В.В. АФАНАСЬЕВ

ПРОДОЛЖЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ПИФАГОРА

Афанасьев Владимир Васильевич, профессор кафедры геометрии, действительный член академии естественных наук, ректор ЯГПУ им. К.Д. Ушинского, главный редактор настоящего журнала

На математической олимпиаде школьников в Дании в 1992 году (см. [1]) была предложена следующая задача: Шесть квадратов расположены так, как показано на рис.1. Найти отношение суммы площадей квадратов A_1, B_1, C_1 к сумме площадей квадратов A, B, C.

Предложенное в [2] решение основано на применении теоремы косинусов. Пусть a,b,c - длины сторон, α, β, γ - соответственно величины противолежащих углов треугольника T, a_1, b_1, c_1 - длины сторон квадратов A_1, B_1, C_1. Тогда сумма площадей квадратов A, B и C равна

$$S = a^2 + b^2 + c^2,$$

а сумма площадей квадратов A_1, B_1 и C_1 равна $S_1 = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2$.

Из треугольника D по теореме косинусов следует, что

$a_1 = b_2 + c_2 - 2\,bc\cos(\pi-\alpha) = b^2 + c^2 + 2\,bc\ \cos\alpha$.

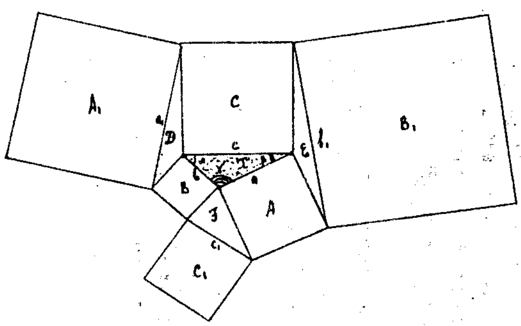

Рис. 1.

Аналогично из треугольников ε и $\mathcal{F}$ получаем: $b_1^2 = a^2 + c^2 + 2\,ac\cos b$, $c_1^2 = a^2 + b^2 + 2\,ab\ \cos\gamma$.

Следовательно,

$S_1 = 2(a^2 + b^2 + c^2) + 2\,bc\cos\alpha + 2\,ac\cos\beta + 2\,ab\cos\gamma$.

По теореме косинусов для треугольника T имеем:

$2\,bc\cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2$, $2\,ac\cos\beta = a^2 + c^2 - b^2$, $2\,ab\cos\gamma = a^2 + b^2 - c^2$.

Таким образом, $S_1 = 3\,(a^2 + b^2 + c^2)$ и искомое отношение $S_1 : S$ равно 3.

Предложенные в задаче построения проделаем для прямоугольного треугольника T. По теореме Пифагора площадь S_C квадрата C, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме площадей S_A и S_B квадратов A и B, построенных на его катетах, т.е. $S_A + S_B = S_C$.

Продолжим здесь поиск площадей S_{A1}, S_{B1}, S_{C1} и их сравнение (рис.2).

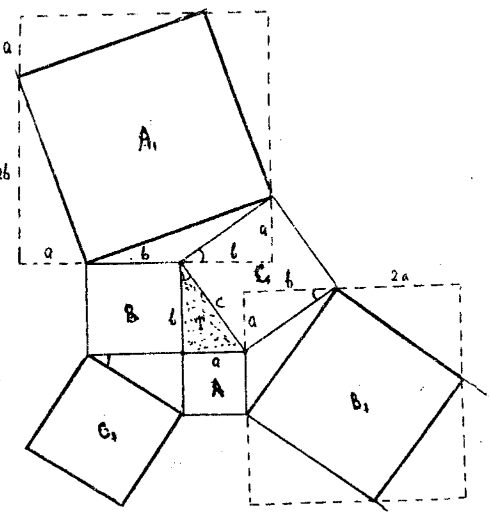

Рис.2

Предложение 1. $S_{A1} + S_{B1} = 5\,S_{C1}$

Доказательство. Подсчитаем двумя способами площади квадратов, содержащих квадраты A_1 и B_1 (идея аналогична одному из доказательств теоремы Пифагора).

Тогда $(2b + a)^2 = 4\,\dfrac{2\,b\,a}{2} + S_{A1}$,

или $4\,b^2 + 4\,ba + a^2 = 4\,ba + S_{A1}$.

Откуда $S_{A1} = a^2 + 4\,b^2$.

Аналогично $(2\,a + b)^2 = 4\,\dfrac{2\,a\,b}{2} + S_{B1}$,

$4a^2 + 4\,ab + b^2 = 4\,ab + S_{B1}$
2

и $S_{B1} = 4\,a^2 + b^2$.

Следовательно, $S_{A1} + S_{B1} = 5\,(a^2 + b^2) = 5\,S_{C1}$.

Назовем полученное соотношение между

площадями S_{A1}, S_{B1}, S_{C1} соотношением продолжения теоремы Пифагора.

Соединим далее отрезками соседние "свободные" вершины квадратов A_1, B_1, C_1 и примем их за стороны трех квадратов A_2, B_2, C_2 (рис.3). Площади этих квадратов удовлетворяют соотношению теоремы Пифагора.

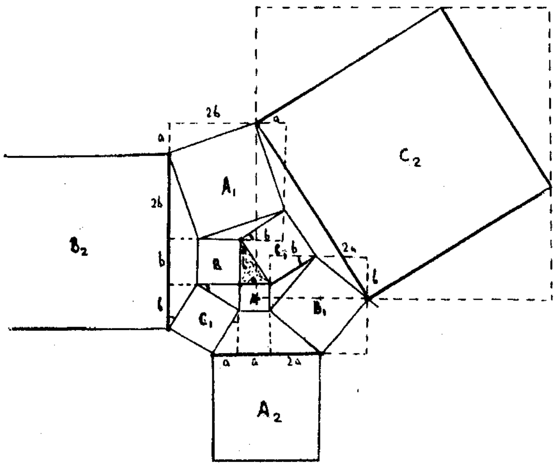

Рис.3.

Предложение 2. $S_{A2} + S_{B2} = S_{C2}$.

Доказательство. Легко видеть, что $S_{A2} = (4a)^2$ и $S_{B2} = (4b)^2$.

Для нахождения S_{C2} найдем площадь квадрата, содержащего четыре равных прямоугольных треугольника и квадрат C_2. Поскольку длина одного катета указанного треугольника равна $a - (b - a) + b + 2a = 4a$,
а другого $(b - a) + b + 2b + a = 4b$, то

$$(4a + 4b)^2 = 4\,\frac{4a\ 4b}{2} + S_{C2}$$

$$(4a)^2 + 32\,ab + (4b)^2 = 32\,ab + S_{C2}.$$

Следовательно, $S_{C2} = (4a)^2 + (4b)^2 = S_{A1} + S_{B2}$.

Продолжим аналогично предыдущим случаям построение новых квадратов A_3, B_3, C_3, как показано на рис.4.

Предложение 3. $S_{A3} + S_{B3} = 5\,S_{C3}$.

Доказательство. Используя длины сторон прямоугольных треугольников, найденных в доказательстве предыдущего предложения, получаем, что

$S_{A3} = (4b + 2b + 4b)^2 + (a + 4a)^2 = 100\,b^2 + 25\,a^2$,
$S_{B3} = (b + 4b)^2 + (4a + 2a + 4a)^2 = 25\,b^2 + 100\,a^2$,
$S_{C3} = (4b + b)^2 + (a + 4a)^2 = 25\,(a^2 + b^2)$.

Откуда $S_{A3} + S_{B3} = 125\,a^2 + 125\,b^2 = 5\,S_{C3}$.

Итак, продолжая построение "пифагоровых штанов" и строя тройки квадратов A_i, B_i, C_i (i = 1, 2, 3), мы доказали, что их площади связаны следующими соотношениями:

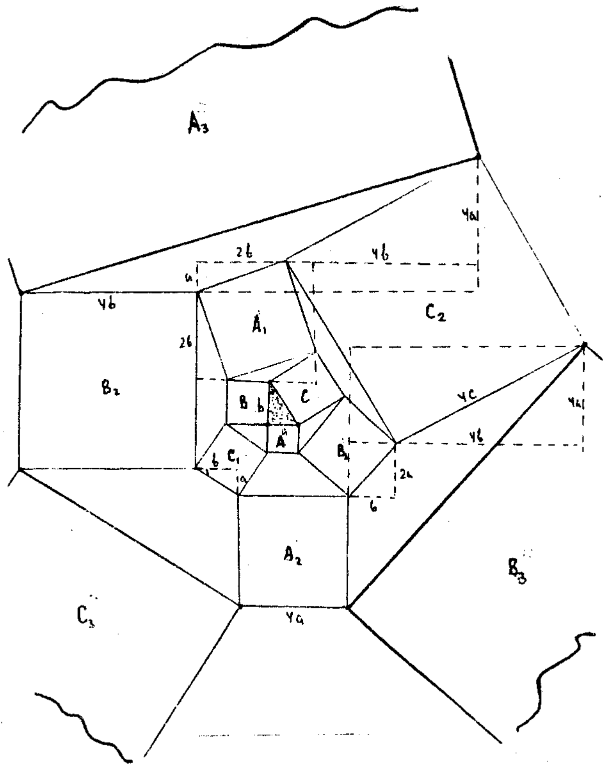

Рис. 4

$S_{A1} + S_{B1} = 5\,S_{C1}$,
$S_{A2} + S_{B2} = S_{C2}$,
$S_{A3} + S_{B3} = 5\,S_{C3}$.

Выглядит правдоподобным (попробуем доказать!), что и дальнейшие аналогичные построения будут приводить к чередованию соотношения теоремы Пифагора и соотношения продолжения теоремы Пифагора для соответствующих площадей квадратов.

Задачи для самостоятельного решения

1. Пусть на сторонах прямоугольного треугольника ABC вне его построены квадраты ABB_1A_2, ACC_2A_1 и CBB_2C_1. Покажите, что

а) площадь квадрата, построенного на A_1B_1, равна сумме площадей квадратов, построенных на BC и A_2C_2;

б) площадь квадрата, построенного на B_1C_2, равна сумме площадей квадратов, построенных на A_1C_1 и A_2C, а также равна сумме площадей квадратов, построенных на A_1C_1 и A_1B_1, и кроме того равна сумме площадей квадратов, построенных на BA_1 и CA_2;

в) площадь квадрата, построенного на A_1B_1, равна сумме площадей квадратов, построенных на A_1A_2 и AC_1;

г) сумма площадей квадратов, построенных на AC и CB_1, равна сумме площадей квадратов, построенных на BC и CA_2.

2. Докажите, что сумма площадей квадра-

тов, построенных на всех сторонах параллелограмма, равна сумме площадей квадратов, построенных на диагоналях.

3. Докажите, что во всяком четырехугольнике сумма площадей квадратов, построенных на диагоналях, равна удвоенной сумме площадей квадратов, построенных на отрезках, соединяющих середины противоположных сторон.

4. Покажите, что сумма площадей квадратов, построенных на всех сторонах четырехугольника, больше суммы площадей квадратов, построенных на диагоналях, на четырежды взятую площадь квадрата, построенного на отрезке, соединяющем середины диагоналей.

5. Пусть точка O является серединой квадрата, построенного на гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC, а O_1 и O_2 - середины квадратов, построенных на катетах. Покажите, что

а) прямая OC перпендикулярна прямой O_1O_2;

б) отрезок OC равен сумме отрезков CO_1 и CO_2.

Литература

1. Математика в школе // 1995. N 1.С.78.
2. Математика в школе // 1995. N 6.С.69.