Вычислим размерность $\mathrm{Ext}^2(\mathcal{E},\mathcal{E})$. Применим к точной тройке $0\to\mathcal{E}\to\mathcal{F}\to\mathcal{O}_m(-1)\oplus k_{x_1}\oplus k_{x_2}\to 0$ функтор $\mathrm{Hom}(*,\mathcal{E})$, получим точную последовательность:

$$\mathrm{Ext}^2(\mathcal{F},\mathcal{E})\to\mathrm{Ext}^2(\mathcal{E},\mathcal{E})\to\mathrm{Ext}^3(\mathcal{O}_\mathrm{m}(-1)\oplus \mathrm{k}_{\mathrm{x}_1}\oplus\mathrm{k}_{\mathrm{x}_2},\mathcal{E})\to\mathrm{Ext}^3(\mathcal{E},\mathcal{F}). \quad (10)$$

Вычислим размерность $\mathrm{Ext}^3(\mathcal{O}_\mathrm{m}(-1)\oplus\mathrm{k}_{\mathrm{x}_1}\oplus\mathrm{k}_{\mathrm{x}_2},\mathcal{E})$. По двойственности Серра $\mathrm{Ext}^3(\mathcal{O}_\mathrm{m}(-1)\oplus\mathrm{k}_{\mathrm{x}_1}\oplus\mathrm{k}_{\mathrm{x}_2},\mathcal{E}) = \mathrm{Hom}(\mathcal{E},\mathcal{O}_\mathrm{m}(-5)\oplus\mathrm{k}_{\mathrm{x}_1}\oplus\mathrm{k}_{\mathrm{x}_2})^\vee$. $\mathrm{Hom}(\mathcal{E},\mathcal{O}_\mathrm{m}(-5)\oplus\mathrm{k}_{\mathrm{x}_1}\oplus\mathrm{k}_{\mathrm{x}_2}) = \mathrm{Hom}(\mathcal{E}|_\mathrm{m},\mathcal{O}_\mathrm{m}(-5)\oplus\mathrm{k}_{\mathrm{x}_1}\oplus\mathrm{k}_{\mathrm{x}_2})$. Рассмотрим точную последовательность $0\to\mathcal{I}_{m\cup x1\cup x2}(-1)\to\mathcal{E}\to\mathcal{I}_l\to 0$. Ограничим ее на m, получим точную последовательность: $0\to\mathcal{I}_{m\cup x1\cup x2}(-1)|_m\to\mathcal{E}|_m\to\mathcal{I}_l|_m\to 0$. $\mathcal{I}_m|_m = N^\vee_{m/\mathbf{P}^3} = 2\mathcal{O}_m(-1)$, $\mathcal{I}_l|_m = 0$. $\mathrm{Hom}(0,\mathcal{O}_\mathrm{m}(-5)) = 0$. Следовательно, $\mathrm{Hom}(\mathcal{E},\mathcal{O}_\mathrm{m}(-5)) = 0$. $\mathcal{E}|_x = k_x^4$, следовательно, $\mathrm{Hom}(\mathcal{E},\mathrm{k}_{\mathrm{x}_1}\oplus\mathrm{k}_{\mathrm{x}_2}) = \mathrm{k}^8$. Поэтому, $\mathrm{Ext}^3(\mathcal{O}_\mathrm{m}(-1)\oplus\mathrm{k}_{\mathrm{x}_1}\oplus\mathrm{k}_{\mathrm{x}_2},\mathcal{E}) = \mathrm{k}^8$.

Вычислим размерность $\mathrm{Ext}^2(\mathcal{F},\mathcal{E})$. Применим к точной тройке $0\to\mathcal{O}(-2)\to 3\mathcal{O}(-1)\to\mathcal{F}\to 0$ функтор $\mathrm{Hom}(*,\mathcal{E})$, получим точную последовательность: $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}(-2),\mathcal{E})\to\mathrm{Ext}^2(\mathcal{F},\mathcal{E})\to\mathrm{Ext}^2(3\mathcal{O}(-1),\mathcal{E})$. $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}(-2),\mathcal{E}) = \mathrm{H}^1(\mathcal{E}(2)) = 0$, $\mathrm{Ext}^2(3\mathcal{O}(-1),\mathcal{E}) = 3\mathrm{H}^2(\mathcal{E}(1)) = 0$, следовательно, $\mathrm{Ext}^2(\mathcal{F},\mathcal{E}) = 0$.

Вычислим размерность $\mathrm{Ext}^3(\mathcal{E},\mathcal{F})$. К точной тройке $0\to\mathcal{O}(-2)\to 3\mathcal{O}(-1)\to\mathcal{F}\to 0$ применим функтор $\mathrm{Hom}(*,\mathcal{E})$, получим точную последовательность: $\mathrm{Ext}^2(\mathcal{O}(-2),\mathcal{E})\to\mathrm{Ext}^3(\mathcal{F},\mathcal{E})\to\mathrm{Ext}^3(3\mathcal{O}(-1),\mathcal{E})$. $\mathrm{Ext}^2(\mathcal{O}(-2),\mathcal{E}) = \mathrm{H}^2(\mathcal{E}(2)) = 0$, $\mathrm{Ext}^3(3\mathcal{O}(-1),\mathcal{E}) = \mathrm{H}^3(\mathcal{E}(1)) = 0$. Следовательно, $\mathrm{Ext}^3(\mathcal{E},\mathcal{F}) = 0$. Поэтому из (10) получаем, что $\mathrm{Ext}^2(\mathcal{E},\mathcal{E}) = \mathrm{k}^8$. И из (4) следует, что $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E}) = \mathrm{k}^{19}$.

Библиографический список

1. Hartshorne R. Stable reflexive sheaves (English) // Math. Ann. 254, 121-176 (1980).
2. Заводчиков, М. А. Новые компоненты схемы модулей Mрз(2; -1, 2, 0) полустабильных когерентных пучков ранга 2 без кручения на проективном пространстве P3 [Текст]: Труды пятых Колмогоровских чтений. - Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2007.

А.Д. Уваров

ОБ ОДНОМ СЕМЕЙСТВЕ СТАБИЛЬНЫХ ПУЧКОВ РАНГА 2 С КЛАССАМИ ЧЕРНА $C_1 = -1$, $C_2 = 2$, $C_3 = 0$ НА ТРЕХМЕРНОЙ ПРОЕКТИВНОЙ КВАДРИКЕ

В статье исследуется M_Q схема модулей Гизекера-Маруямы полустабильных пучков без кручения ранга 2 с $c_1 = -1, c_2 = 2, c_3 = 0$ на гладкой трехмерной проективной квадрике Q в пространстве P^4. Исследуется неприводимое 7-мерное семейство M стабильных пучков из M_Q, которое строится следующим образом. Пусть $\mathcal{S}$ – спинорное расслоение ранга 2 с классами Черна $c_1 = -1$, $c_2 = 1$ на Q (см. [2]). Семейство M описывается следующим образом:

$$M = \{\mathcal{E}\in\mathrm{M}_Q \mid \mathcal{E} = \ker(\mathcal{S}\twoheadrightarrow\mathcal{O}_l(-1)\oplus k_x), \text{где } l\subset Q \text{ –прямая, } x\text{– точка, } x\notin l\} \quad (1)$$

Можно показать, что замыкание $\bar{M}$ семейства M в M_Q является неприводимой компонентой в M_Q. В настоящей статье доказывается, что компонента $\bar{M}$ является неприведенной в общей точке. А именно, мы вычисляем касательное по Зарискому пространство $T_{[\mathcal{E}]}M_Q$ в точке $[\mathcal{E}] \in M$, которое в силу стабильности $\mathcal{E}$ совпадает с группой $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{E})$. Основной результат статьи – следующая теорема.

Теорема. *Размерности групп* $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ *и* $\mathrm{Ext}^2(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ *равны соответственно 10 и 4, где* $\mathcal{E}$ *- пучок вида (1). Тем самым, компонента* $\bar{M}$ *в* M_Q *не приведена в общей точке.*

Перейдем к доказательству теоремы. В силу (1) пучок $[\mathcal{E}] \in M$ входит в точную тройку:

$$0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{S} \to \mathcal{O}_l(-1) \oplus k_x \to 0, \tag{2}$$

где $\mathcal{S}$ - спинорное расслоение на Q. Применим к данной тройке функтор $\mathrm{Hom}(\cdot, \mathcal{E})$ и выпишем кусок длиной точной последовательности:

$$\begin{gathered}\mathrm{Hom}(\mathcal{S}, \mathcal{E}) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{E}) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_{l_1}(-1) \oplus k_x, \mathcal{E}) \to \\ \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{S}, \mathcal{E}) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{E}) \to \mathrm{Ext}^2(\mathcal{O}_l(-1) \oplus k_x, \mathcal{E}) \to \mathrm{Ext}^2(\mathcal{S}, \mathcal{E}).\end{gathered} \tag{3}$$

Вычислим размерность $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_l(-1) \oplus k_x, \mathcal{E})$.

К тройке (2) применим функтор $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_l(-1) \oplus k_x, \cdot)$ и выпишем кусок длинной точной последовательности: $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_l(-1) \oplus k_x, \mathcal{S}) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_l(-1) \oplus k_x, \mathcal{O}_l(-1) \oplus k_x) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_l(-1) \oplus k_x, \mathcal{E}) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_l(-1) \oplus k_x, \mathcal{S})$. Так как $\mathrm{dimHom}(\mathcal{O}_l(-1) \oplus k_x), \mathcal{S}) = 0$, $\mathrm{dimHom}(\mathcal{O}_l(-1) \oplus k_x, \mathcal{O}_l(-1) \oplus k_x) = 2$ и $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_l(-1) \oplus k_x, \mathcal{S}) = \mathrm{Ext}^2(\mathcal{S}, \mathcal{O}_l(-4) \oplus k_x) = H^2(k_x^2 \oplus \mathcal{S}^\vee(-4))|_l = H^2(k_x^2 \oplus \mathcal{O}_l(-3) \oplus \mathcal{O}_l(-4)) = 0$, из последней точной последовательности мы заключаем, что

$$\mathrm{dimExt}^1(\mathcal{O}_l(-1) \oplus k_x, \mathcal{E}) = 2. \tag{4}$$

Вычислим размерность $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{S}, \mathcal{E})$.

К тройке (2) применим функтор $\mathrm{Hom}(\mathcal{S}, \cdot)$ и выпишем начало длинной точной последовательности: $0 \to \mathrm{Hom}(\mathcal{S}, \mathcal{E}) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{S}, \mathcal{S}) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{S}, \mathcal{O}_l(-1) \oplus k_x) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{S}, \mathcal{E}) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{S}, \mathcal{S})$. Так как $\mathrm{Hom}(\mathcal{S}, \mathcal{E}) = 0$, $\mathrm{dimHom}(\mathcal{S}, \mathcal{S}) = 1$, $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{S}, \mathcal{S}) = 0$ и $\mathrm{dimHom}(\mathcal{S}, \mathcal{O}_l(-1) \oplus k_x) = \mathrm{dim}H^0(k_x^2 \oplus \mathcal{S}^\vee(-1)|_l) = \mathrm{dim}H^0(k_x^2 \oplus \mathcal{O}_l \oplus \mathcal{O}_l(-1)) = 2+1 = 3$, из последней точной последовательности мы получаем, что

$$\mathrm{dimExt}^1(\mathcal{S}, \mathcal{E}) = 2. \tag{5}$$

Вычислим размерность $\mathrm{Ext}^2(\mathcal{O}_l(-1) \oplus k_x, \mathcal{E})$.

К тройке (2) применим функтор $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_l(-1) \oplus k_x, \cdot)$ и выпишем конец длинной точной последовательности :

$$\begin{gathered}\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_l(-1) \oplus k_x, \mathcal{S}) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_l(-1) \oplus k_x, \mathcal{O}_l(-1) \oplus k_x) \to \mathrm{Ext}^2(\mathcal{O}_l(-1) \oplus k_x, \mathcal{E}) \to \\ \to \mathrm{Ext}^2(\mathcal{O}_l(-1) \oplus k_x, \mathcal{S}) \to \mathrm{Ext}^2(\mathcal{O}_l(-1) \oplus k_x, \mathcal{O}_l(-1) \oplus k_x) \to \mathrm{Ext}^3(\mathcal{O}_l(-1) \oplus k_x, \mathcal{E}) \to \\ \to \mathrm{Ext}^3(\mathcal{O}_l(-1) \oplus k_x, \mathcal{S}) \to \mathrm{Ext}^3(\mathcal{O}_l(-1) \oplus k_x, \mathcal{O}_l(-1) \oplus k_x) \to 0.\end{gathered} \tag{6}$$

Для данной точной последовательности вычислим размерности групп, в нее входящих.

Вычислим размерность $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_l(-1)\oplus k_x, \mathcal{S})$. При выводе формулы (4) было доказано, что

$$\dim\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_l(-1)\oplus k_x, \mathcal{S}) = 0. \tag{7}$$

Вычислим размерность $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_l(-1)\oplus k_x, \mathcal{O}_l(-1)\oplus k_x)$. Размерность этой группы есть размерность косательного пространства к $\mathbb{P}^3\times Q$ в общей точке, поэтому

$$\dim\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_l(-1)\oplus k_x, \mathcal{O}_l(-1)\oplus k_x) = 6. \tag{8}$$

Вычислим размерность $\mathrm{Ext}^2(\mathcal{O}_l(-1)\oplus k_x, \mathcal{S})$. Поскольку $\mathrm{Ext}^2(\mathcal{O}_l(-1)\oplus k_x, \mathcal{S}) = \mathrm{Ext}^1(\mathcal{S}, \mathcal{O}_l(-4)\oplus k_x) = H^1(k_x^2\oplus \mathcal{S}^\vee(-4)|_l) = H^1(k_x^2\oplus\mathcal{O}_l(-3)\oplus\mathcal{O}_l(-4))$, мы имеем, что

$$\dim\mathrm{Ext}^2(\mathcal{O}_l(-1)\oplus k_x, \mathcal{S}) = 5. \tag{9}$$

Вычислим размерность $\mathrm{Ext}^2(\mathcal{O}_l(-1)\oplus k_x, \mathcal{O}_l(-1)\oplus k_x)$.

Вычислим размерность $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_l, \mathcal{O}_l(-3))$. Выпишем кусок спектральной последовательности глобальных и локальных Ext-ов:

$$H^1(\mathcal{H}om(\mathcal{O}_l, \mathcal{O}_l(-3))) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_l, \mathcal{O}_l(-3)) \to H^0(\mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_l, \mathcal{O}_l(-3))). \tag{10}$$

Вычислим размерность $H^0(\mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_l, \mathcal{O}_l(-3)))$. Для этого рассмотрим точную тройку : $0\to\mathcal{I}_l(-3)\to\mathcal{O}_Q(-3)\to\mathcal{O}_l(-3)\to 0$. Применим к ней функтор $\mathcal{H}om(\mathcal{O}_l,\cdot)$ и выпишем кусок длиной точной последовательности : $\mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_l,\mathcal{O}_Q(-3))\to\mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_l,\mathcal{O}_l(-3))\to\mathcal{E}xt^2(\mathcal{O}_l,\mathcal{I}_l(-3))$, которая с учетом равенства $\mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_l,\mathcal{O}_Q(-3)) = 0$ приобретает вид :

$$0\to\mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_l,\mathcal{O}_l(-3))\to\mathcal{E}xt^2(\mathcal{O}_l,\mathcal{I}_l(-3)). \tag{11}$$

Рассмотрим точную тройку: $0\to\mathcal{O}_Q(-4)\to\mathcal{S}(-3)\to\mathcal{I}_l(-3)\to 0$. Применим к ней функтор $\mathcal{H}om(\mathcal{O}_l,\cdot)$ и выпишем кусок длиной точной последовательности:

$$\mathcal{E}xt^2(\mathcal{O}_l,\mathcal{O}_Q(-4))\to\mathcal{E}xt^2(\mathcal{O}_l,\mathcal{S}(-3))\to\mathcal{E}xt^2(\mathcal{O}_l,\mathcal{I}_l(-3))\to\mathcal{E}xt^3(\mathcal{O}_l,\mathcal{O}_Q(-4)). \tag{12}$$

Заметим, что $\mathcal{E}xt^3(\mathcal{O}_l,\mathcal{O}_Q(-4)) = 0$, поскольку l является локально-полным пересечением на Q, кроме этого $\mathcal{E}xt^2(\mathcal{O}_l,\mathcal{O}_Q(-4)) = \det\mathcal{N}_l|_Q\otimes\mathcal{O}_Q(-4)|_l = \mathcal{O}_l(-3)$ и $\mathcal{E}xt^2(\mathcal{O}_l,\mathcal{S}(-3)) = \det\mathcal{N}_l|_Q\otimes\mathcal{S}(-3)|_l = \mathcal{S}(-2)|_l = \mathcal{O}_l(-2)\oplus\mathcal{O}_l(-3)$. С учетом трех последних равенств последовательность (12) приобретает вид: $\mathcal{O}_l(-3)\to\mathcal{O}_l(-2)\oplus\mathcal{O}_l(-3)\to\mathcal{E}xt^2(\mathcal{O}_l,\mathcal{I}_l(-3))\to 0$, откуда несложно видеть, что пучок $\mathcal{E}xt^2(\mathcal{O}_l,\mathcal{I}_l(-3))$ может быть равен либо $\mathcal{O}_l(-2)$, либо $\mathcal{O}_l(-2)\oplus\mathcal{O}_l(-3)$, и с учетом этого факта из последовательности (11) следует, что $h^0(\mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_l,\mathcal{O}_l(-3))) = 0$. С учетом последнего равенства и того, что $h^1(\mathcal{H}om(\mathcal{O}_l,\mathcal{O}_l(-3))) = h^1(\mathcal{O}_l(-3)) = 2$ из последовательности (10) видно, что

$$\dim\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_l,\mathcal{O}_l(-3)) = 2. \tag{13}$$

Поскольку $\mathrm{Ext}^2(\mathcal{O}_l(-1) \oplus k_x, \mathcal{O}_l(-1) \oplus k_x) = (\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_l(-1) \oplus k_x, \mathcal{O}_l(-4) \oplus k_x))^\vee = (\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_l, \mathcal{O}_l(-3)) \oplus \mathrm{Ext}^1(k_x, k_x)^\vee)$, из формулы (13), с учетом того, что $\mathrm{dimExt}^1(k_x, k_x) = 3$, как размерность касательного пространства в общей точке к Q, мы заключаем, что

$$\mathrm{dimExt}^2(\mathcal{O}_l(-1) \oplus k_x, \mathcal{O}_l(-1) \oplus k_x) = 2 + 3 = 5. \tag{14}$$

Вычислим размерность $\mathrm{Ext}^3(\mathcal{O}_l(-1) \oplus k_x, \mathcal{E})$.

Для вычисления размерности этой группы рассмотрим следующую диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & & \\
 & \mathcal{I}_{l_2} \arrow[u] \arrow[r] & \mathcal{I}_{l_2} \arrow[u] & & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{E} \arrow[u] \arrow[r] & \mathcal{S} \arrow[u] \arrow[r] & \mathcal{O}_l(-1) \oplus k_x \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{I}_{l \cup x}(-1) \arrow[u] \arrow[r] & \mathcal{O}_Q(-1) \arrow[u] \arrow[r] & \mathcal{O}_l(-1) \oplus k_x \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & &
\end{tikzcd} \tag{15}$$

где l, l_2 и x попарно не пересекаются. Ограничив левый вертикальный столбец диаграммы (15) на точку x, он примет вид: $0 \to k_x^3 \to \mathcal{E}|_x \to k_x \to 0$. Применив к последней тройке функтор $\mathrm{Hom}(\cdot, k_x)$ легко видеть, что

$$\mathrm{dimHom}(\mathcal{E}, k_x) = 4. \tag{16}$$

Ограничив левый вертикальный столбец диаграммы (15) на прямую l, он примет вид : $0 \to \mathcal{O}_l(-1) \oplus \mathcal{O}_l(-2) \to \mathcal{E}|_l \to \mathcal{O}_l \to 0$. Применив к последней точной тройке функтор $\mathrm{Hom}(\cdot, \mathcal{O}_l(-4))$, легко видеть, что

$$\mathrm{dimHom}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_l(-4)) = 0. \tag{17}$$

Поскольку $\mathrm{Ext}^3(\mathcal{O}_l(-1) \oplus k_x, \mathcal{E}) = (\mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_l(-4) \oplus k_x))^\vee = (\mathrm{Hom}(\mathcal{E}, k_x) \oplus \mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_l(-4)))^\vee$, с учетом формул (16) и (17) мы получаем, что

$$\mathrm{dimExt}^3(\mathcal{O}_l(-1) \oplus k_x, \mathcal{E}) = 0 + 4 = 4. \tag{18}$$

Вычислим размерность группы $\mathrm{Ext}^3(\mathcal{O}_l(-1) \oplus k_x, \mathcal{S})$.

Поскольку $\mathrm{Ext}^3(\mathcal{O}_l(-1) \oplus k_x, \mathcal{S}) = (\mathrm{Hom}(\mathcal{S}, \mathcal{O}_l(-4) \oplus k_x))^\vee = (\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_l \oplus \mathcal{O}_l(-1), \mathcal{O}_l(-4)) \oplus \mathrm{Hom}(\mathcal{S}, k_x))^\vee$, то мы имеем:

$$\mathrm{dimExt}^3(\mathcal{O}_l(-1) \oplus k_x, \mathcal{S}) = 0 + 2 = 2. \tag{19}$$

Вычислим размерность группы $\mathrm{Ext}^3(\mathcal{O}_l(-1) \oplus k_x, \mathcal{O}_l(-1) \oplus k_x)$.

Поскольку $\mathrm{Ext}^3(\mathcal{O}_l(-1)\oplus k_x, \mathcal{O}_l(-1)\oplus k_x) = (\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_l(-1)\oplus k_x, \mathcal{O}_l(-4)\oplus k_x))^\vee = (\mathrm{Hom}(k_x, k_x))^\vee$, то мы имеем:

$$\mathrm{dimExt}^3(\mathcal{O}_l(-1)\oplus k_x, \mathcal{O}_l(-1)\oplus k_x) = 1. \tag{20}$$

С учетом формул (4), (8), (9), (14), (18), (19), (20) из последовательности (6) мы получаем, что

$$\mathrm{dimExt}^2(\mathcal{O}_l(-1)\oplus k_x, \mathcal{E}) = 9. \tag{21}$$

Далее вычислим размерность группы $\mathrm{Ext}^2(\mathcal{S},\mathcal{E})$, входящей в последовательность (3). Тензорно умножим тройку (2) на $\mathcal{S}^\vee$, она приобретет следующий вид: $0\to\mathcal{S}^\vee\otimes\mathcal{E}\to\mathcal{S}^\vee\otimes\mathcal{S}\to\mathcal{S}^\vee\otimes(\mathcal{O}_l(-1)\oplus k_x)\to 0$. Выпишем кусок длиной точной последовательности групп когомологий: $H^1(\mathcal{S}^\vee\otimes(\mathcal{O}_l(-1)\oplus k_x))\to H^2(\mathcal{S}^\vee\otimes\mathcal{E})\to H^2(\mathcal{S}^\vee\otimes\mathcal{S})$. Поскольку $H^1(\mathcal{S}^\vee\otimes(\mathcal{O}_l(-1)\oplus k_x)) = H^1(\mathcal{S}(1)\otimes(\mathcal{O}_l(-1)\oplus k_x)) = H^1(\mathcal{O}_l\oplus\mathcal{O}_l(-1)\oplus k_x^2) = 0$ и $H^2(\mathcal{S}^\vee\otimes\mathcal{S}) = 0$ ([см. 2]), то из данной последовательности мы получаем, что $h^2(\mathcal{S}^\vee\otimes\mathcal{E}) = 0$. С учетом последнего равенства и того, что $\mathrm{Ext}^2(\mathcal{S},\mathcal{E}) = (H^2(\mathcal{S}^\vee\otimes\mathcal{E}))^\vee$, получаем

$$\mathrm{dimExt}^2(\mathcal{S},\mathcal{E}) = 0. \tag{22}$$

Вычислим размерность группы $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E})$.

С учетом формул (4), (5), (21), (22) и равенств: $\mathrm{Hom}(\mathcal{S},\mathcal{E}) = 0, \mathrm{dimHom}(\mathcal{E},\mathcal{E}) = 1$, из последовательности (3) получаем, что

$$\mathrm{dimExt}^1(\mathcal{E},\mathcal{E}) = 10. \tag{23}$$

Вычислим размерность группы $\mathrm{Ext}^2(\mathcal{E},\mathcal{E})$.

К тройке (2), тензорно умноженной на $\mathcal{O}_Q(-3)$, применим функтор $\mathrm{Hom}(\mathcal{E},\cdot)$ и выпишем кусок длинной точной поледовательности: $\mathrm{Hom}(\mathcal{E},\mathcal{S}(-3))\to\mathrm{Hom}(\mathcal{E},\mathcal{O}_l(-4)\oplus k_x)\to\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E}(-3))\to\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{S}(-3))$. В силу стабильности пучка $\mathcal{E}$ и формул (18) и (22) мы имеем следующие равенства: $\mathrm{Hom}(\mathcal{E},\mathcal{S}(-3)) = 0$, $\mathrm{dimHom}(\mathcal{E},\mathcal{O}_l(-4)\oplus k_x) = \mathrm{dimExt}^3(\mathcal{O}_l(-1)\oplus k_x,\mathcal{E}) = 4$ и $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{S}(-3)) = \mathrm{Ext}^2(\mathcal{S},\mathcal{E}) = 0$. С учетом последних равенств из данной точной последовательности получаем, что

$$\mathrm{dimExt}^1(\mathcal{E},\mathcal{E}(-3)) = \mathrm{dimExt}^2(\mathcal{E},\mathcal{E}) = 4. \tag{24}$$

Из формул (23) и (24) следует доказательство теоремы.

Библиографический список

1. G. Ottaviani, M. Szurek, "On moduli of stable 2-bundles with small chern classes on Q3", Annali di Matematica Pura ed Applicata (IV), V. CLXVII, (1994), 191–241.