обусловлена тем, что в начале координат пересекаются графики *только двух* функций – $y = \sin x$ и $y = 2x$.

Уравнение (9) сводится к квадратному уравнению $t^2 + t + 1 = 0$, которое не имеет решений, так что в данном случае найдена еще одна причина отсутствия нетривиальных решений.

МКГ-4. Выясните, при каких положительных значениях параметра a уравнения (10) и (11) имеют более одного решения.

Уравнение (10) решается тем же методом, что и уравнение (7). Вводя новую переменную $t = \dfrac{\sin x}{x}$, мы получаем цепочку эквиваленций:

$$(10) \Leftrightarrow t^2 - (a+1)t + a = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = a \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = x \\ \sin x = ax \end{array}\right.$$

Графическое решение первого уравнения дает нам единственное решение $x = 0$. Решая графически второе уравнение, мы видим, что все зависит от углового коэффициента a графика линейной функции. При $a = 0$ уравнение имеет бесконечное множество решений $x = \pi n$, где n – целое число. При $0 < a < 1$ количество решений конечно и не меньше трех, причем решения представляют собой абсциссы точек пересечения прямой и синусоиды. При остальных положительных значениях a мы вновь получаем единственное решение $x = 0$.

Отметим, что анализ отрицательных значений параметра приводит к некоторым трудностям, разрешение которых лежит вне целей нашей статьи.

Изучение уравнения (11) происходит по той же схеме, что и изучение уравнения (10), с той разницей, что график синуса пересекается с графиками линейных функций не в начале координат, а в точке $x = \pi$.

МКГ-5. Выясните, при каких значениях параметра a уравнение (12) имеет более одного решения на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$? Сколько их на этом интервале при других значениях параметра?

Это уравнение решается по той же схеме, что и уравнения (10) и (11), с той разницей, что приходится строить график тангенса вместо графика синуса.

МКГ-6. Выясните, при каких значениях параметра a уравнение (14) имеет более одного решения? При каких значениях параметра a оно имеет 5 решений на интервале $(-\pi, \pi)$?

Микрогруппы 1-6 подробно изучали уравнения одного типа. Можно организовать комплексное изучение различных проявлений однородности уравнений, если предложить задания следующих типов.

МКГ-7. 1. Постройте график уравнения (1). **2.** Решите тригонометрическое уравнение (5). **3**. Решите уравнение (9). **4.** При каких значениях параметра a уравнение (10) имеет более одно решения? **5.** При каких значениях параметра a уравнение (12) имеет более одного решения на интервале $(-\pi/2,\ \pi/2)$? Сколько их на этом интервале?

МКГ-8. 1. Постройте график уравнения (2). **2.** Решите тригонометрическое уравнение (6). **3**. Решите уравнение (7). **4.** При каких значениях параметра a уравнение (11) имеет более одного решения? **5.** При каких значениях параметра a уравнение (13) имеет точно одно решение на интервале $(\pi/2,\ 3\pi/2)$? Сколько их на этом интервале при других значениях параметра?

МКГ-9. **1.** Постройте график уравнения (3). **2.** Решите тригонометрическое уравнение (4). **3**. Решите уравнение (8). **4.** При каких значениях параметра a уравнение (14) имеет более одного решения? **5.** При каких значениях параметра a уравнение (14) имеет более одного решения на интервале $(-\pi, \pi)$? Сколько их на этом интервале?

Библиографический список

1. Ястребов А.В. Дуалистические свойства математики и их отражение в процессе преподавания // Ярославский педагогический вестник. 2001. № 1. С. 48-53.
2. Корнеева Е.Н., Ястребов А.В. Инвариантные свойства психологии и их отражение в процессе ее преподавания // Ярославский психологический вестник. 2004. Вып. 12. С. 124-134.
3. Турунтаев С.В., Ястребов А.В. Проявления дуалистических свойств физики в преподавании конкретных тем // Ярославский педагогический вестник. 2005. № 2. С. 114-120.
4. Рачинский С.А. 1001 задача для умственного счета. СПб., 1899.