

В силу полученной ранее асимптотики $P_k \sim k/\rho$, $\rho \rightarrow \infty$, с учетом $\rho = \lambda/(\alpha\gamma)$, получаем $T_k \sim (\alpha\gamma k)^{-1}$ и $T_{k,m} \sim (\alpha\gamma)^{-1}(k^{-1} + \dots + m^{-1})$, $\rho \rightarrow \infty$. Если речь идет о росте интенсивности потока $\lambda \rightarrow \infty$, а величина $\alpha\gamma$ остается постоянной, то эти соотношения дают пределы соответствующих средних времен пребывания.

Разумеется, полученные результаты имеют теоретический характер, а их применимость на практике нуждается в проверке статистическими исследованиями. Рассмотренная модель допускает дальнейшие обобщения и уточнения. Возможны также и другие приложения результатов, кроме описанных.

Библиографический список

1. Лидбеттер, М., Линдгрэн, Г., Ротсен, Х. Экстремумы случайных последовательностей и процессов [Текст]. – М.: Мир, 1989.
2. Heinrich L., Molchanov I.S. Some limit theorems for extremal and union shot-noise processes // Math. Nachr., 1994, v.168, p. 139–159.
3. Мандельброт, Б. Фрактальная геометрия природы [Текст]. – М.: Институт компьютерных исследований, 2002.

А.С. Тихомиров

СТАБИЛЬНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ РАССЛОЕНИЯ РАНГА ДВА С $C_1 = 0$ И $C_2 = 2$ НА ДЕРЕВЬЯХ РАЗДУТИЙ ПРОЕКТИВНОЙ ПЛОСКОСТИ

1. Введение

Пространства модулей стабильных алгебраических векторных расслоений с фиксированными топологическими инвариантами (классами Черна) на проективном многообразии, как правило, являются квазипроективными, но не проективными схемами. Поэтому возникает естественный вопрос об их проективных компактификациях. Обычной для алгебраической геометрии компактификацией пространств модулей является компактификация Гизекера-Маруямы [5]. В калибровочной теории в силу соответствия Kobayashi-Hitchin стабильным векторным расслоениям ранга 2 с $c_1 = 0$ на гладкой комплексной проективной кривой или алгебраической поверхности X соответствуют антиавтотдуальные (относительно хodgeвой метрики) связности на соответствующем гладком $SU(2)$ -расслоении на подлежащем X дифференцируемом многообразии. Компактификацией пространств модулей, то есть классов калибровочной эквивалентности таких связностей, применяемой в гладкой топологии, является компактификация Уленбек (называемая также компактификацией слабыми пределами). К. Таубсом [9], С. Дональдсоном и П. Кронхеймером [1], П. Феханом [2] исследовалась другая компактификация пространств модулей связностей посредством так называемых сильных пределов связностей. Алгебро-геометрический аналог компактификации сильными пределами для случая алгебраических кривых был описан Д. Нагараджем и С. Сешадри [8]. Вопрос о существовании такого аналога в двумерном случае алгебраической поверхности до последнего времени являлся открытым. Недавно Д. Маркушевич, автор настоящей заметки и Г. Траутманн построили такой аналог. В этой компактификации пределами векторных расслоений на поверхности, обозначаемой ниже через S_0 , являются векторные расслоения на приводимой поверхности S , называемой деревом раздутий поверхности S_0 и получаемой из поверхности S_0 , раздутой предварительно в конечном числе точек, приклеиванием к ней нескольких экземпляров проективной плоскости, также предварительно раздутых в общем случае. (Точное определение дерева раздутий и расслоения на нем дается ниже в пунктах 2.1 и 2.2 параграфа 2.) Полное изложение теории таких компактификаций в настоящее время готовится к публикации. В данной заметке мы рассматриваем первый нетривиальный пример семейства стабильных расслоений на деревьях раздутий в случае, когда исходная поверхность S_0 есть проективная плоскость P^2 и второй класс Черна расслоения равен 2. Основным результатом заметки – утверждение о том, что семейство $M_2(P^2)$ классов изоморфизма стабильных расслоений ранга 2 с $c_1 = 0$, $c_2 = 2$ на деревьях раздутий проективной плоскости P^2 ограничено и биективно проективному пространству P^5 , раздутому вдоль поверхности Веронезе (см. теорему 4.4).

Всюду в заметке основным полем является поле комплексных чисел \mathbb{C} .

2. Векторные расслоения на деревьях раздутий алгебраической поверхности

2.1. Деревья раздутий алгебраической поверхности

Под *деревом* $T = \{i_0, i_1, i_2, \dots, i_N\}$ мы понимаем конечный ориентированный граф с частичным упорядочением " $<$ " его вершин i_k , удовлетворяющим условиям: (i) существует единственная минимальная вершина i_0 относительно этого упорядочения (называемая *корневой вершиной*), т.е. такая, что $i_0 < i_k$, $k = 1, \dots, N$, и (ii) для произвольной вершины $i \in T \setminus \{i_0\}$ существует единственная вершина i^- такая, что $i^- < i$ и не существует других вершин $i'' \in T$, таких, что $i^- < i'' < i$. Для данной вершины $i \in T$ будем обозначать через i^+ множество $\{i' \in T \mid i = i'^-\}$ вершин графа T , называемых *вершинами, исходящими из вершины i* . Обозначим также через T_{top} множество всех *верхних* вершин графа T , т.е. вершин i таких, что $i^+ = \emptyset$. Кроме того, обозначим $T^* := T \setminus (\{i_0\} \cup T_{top})$.

Далее, пусть n - фиксированное натуральное число и $N_T = \{n_{i_0}, n_{i_1}, \dots, n_{i_N}\}$ - последовательность неотрицательных целых чисел, приписанных вершинам дерева T и удовлетворяющих условиям: (i) $n(T) := \sum_{i \in T} n_i = n$ (так называемое "топологическое" условие), (ii) если $n_i = 0$, то i^+ состоит по меньшей мере из двух вершин (отсюда, в частности, вытекает, что $n_i \geq 1$ для каждой верхней вершины $i \in T_{top}$).

Назовем пару $\tilde{T} := (T, N_T)$ *взвешенным деревом*. Обозначим $\tilde{\mathbf{T}}_n = \{\tilde{T} := (T, N_T) \mid N_T \text{ удовлетворяет условиям (i) и (ii)}\}$ и, соответственно, $\mathbf{T}_n = \{T - \text{дерево} \mid \text{существует } N_T \text{ такое, что } (T, N_T) \in \tilde{\mathbf{T}}_n\}$. Множества $\tilde{\mathbf{T}}_n$ и \mathbf{T}_n , очевидно, являются конечными.

Пусть S_0 - гладкая проективная алгебраическая поверхность над полем \mathbf{k} . Рассмотрим дерево $T = \{i_0, i_1, i_2, \dots, i_N\} \in \mathbf{T}_n$, и пусть $Z_{i_0} = \{x_i \mid i \in i_0^+\}$ есть множество из $r_{i_0} := |i_0^+|$ различных точек в S_0 , рассматриваемое как приведенная 0-мерная подсхема длины r_{i_0} в S_0 . Рассмотрим раздутие $\sigma_{i_0} = \text{Bl}_{Z_{i_0}} : S_{i_0} \rightarrow S_0$ с центром в Z_{i_0} , и пусть $\tilde{l}_i := \sigma_{i_0}^{-1}(x_i)$, $i \in i_0^+$, - исключительные прямые на S_{i_0} .

Далее, пусть \mathbb{P}_i^2 есть экземпляр проективной плоскости, приписанный данной вершине $i > i_0$ дерева T , и l_i - прямая в \mathbb{P}_i^2 вместе с изоморфизмом $\varphi_i : \tilde{l}_i \xrightarrow{\sim} l_i$. Обозначим $\text{exc}(S_{i_0}) := \{(\tilde{l}_i, \varphi_i) \mid i \in i_0^+\}$. Далее, для $i \in T^*$ рассмотрим раздутие $\sigma_i := \text{Bl}_{Z_i} : S_i \rightarrow \mathbb{P}_i^2$, $i \in T^*$, плоскости \mathbb{P}_i^2 с центром в множестве $Z_i = \{x_{i'} \in \mathbb{P}_i^2 \setminus l_i \mid i' \in i^+\}$, состоящем из $r_i := |i^+|$ различных точек и рассматриваемом как приведенная 0-мерная подсхема длины r_i в $\mathbb{P}_i^2 \setminus l_i$; ниже мы будем отождествлять прямую $l_i \subset \mathbb{P}_i^2$ с прямой $\sigma_i^{-1}(l_i) \subset S_i$. Рассмотрим на S_i исключительные прямые $\tilde{l}_j := \sigma_i^{-1}(x_j)$, $j \in i^+$, вместе с изоморфизмами $\varphi_j : \tilde{l}_j \xrightarrow{\sim} l_j$, и пусть $\text{exc}(S_i) := \{(\tilde{l}_j, \varphi_j) \mid j \in i^+\}$. Кроме того, обозначим через h_i обратный образ класса прямой на \mathbb{P}^2 при σ_i , $i \in T^*$, а также положим $S_i := \mathbb{P}_i^2$ для $i \in T_{top}$. Наконец, обозначим через R_T совокупность $\left(\tilde{S}, \text{exc}(\tilde{S}), \{S_i, \text{exc}(S_i) \mid i \in T^*\}, \{S_i \mid i \in T_{top}\} \right)$ всех вышеуказанных данных.

Определение 2.1. Для фиксированных данных (T, R_T) , описанных выше, обозначим через $S_T = S_{R_T} := \bigcup_{i \in T} S_i$ объединение поверхностей S_i , склеенных вдоль прямых l_i посредством изоморфизмов φ_i , взятых из данных R_T . Назовем поверхность S_T , рассматриваемую как приведенную связную приводимую поверхность, *деревом раздутий поверхности S_0 , определенным данными R_T* (или, кратко, *деревом поверхностей*).

Обозначение 2.2. Если $S = \bigcup_i S_i$ есть дерево поверхностей, то оно однозначно определяет дерево T такое, что $S = S_T$. Мы обозначаем это дерево T через $T(S)$.

2.2. Векторные расслоения на деревьях раздутий

Определение 2.3. Пусть $T \in \mathbf{T}_n$ и $S_T = \bigcup_{i \in T} S_i$ – дерево поверхностей. Назовем алгебраическое векторное расслоение E_{S_i} на компоненте S_i дерева S_T для $i \in T \setminus \{i_0\}$ *расслоением Хюльсбергена*, если E_{S_i} удовлетворяет точной тройке

$$(1) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_{S_i}(-l_i + \sum_{j \in i^+} l_j) \rightarrow E_{S_i} \rightarrow \mathcal{I}_{Z_i, S_i}(l_i - \sum_{j \in i^+} l_j) \rightarrow 0,$$

где используются стандартные обозначения для прямых $l_i, l_j, j \in i^+$, на S_i , а Z_i есть некоторая подсхема размерности ≤ 0 в $S_i \setminus \{(\bigcup_{j \in i^+} l_j) \cup l_i\}$. Тройка (1), в частности, влечет:

$$(2) \quad \text{length}(Z_i) = c_2(E_{S_i}) + 1 - |i^+|.$$

Определение 2.4. Пусть $\mathcal{O}_{S_0}(h)$ – обильное линейное расслоение на S_0 . Для $n \geq 0$ рассмотрим схему $M_{S_0}(n) = M_{S_0, h}(n)$ модулей h -полустабильных алгебраических векторных расслоений ранга 2 с классами Черна $c_1 = 0$ и $c_2 = n \geq 0$ на S_0 . Мы обозначаем через $\overline{M_{S_0}(n)}^G$ компактификацию Гизекера-Маруямы схемы $M_{S_0}(n)$ классами S -эквивалентности h -полустабильных пучков ранга 2 без кручения на S_0 .

Определение 2.5. Для фиксированного натурального числа n и данного взвешенного дерева $\tilde{T} = (T, N_T) \in \tilde{\mathbf{T}}_n$, где $T = \{i_0, i_1, i_2, \dots, i_N\}$, $N_T = \{n_0, n_1, n_2, \dots, n_N\}$, пусть $S_T = \bigcup_{i \in T} S_i$ – дерево раздутий поверхности S_0 . Векторное расслоение $E = E_{\tilde{T}}$ ранга 2 на поверхности S_T (или, что то же, пара $(S_T, E_{\tilde{T}})$) называется *векторным расслоением на дереве раздутий поверхности S_0* , если расслоения $E_i = E|_{S_i}, i \in T$, удовлетворяют условиям:

- (i) $c_1(E_i) = 0, c_2(E_i) = n_i, i \in T$;
- (ii) для каждого $i > i_0$ либо $E|_{S_i} \simeq 2\mathcal{O}_{S_i}$, либо $E|_{S_i}$ есть расслоение Хюльсбергена;
- (iii) если $T = \{i_0\}$, то $[E_{\tilde{T}}] \in M_{S_0}(n)$.

Число n называется *полным вторым классом Черна расслоения E* и обозначается $n = c_2(E)$. Под изоморфизмом векторных расслоений на деревьях раздутий понимается изоморфизм пар $(S_T, E_{\tilde{T}})$ в обычном смысле. Будем обозначать через $M_n(S_0)$ множество классов изоморфизма расслоений на деревьях раздутий поверхности S_0 .

Обозначение 2.6. Для векторного расслоения E с $c_2(E) = n$ на дереве S раздутий поверхности S_0 через $\tilde{T}(S, E)$ будем обозначать взвешенный граф (дерево) $\tilde{T} \in \tilde{\mathbf{T}}_n$, однозначно определяемый тем условием, что $E = E_{\tilde{T}}$.

3. МНОГООБРАЗИЕ МОДУЛЕЙ $\overline{M_{\mathbb{P}^2}(2)}^G$ ПУЧКОВ РАНГА 2 НА ПРОЕКТИВНОЙ ПЛОСКОСТИ

3.1. Пространство \mathbb{P}^5 как GIT-фактор.

В настоящем параграфе рассматривается одно теоретико-инвариантное описание многообразия модулей $\overline{M_{\mathbb{P}^2}(2)}^G$ пучков ранга 2 с $c_1 = 0$ и $c_2 = 2$ на проективной плоскости $\mathbb{P}^2 = P(V)$, $\dim_{\mathbb{C}} V = 3$. Это описание затем используется для явного построения семейства \mathbf{E} таких пучков с базой B , для которой соответствующий модулярный морфизм $B \rightarrow \overline{M_{\mathbb{P}^2}(2)}^G : b \mapsto [\mathbf{E}|_{\mathbb{P}^2} \times \{b\}]$ сюръективен и допускает эффективное описание в терминах линейной алгебры. Конструкции этого параграфа будут использованы затем в §4 для описания искомого множества $M_2(\mathbb{P}^2)$ (см. теорему 4.4 и следствие 4.5).

Пусть H – фиксированное векторное пространство размерности $\dim_{\mathbb{C}} H = 2$. Рассмотрим многообразие $X := P(H) \times P(V) \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ с проекциями на сомножители

$$(3) \quad P(H) \xleftarrow{pr_H} X \xrightarrow{pr_V} P(V) = \mathbb{P}^2.$$

Пусть $\mathbb{P}^5 = P(H \otimes V)$. Для произвольных ненулевых векторов $h \in H$, $v \in V$, и $x \in H \otimes V$ будем обозначать через $\langle h \rangle$, $\langle v \rangle$ и $\langle x \rangle$ отвечающие им точки в $P(H)$, \mathbb{P}^2 и \mathbb{P}^5 соответственно. Имеем вложение Сегре

$$(4) \quad s_{12} : X \hookrightarrow \mathbb{P}^5 : (\langle h \rangle, \langle v \rangle) \mapsto \langle h \otimes v \rangle.$$

Всюду ниже мы будем отождествлять X с его образом при вложении Сегре s_{12} . Далее, рассмотрим грассманиан

$$(5) \quad G := Gr(1, \mathbb{P}^5) = Gr(2, H \otimes V)$$

и для произвольной точки $y \in G$ через l_y будем обозначать соответствующую прямую в \mathbb{P}^5 , а через \mathbb{C}_y^2 – соответствующее двумерное подпространство в $H \otimes V$:

$$(6) \quad \mathbb{C}_y^2 \subset H \otimes V.$$

Далее, рассмотрим каноническое разложение векторного пространства $\Lambda^2(H \otimes V)$:

$$(7) \quad \Lambda^2(H \otimes V) = S^2H \otimes \Lambda^2V \oplus \Lambda^2H \otimes S^2V$$

и соответствующие этому разложению вложения пространств $P(S^2H \otimes \Lambda^2V)$ и $P(\Lambda^2H \otimes S^2V)$ в пространство $\mathbb{P}^{14} = P(\Lambda^2(H \otimes V))$:

$$(8) \quad P(S^2H \otimes \Lambda^2V) =: \mathbb{P}_{H,V}^8 \subset \mathbb{P}^{14} \supset \mathbb{P}_{H,V}^5 := P(\Lambda^2H \otimes S^2V).$$

Эти вложения определяют рациональную линейную проекцию с центром $\mathbb{P}_{H,V}^8$:

$$(9) \quad p : \mathbb{P}^{14} \dashrightarrow \mathbb{P}_{H,V}^5 : x \mapsto \text{Span}(x, \mathbb{P}_{H,V}^8) \cap \mathbb{P}_{H,V}^5,$$

соответствующую проекции пространства $\Lambda^2(H \otimes V)$ на прямое слагаемое $\Lambda^2H \otimes S^2V$. Рассмотрим вложение Плюккера $G \hookrightarrow \mathbb{P}^{14}$ грассманиана G . Нетрудно видеть, что

$$(10) \quad G \cap \mathbb{P}_{H,V}^8 = \{y \in G \mid l_y = \langle h \rangle \times P(U) \subset X, h \in H, U \subset V, \dim_{\mathbb{C}} U = 2\}.$$

Поэтому, рассматривая в G плотное открытое подмножество

$$(11) \quad G^* = G \setminus (G \cap \mathbb{P}_{H,V}^8),$$

получаем регулярный сюръективный морфизм

$$(12) \quad \pi = p|_{G^*} : G^* \rightarrow \mathbb{P}_{H,V}^5 \simeq P(S^2V).$$

Далее, рассмотрим естественное действие редуктивной группы $SL(H)$ на векторном пространстве H и ее индуцированное линейризованное действие на проективном пространстве $\mathbb{P}^{14} = P(\Lambda^2(H \otimes V))$ и грассманиане G . Прямое применение критерия Гильберта-Мамфорда показывает, что описанное в (10) множество $G \cap \mathbb{P}_{H,V}^8$ есть в точности множество точек грассманиана G , нестабильных относительно этого действия; соответственно, G^* есть множество полустабильных точек этого действия:

$$(13) \quad G^* = G^{ss}.$$

Более того, морфизм $\pi : G^* \rightarrow \mathbb{P}(S^2V)$, очевидно, является $SL(H)$ -эквивариантным. Поэтому, рассматривая GIT-фактор в смысле Мамфорда (см. [6])

$$(14) \quad \text{can} : G^* = G^{ss} \rightarrow Y := G^{ss} // SL(H),$$

получаем коммутативную диаграмму:

$$(15) \quad \begin{array}{ccc} G^{ss} & \xrightarrow{\pi} & P(S^2V), \\ & \searrow \text{can} & \nearrow f \\ & Y = G^{ss} // SL(H) & \end{array}$$

в которой существование морфизма f вытекает из того, что Y , будучи хорошим GIT-фактором, является категорным фактором. Поскольку, как нетрудно видеть, слои морфизма π являются замыканиями орбит группы $SL(H)$ (а над точками открытого множества в $P(S^2V)$ - в точности замкнутыми орбитами), то морфизм f является биективным. Так как $P(S^2V)$ - гладкое многообразие, то отсюда следует, что f - изоморфизм:

$$(16) \quad f : G^{ss} // SL(H) \xrightarrow{\sim} P(S^2V)$$

(см. [10, гл. II, §4, Теорема 2]), а значит, морфизм π является GIT-фактором:

$$(17) \quad G^{ss} \xrightarrow{\pi} G^{ss} // SL(H) \simeq P(S^2V).$$

При этом, интерпретируя пространство $P(S^2V)$ как линейный ряд $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)|$ коник в двойственной к \mathbb{P}^2 плоскости $\check{\mathbb{P}}^2 = P(\check{V})$, прямой проверкой получаем следующее

Предложение 3.1. Пусть $y \in G^{ss}$ - произвольная точка и l_y - соответствующая ей прямая в пространстве $\mathbb{P}^5 = P(H \otimes V)$. Тогда точка $C_y = \pi(y) \in P(S^2V)$, интерпретируемая как коника в плоскости $\check{\mathbb{P}}^2$, описывается следующим образом:

$$(18) \quad C_y = \{\mathbb{P}^1 = P(U) \subset \mathbb{P}^2 \mid P(H \otimes U) \cap l_y \neq \emptyset\}.$$

3.2. Изоморфизм многообразия $\overline{M}_{\mathbb{P}^2}(2)^G$ с пространством \mathbb{P}^5 .

Пусть \tilde{U} - тавтологическое двумерное расслоение на грассманиане G и $U = \tilde{U}|_{G^{ss}}$, так что имеем вложение подрасслоения:

$$(19) \quad 0 \rightarrow U \xrightarrow{i} H \otimes V \otimes \mathcal{O}_{G^{ss}}.$$

Это вложение и естественная сюръекция $V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \xrightarrow{e} T_{\mathbb{P}^2}(-1) \simeq \Omega_{\mathbb{P}^2}(2)$ определяют инъективный морфизм пучков на $G^{ss} \times \mathbb{P}^2$:

$$(20) \quad j : U \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \xrightarrow{i \boxtimes id_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}}} H \otimes V \otimes \mathcal{O}_{G^{ss}} \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \xrightarrow{id_H \otimes \mathcal{O}_{G^{ss}} \boxtimes e} H \otimes \mathcal{O}_{G^{ss}} \boxtimes \Omega_{\mathbb{P}^2}(2).$$

Положим $\mathbf{E} = (\text{coker } j) \otimes \mathcal{O}_{G^{ss}} \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)$, так что точна тройка:

$$(21) \quad 0 \rightarrow U \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1) \xrightarrow{j} H \otimes \mathcal{O}_{G^{ss}} \boxtimes \Omega_{\mathbb{P}^2}(1) \rightarrow \mathbf{E} \rightarrow 0.$$

Для произвольной точки $y \in G^{ss}$ пучок

$$E_y = E|_{\{y\}} \times \mathbb{P}^2$$

на \mathbb{P}^2 включается в точную тройку (21), ограниченную на $\{y\} \times \mathbb{P}^2$:

$$(22) \quad 0 \rightarrow \mathcal{C}^2 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1) \xrightarrow{j} H \otimes \Omega_{\mathbb{P}^2}(1) \rightarrow E_y \rightarrow 0.$$

Заметим, что из условия $y \notin G \cap \mathbb{P}_{H,V}^8$ и описания пересечения $G \cap \mathbb{P}_{H,V}^8$, приведенного в (10), непосредственно следует, что пучок E_y полустабилен на \mathbb{P}^2 . Тем самым, получаем морфизм

$$(23) \quad \rho : G^{ss} \rightarrow \overline{M}_{\mathbb{P}^2}(2)^G : y \mapsto [E_y].$$

Покажем, что морфизм ρ сюръективен. Действительно, для произвольного пучка E , где $[E] \in \overline{M}_{\mathbb{P}^2}(2)^G$, ввиду полустабильности E с учетом теоремы Римана-Роха легко получаем:

$$(24) \quad h^1(E(-1)) = h^1(E(-2)) = 2; \quad h^i(E(-j)) = 0, \quad j = 0, 0 \leq i \leq 2, \text{ or } j = 1, 2, i \neq 1.$$

Поэтому, фиксируя отождествления

$$(25) \quad H \xrightarrow{\sim} H^1(E(-1)), \quad \mathcal{C}^2 \xrightarrow{\sim} H^1(E(-2)),$$

и рассматривая резольвенту Кошуля диагонали \mathbb{P}_{Δ}^2 на $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$, тензорно умноженную на $E \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$:

$$(26) \quad 0 \rightarrow E(-2) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1) \rightarrow E(-1) \boxtimes \Omega_{\mathbb{P}^2}(1) \rightarrow E \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \rightarrow E \rightarrow 0,$$

и применяя к ней функтор $R^i pr_{2*}$, получаем точную тройку:

$$(27) \quad 0 \rightarrow \mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1) \xrightarrow{j} H \otimes \Omega_{\mathbb{P}^2}(1) \rightarrow E \rightarrow 0.$$

Подкручивая эту тройку на $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$ и переходя к сечениям, получаем вложение $\mathbb{C}^2 \hookrightarrow H \otimes H^0(\Omega_{\mathbb{P}^2}(2)) \simeq H \otimes V$. Рассматривая в соответствии с (6) образ этого вложения как точку $y \in G$ и учитывая стабильность пучка E , убеждаемся, что $y \in G^{ss}$, так что тройка (27) совпадает с тройкой (22), в которой $E_y = E$, а значит, $\rho(y) = [E]$, то есть морфизм ρ сюръективен.

Для произвольного пучка E , где $[E] \in \overline{M_{\mathbb{P}^2}(2)}^G$, определена кривая прямых подскока $C(E) := \{\mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^2 \mid E|_{\mathbb{P}^1} \neq 2\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}\}$. Эта кривая является коникой в двойственной к \mathbb{P}^2 плоскости $\check{\mathbb{P}}^2 = P(V)$, то есть точкой линейного ряда $|\mathcal{O}_{\check{\mathbb{P}}^2}(2)| = P(S^2V)$, и отображение (так называемый морфизм Барта)

$$(28) \quad \varphi: \overline{M_{\mathbb{P}^2}(2)}^G \rightarrow P(S^2V) : [E] \mapsto C(E)$$

является, как известно, изоморфизмом (см., например, [4]). При этом имеет место

Предложение 3.2. (i) Коммутативна диаграмма:

$$(29) \quad \begin{array}{ccc} G^{ss} & \xrightarrow{\pi} & P(S^2V) \\ & \searrow \rho & \nearrow \varphi \\ & \overline{M_{\mathbb{P}^2}(2)}^G & \end{array}$$

(ii) Пусть $\Delta := \{C \in P(S^2V) \mid C - \text{приводимая коника в } \check{\mathbb{P}}^2\}$ – детерминантная гиперкубика в $P(S^2V)$. Тогда $\varphi^{-1}(P(S^2V) \setminus \Delta) = M_{\mathbb{P}^2}(2)$ – многообразие модулей стабильных векторных расслоений (локально свободных пучков) ранга 2 с $c_1 = 0$, $c_2 = 2$ на \mathbb{P}^2 .

(iii) $\pi^{-1}(P(S^2V) \setminus \Delta) = G^s$ – открытое подмножество в G^{ss} чисто стабильных (в смысле Мамфорда) точек относительно действия группы $SL(H)$, имеющее следующее геометрическое описание:

$$(30) \quad G^s = \{y \in G^{ss} \mid l_y \cap X = \emptyset\},$$

где $X \subset \mathbb{P}^5$ – многообразие Сегре, определенное в (3).

Доказательство. (i) Простая проверка (через ограничения тройки (27) на прямые $\mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^2$) с учетом предложения 3.1.

(ii) См. [7, Глава 2, §4].

(iii) Непосредственная проверка по критерию Гильберта-Мамфорда.

4. СЕМЕЙСТВО РАССЛОЕНИЙ РАНГА 2 НА ДЕРЕВЬЯХ РАЗДУТИЙ ПРОЕКТИВНОЙ ПЛОСКОСТИ

4.1. Перестройки GIT-фактора $G^{ss} \xrightarrow{\pi} P(S^2V)$ в смысле Ф.Кирван

Рассмотрим в G^{ss} замкнутое подмножество

$$(31) \quad Z_0 = \{y \in G^{ss} \mid l_y = P(H \otimes \langle v \rangle), \langle v \rangle \in \mathbb{P}^2\}$$

и локально замкнутые подмножества

$$(32) \quad Z'_1 = \{y \in G^{ss} \mid l_y \cap X = x_1 \sqcup x_2, \quad x_i = \langle h_i \otimes v_i \rangle, \quad h_i \in H, \quad v_i \in V, \quad i = 1, 2\},$$

$$(33) \quad Z''_1 = \{y \in G^{ss} \mid \text{length}(l_y \cap X) = 2, \quad \text{Supp}(l_y \cap X) = \langle h \otimes v \rangle, \quad h \in H, \quad v \in V\},$$

$$(34) \quad Z_2 = \{y \in G^{ss} \mid \text{length}(l_y \cap X) = 1, l_y \cap X = \langle h \otimes v \rangle, h \in H, v \in V\}.$$

Положим $Z_1 = Z'_1 \cup Z''_1$. Нетрудно видеть, что множества $Z_0, Z_1, Z'_1, Z''_1, Z_2$, рассматриваемые как приведенные подсхемы в G^{ss} , являются гладкими неприводимыми многообразиями, причем

$$(35) \quad Z_0, Z''_1 \subset \overline{Z'_1} = \overline{Z_1} \subset \overline{Z_2},$$

где $\overline{Z'_1}, \overline{Z_1}$ и $\overline{Z_2}$ – замыкания Z'_1, Z_1 и Z_2 в G^{ss} соответственно.

Далее, рассмотрим в $P(S^2V)$ поверхность

$$\mathcal{V} := \{C \in P(S^2V) \mid C \text{ – неприведенная коника (двойная прямая) в } \check{\mathbb{P}}^2\}.$$

\mathcal{V} есть поверхность Веронезе в $P(S^2V)$, то есть образ $\check{\mathbb{P}}^2$ при вложении Веронезе $v : \check{\mathbb{P}}^2 \hookrightarrow P(S^2V)$ полным линейным рядом $|\mathcal{O}_{\check{\mathbb{P}}^2}(2)|$. При этом

$$(36) \quad \mathcal{V} = \text{Sing } \Delta$$

– множество особенностей кубического симметрида Δ (являющихся обыкновенными квадратичными особенностями типа A_1).

Для произвольной точки $y \in G^{ss}$ через $\text{Stab}(y)$ будем обозначать стабилизатор в группе $SL(H)$ точки y . Из описаний (31)-(34) непосредственно вытекает

Предложение 4.1. (i) $\pi(Z_0) = \mathcal{V}$ и $Z_0 = \{y \in G^{ss} \mid \dim \text{Stab}(y) = 3\}$.

(ii) $\pi(Z_1) = \Delta \setminus \mathcal{V}$ и $Z_1 = \{y \in G^{ss} \mid \dim \text{Stab}(y) = 1\}$.

(iii) $\pi(Z_2) = \Delta \setminus \mathcal{V}$ и $Z_2 = \{y \in G^{ss} \mid \dim \text{Stab}(y) = 0\}$. При этом $SL(H)$ -орбита $O(y)$ произвольной точки $y \in Z_2$ не замкнута в G^{ss} , и ее замыкание $\overline{O(y)}$ в G^{ss} удовлетворяет условию

$$(37) \quad \overline{O(y)} \setminus O(y) \subset \overline{Z_1}.$$

Пусть $\sigma_0 : G_0 \rightarrow G$ – раздутие G вдоль подмногообразия Z_0, \tilde{Z}_1 – собственный прообраз Z_1 при σ_0 и $\sigma_1 : \tilde{G} \rightarrow G_0$ – раздутие G_0 вдоль \tilde{Z}_1 . Обозначим $\tilde{\sigma} = \sigma_0 \cdot \sigma_1, D_0 = \tilde{\sigma}^{-1}(Z_0), D_1 = \sigma_1^{-1}(\tilde{Z}_1)$ и рассмотрим в \tilde{G} открытое подмножество

$$(38) \quad \tilde{G}^* = \tilde{\sigma}^{-1}(G^{ss} \setminus Z_2).$$

Согласно Ф.Кирван [3], на \tilde{G} определено действие группы $SL(H)$, совпадающее на открытом подмножестве $\tilde{\sigma}^{-1}(G^s) \simeq G^s$ стабильных по Мамфорду точек с исходным действием группы $SL(H)$ на G^s и допускающее новую естественную линейаризацию. При этом из конструкции Кирван и предложения 4.1 непосредственно следует

Предложение 4.2. (i) \tilde{G}^* содержит открытое подмножество \tilde{G}^s стабильных по Мамфорду точек из \tilde{G} относительно новой линейаризации.

(ii) Раздутие $\tilde{\sigma}$ согласовано с раздутием $\sigma = \text{Bl}_{\mathcal{V}} : \widetilde{P(S^2V)} \rightarrow P(S^2V)$ пространства $P(S^2V) \simeq \mathbb{P}^5$ вдоль поверхности Веронезе \mathcal{V} , то есть определен морфизм

$$(39) \quad \tilde{\pi} : \tilde{G}^s \rightarrow \widetilde{P(S^2V)},$$

являющийся геометрическим GIT-фактором, который делает коммутативной диаграмму:

$$(40) \quad \begin{array}{ccc} \tilde{G}^s & \xrightarrow{\tilde{\sigma}} & G^{ss} \\ \tilde{\pi} \downarrow & & \downarrow \pi \\ \widetilde{P(S^2V)} & \xrightarrow{\sigma} & P(S^2V). \end{array}$$

(iii) Рассмотрим на $\widetilde{P(S^2V)}$ гладкие дивизоры $\Sigma = \sigma^{-1}(V)$ и $\tilde{\Delta} = \sigma^{-1}(\Delta)_{prop}$. Тогда

$$(41) \quad D_0^s := D_0 \cap \tilde{G}^s = \tilde{\pi}^{-1}(\Sigma), \quad D_1^s := D_1 \cap \tilde{G}^s = \tilde{\pi}^{-1}(\tilde{\Delta}).$$

Заметим, что в соответствии с конструкцией Кирван имеем:

$$(42) \quad \tilde{G}^s \cap \tilde{\sigma}^{-1}(Z_2) = \emptyset.$$

Действительно, нетрудно видеть с учетом (37), что замыкание в \tilde{G} $SL(H)$ -орбиты $O(y)$ произвольной точки $y \in \tilde{\sigma}^{-1}(Z_2) \simeq Z_2$ содержит точки из \tilde{G}^s , лежащие в $SL(H)$ -орбите отличной от y точки из \tilde{G}^s . Отсюда вытекает (42).

4.2. Семейство $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$ -пучков над модификацией F многообразия флагов $Fl(2, 3, H \otimes V)$.

Рассмотрим многообразие флагов $Fl_{2,3} = Fl(2, 3, H \otimes V) := \{(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^3) \in G \times Gr(3, H \otimes V) \mid \mathbb{C}^2 \subset \mathbb{C}^3\}$ с проекциями

$$(43) \quad G \xrightarrow{p_2} Fl_{2,3} \xrightarrow{p_3} Gr(3, H \otimes V)$$

и его модификацию

$$(44) \quad F = Fl_{2,3} \times_G \tilde{G}^s$$

с естественными проекциями $\tilde{G}^s \xrightarrow{\gamma} F \xrightarrow{\delta} Fl_{2,3}$. На F определены векторные расслоения

$$(45) \quad \mathbf{U} = \delta^* p_2^* U, \quad \mathbf{W} = \delta^* p_3^* W, \quad \mathbf{U} \hookrightarrow \mathbf{W} \hookrightarrow H \otimes V \otimes \mathcal{O}_F,$$

где W – тавтологическое расслоение ранга 3 на $Gr(3, H \otimes V)$. Применяя к тройке (21) функтор $(p_2 \delta \times id_{\mathbb{P}^2})^*$ и обозначая $\mathbf{E}_F = (p_2 \delta \times id_{\mathbb{P}^2})^* \mathbf{E}$, получаем точную тройку:

$$(46) \quad 0 \rightarrow \mathbf{U} \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1) \xrightarrow{j} H \otimes \mathcal{O}_F \boxtimes \Omega_{\mathbb{P}^2}(1) \rightarrow \mathbf{E}_F \rightarrow 0,$$

которая по построению включается в диаграмму:

$$(47) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & & & & 0 \\ & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & \mathbf{L} \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1) \\ & & & & & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathbf{U} \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1) & \longrightarrow & H \otimes \mathcal{O}_F \boxtimes \Omega_{\mathbb{P}^2}(1) & \longrightarrow & \mathbf{E}_F \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \parallel & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathbf{W} \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1) & \longrightarrow & H \otimes \mathcal{O}_F \boxtimes \Omega_{\mathbb{P}^2}(1) & \longrightarrow & \mathcal{I}_{Z, F \times \mathbb{P}^2} \otimes \mathcal{O}_F \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & & & \downarrow \\ & & \mathbf{L} \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1) & & & & 0 \\ & & \downarrow & & & & \\ & & 0, & & & & \end{array}$$

в которой $\mathbf{L} := \mathbf{W}/\mathbf{U}$ – обратимый пучок на F , а Z – подсхема коразмерности 2 в $F \times \mathbb{P}^2$. Ниже мы дадим более подробное описание схемы Z . Для этого рассмотрим в $Fl_{2,3}$ локально замкнутые подмножества

$$(48) \quad Y_0 = \{(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^3) \in Fl_{2,3} \mid Z_0 \ni P(\mathbb{C}^2) = P(\mathbb{C}^3) \cap X\},$$

$$(49) \quad Y_1 = \{(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^3) \in Fl_{2,3} \mid P(\mathbb{C}^2) \subset Z_1, \dim P(\mathbb{C}^3) \cap X = 0\}.$$

Нетрудно видеть, что

$$(50) \quad Y_0 \subset \overline{Y_1},$$

где $\overline{Y_1}$ – замыкание Y_1 в $Fl_{2,3}$.

Рассмотрим в \tilde{G}^s дивизоры D_0^s и D_1^s , определенные в (41), и их обратные образы

$$(51) \quad D_0 = \gamma^{-1}(D_0^s), \quad D_1 = \gamma^{-1}(D_1^s)$$

при проекции $\gamma : F \rightarrow \tilde{G}^s$. Из (31)-(33), (48)-(49), диаграммы (40) и равенств (41) имеем:

$$(52) \quad D_0 = \delta^{-1}(Y_0), \quad D_1 = \overline{\delta^{-1}(Y_1)}$$

(здесь замыкание берется в F).

Положим

$$(53) \quad D_0^* := D_0 \setminus (D_0 \cap D_1), \quad D_1^* := D_1 \setminus (D_0 \cap D_1), \quad F^* := F \setminus (D_0 \cup D_1).$$

По определению имеем:

$$(54) \quad F = F^* \sqcup D_0^* \sqcup D_1^* \sqcup (D_0 \cap D_1).$$

Возьмем произвольную точку $a \in F$ и рассмотрим ограничение на плоскость $\{a\} \times \mathbb{P}^2$ правой вертикальной тройки из диаграммы (47):

$$(55) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1) \rightarrow E_a \rightarrow \mathcal{I}_{Z_a, \mathbb{P}^2}(1) \rightarrow 0,$$

где

$$(56) \quad E_a := \mathbf{E}_F|\{a\} \times \mathbb{P}^2, \quad Z_a := \mathcal{Z} \cap (\{a\} \times \mathbb{P}^2),$$

и использовано стандартное отождествление $\{a\} \times \mathbb{P}^2 \simeq \mathbb{P}^2$. Из предложений 3.2 и 4.2 непосредственно следует, что

$$(57) \quad [E_a] = \varphi^{-1} \sigma \tilde{\pi} \gamma(a).$$

Кроме того, заметим, что точка a определяет флаг векторных подпространств $U_a \subset W_a \subset H \otimes V$, где $U_a := \mathbf{U}|\{a\}$, $W_a := \mathbf{W}|\{a\}$, то есть, что то же самое, флаг проективных подпространств

$$(58) \quad P(U_a) =: l_a \subset \mathbb{P}_a^2 := P(W_a) \subset P(H \otimes V).$$

В соответствии с (54) возможны следующие случаи: (I) $a \in F^*$, (II) $a \in D_0^*$, (III) $a \in D_1^*$ и (IV) $a \in D_0 \cap D_1$. Рассмотрим эти четыре случая.

Случай (I): $a \in F^*$. В этом случае, как нетрудно видеть,

$$(59) \quad Z_a = pr_V(\mathbb{P}_a^2 \cap X)$$

– нульмерная подсхема длины 3 в \mathbb{P}^2 , и в силу (57) и предложения 3.2(ii) E_a – локально свободный пучок:

$$(60) \quad [E_a] \in M_{\mathbb{P}^2}(2).$$

Случаи (II) и (IV): $a \in D_0$. В этом случае согласно (52) имеем $\delta(a) \in Y_0$, то есть $l_a = P(H \otimes \langle v \rangle) = pr_V^{-1}(x)$ для некоторой точки $x = \langle v \rangle \in \mathbb{P}^2$, так что имеем отождествление $U_a \simeq H$. Поэтому ограниченная на $\{a\} \times \mathbb{P}^2$ тройка (46) есть тензорно умноженная на H тройка $0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1) \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}^2}(1) \rightarrow \mathcal{I}_{x, \mathbb{P}^2} \rightarrow 0$, так что

$$(61) \quad E_a = H \otimes \mathcal{I}_{x, \mathbb{P}^2},$$

и тройка (55) принимает вид

$$(62) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1) \rightarrow H \otimes \mathcal{I}_{x, \mathbb{P}^2} \rightarrow \mathcal{I}_{Z_a, \mathbb{P}^2}(1) \rightarrow 0.$$

Эта тройка естественным образом продолжается до коммутативной диаграммы

$$(63) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & 0 & & 0 & \\ & & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1) & \longrightarrow & H \otimes \mathcal{I}_{x, \mathbb{P}^2} & \longrightarrow & \mathcal{I}_{Z_a, \mathbb{P}^2}(1) \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ \xi : 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1) & \longrightarrow & H \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} & \longrightarrow & \mathcal{I}_{x, \mathbb{P}^2}(1) \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & \mathbb{C}_x^2 & \xlongequal{\quad} & \mathbb{C}_x^2 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & 0 & & 0. \end{array}$$

Правая вертикальная тройка в этой диаграмме показывает, что

$$(64) \quad Z_a = x^{(1)}$$

– первая инфинитезимальная окрестность точки x в \mathbb{P}^2 .

Случай (III): $a \in D_1^*$. В этом случае в соответствии с (32), (49), (52) имеем $p_2\delta(a) \in Z_1'$, и, как и в случае (I), верно равенство (59), причем

$$(65) \quad Z_a = pr_V(\mathbb{P}_a^2 \cap X) \supset pr_V(l_a \cap X) = x_1 \sqcup x_2, \quad length(Z_a) = 3.$$

При этом ограничение тройки (46) на $\{a\} \times \mathbb{P}^2$ распадается в прямую сумму троек $0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1) \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}^2}(1) \rightarrow \mathcal{I}_{x_i, \mathbb{P}^2} \rightarrow 0$, $i = 1, 2$. В частности,

$$(66) \quad E_a = \mathcal{I}_{x_1, \mathbb{P}^2} \oplus \mathcal{I}_{x_2, \mathbb{P}^2}.$$

4.3. Два раздутия многообразия $F \times \mathbb{P}^2$. Семейство деревьев раздутий $X \rightarrow F$

На многообразии $\mathbf{X}_0 := F \times \mathbb{P}^2$ рассмотрим подсхему

$$(67) \quad B_0 = (\mathcal{Z} \cap (D_0 \times \mathbb{P}^2))_{red},$$

Из (64) непосредственно следует, что $pr_1|_{B_0} : B_0 \rightarrow D_0$ – изоморфизм, где $pr_1 : \mathbf{X}_0 \rightarrow F$ – естественная проекция. Тем самым, B_0 – гладкое подмногообразие коразмерности 3 в \mathbf{X}_0 :

$$(68) \quad \text{codim}_{\mathbf{X}_0} B_0 = 3.$$

Рассмотрим раздутие

$$(69) \quad \sigma_0 = \text{Bl}_{B_0} : \mathbf{X}' \rightarrow \mathbf{X}_0$$

многообразия \mathbf{X}_0 с центром в B_0 , и пусть

$$(70) \quad \mathcal{Z}_0 = (\sigma_0^{-1}(\mathcal{Z}))_{prop}$$

– собственный прообраз подсхемы \mathcal{Z} при раздутии σ_0 . Далее, рассмотрим в \mathcal{Z} локально замкнутое подмножество

$$(71) \quad B_1^* = \text{Sing}(\mathbf{E}_F) \cap ((F \setminus D_0) \times \mathbb{P}^2).$$

По построению имеем изоморфизм $\sigma_0^{-1}(B_1^*) \simeq B_1^*$, и пусть

$$(72) \quad B_1 = \sigma_0^{-1}(B_1^*), \quad \text{codim}_{\mathbf{X}'} B_1 = 3.$$

– замыкание $\sigma_0^{-1}(B_1^*)$ в \mathbf{X}' . По построению

$$(73) \quad B_1 \subset \mathcal{Z}_0,$$

и из (66) следует, что $pr_1\sigma_0|_{B_1} : B_1 \rightarrow D_1$ – двойное накрытие. При этом нетрудно проверить, что B_1 – гладкое подмногообразие в X' . Пусть

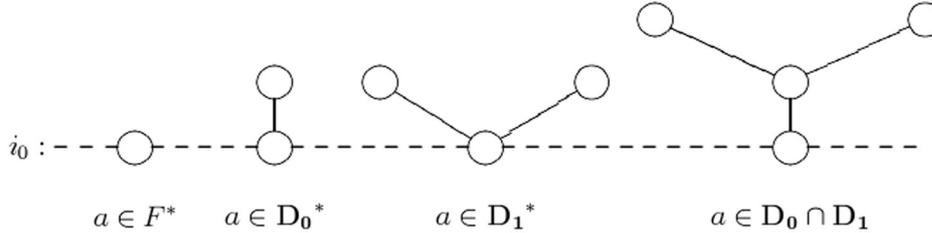
$$(74) \quad \sigma_1 = \text{Bl}_{B_1} : X \rightarrow X'$$

– раздутие X' с центром B_1 . Рассмотрим композицию

$$(75) \quad p : X \xrightarrow{\tilde{\sigma} := \sigma_0\sigma_1} X_0 \xrightarrow{pr_1} F.$$

Из (67)-(74) непосредственно вытекает

Предложение 4.3. $p : X \rightarrow F$ есть плоское семейство деревьев раздутий проективной плоскости \mathbb{P}^2 . Слои $S_a = p^{-1}(a)$, $a \in F$, суть деревья раздутий плоскости \mathbb{P}^2 с графами $T(S_a) \in \mathbf{T}_2$ вида:



4.4. Семейство расслоений на семействе деревьев раздутий $X \rightarrow F$.

В соответствии с (73) рассмотрим в Z_0 открытое подмножество $Z_0^* = Z_0 \setminus B_1$. По построению имеем изоморфизм $\sigma_1^{-1}(Z_0^*) \simeq Z_0^*$, и пусть

$$(76) \quad \tilde{Z} = \overline{\sigma_1^{-1}(Z_0^*)}.$$

– замыкание $\sigma_1^{-1}(Z_0^*)$ в X .

Далее, рассмотрим на X дивизоры

$$(77) \quad B_0 = (\sigma_0\sigma_1)^{-1}(B_0), \quad B_1 = \sigma_1^{-1}(B_1)$$

и введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} X_0^* &= X_0 \setminus (B_0 \cup B_1^*), & Z^* &= Z \cap X_0^*, & L &= \mathbf{L} \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1), & N &= \mathcal{O}_F \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1), \\ X^* &= X \setminus (B_0 \cup B_1), & \tilde{Z}^* &= \tilde{Z} \cap X^*, & \tilde{L} &= \tilde{\sigma}^*L, & \tilde{N} &= \tilde{\sigma}^*N. \end{aligned}$$

В этих обозначениях правая вертикальная тройка в диаграмме (47) записывается в виде:

$$(78) \quad 0 \rightarrow L \rightarrow \mathbf{E}_F \rightarrow \mathcal{I}_{Z, X_0} \otimes N \rightarrow 0.$$

Эта тройка как расширение определяет элемент

$$(79) \quad s_0 \in \text{Ext}^1(\mathcal{I}_{Z, X_0} \otimes N, L).$$

Так как codim_{Z, X_0} , то имеем изоморфизм пучков

$$(80) \quad \text{Hom}(\mathcal{I}_{Z, X_0} \otimes N, L) \simeq \text{Hom}(N, L) = N^* \otimes L = \mathbf{L} \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2).$$

Пользуясь заменой базы для проекции $pr_1 : X_0 \rightarrow F$ и обнулением когомологий пучка $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2)$, получаем равенства $R^i pr_{1*}(\mathbf{L} \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2)) = 0$, $i \geq 0$, поэтому спектральная последовательность Лере для проекции pr_1 дает $H^i(\mathbf{L} \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2)) = 0$, $i \geq 0$. Отсюда и из (80) и спектральной последовательности локальных и глобальных Ext-ов получаем изоморфизм

Далее, по построению имеем изоморфизмы

$$(83) \quad \tilde{\sigma} : X^* \xrightarrow{\sim} X_0^*, \quad \tilde{\sigma} : \tilde{Z}^* \xrightarrow{\sim} Z^*,$$

поэтому ограничение на X_0^* сечения s_0 можно рассматривать как сечение

$$(84) \quad s^* \in H^0(\tilde{A}|X^*), \quad \tilde{A} = \text{Ext}^1(\mathcal{I}_{\tilde{Z}, X} \otimes \tilde{N}, \tilde{L}).$$

Теперь из рассмотренного в пункте 4.2 ограничения расширения (78) на слои $\{a\} \times \mathbb{P}^2$ для всех возможных случаев (I)-(IV) (в частности, из формул (60), (61) и (66)) следует, что сечение s^* продолжается до нигде не обращающегося в нуль сечения s пучка $\tilde{\mathcal{A}}(2\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1)$:

$$(85) \quad s \in H^0(\tilde{\mathcal{A}}(2\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1)) = H^0(\mathcal{E}xt^1(\mathcal{I}_{\tilde{Z}, \mathbf{X}} \otimes \tilde{N}, \tilde{L}(2\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1))).$$

Нетрудно проверить, что это сечение s является образом некоторого элемента \tilde{s} группы $\text{Ext}^1(\mathcal{I}_{\tilde{Z}, \mathbf{X}} \otimes \tilde{N}, \tilde{L}(2\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1))$ при естественном гомоморфизме $\text{Ext}^1(\mathcal{I}_{\tilde{Z}, \mathbf{X}} \otimes \tilde{N}, \tilde{L}(2\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1)) \rightarrow H^0(\mathcal{E}xt^1(\mathcal{I}_{\tilde{Z}, \mathbf{X}} \otimes \tilde{N}, \tilde{L}(2\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1)))$. Этот элемент \tilde{s} определяет расширение

$$(86) \quad 0 \rightarrow \tilde{L}(2\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1) \rightarrow \tilde{\mathbf{E}} \rightarrow \mathcal{I}_{\tilde{Z}, \mathbf{X}} \otimes \tilde{N} \rightarrow 0.$$

Так как s нигде не обращается в нуль на \tilde{Z} , то из конструкции Серра (см. [7, глава 1]) следует, что пучок $\tilde{\mathbf{E}}$ на \mathbf{X} локально свободен. Более того, вводя для произвольной точки $a \in F$ обозначение

$$(87) \quad \tilde{E}_a = \tilde{\mathbf{E}}|_{\mathbf{p}^{-1}(a)},$$

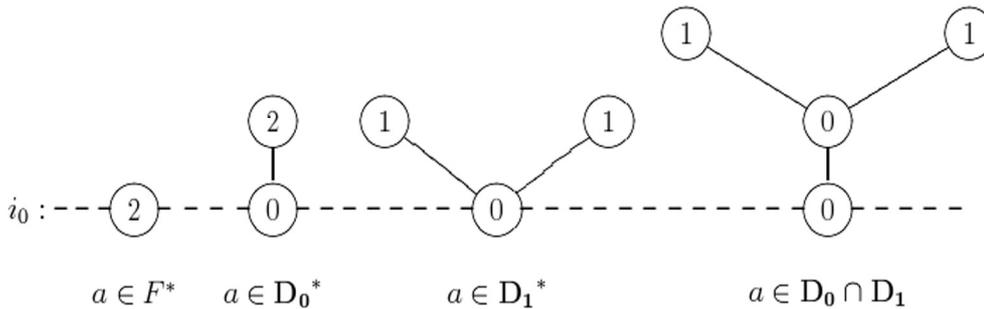
и рассматривая композицию $p : F \xrightarrow{\gamma} \tilde{G}^s \xrightarrow{\tilde{\pi}} \widetilde{P(S^2V)}$, по построению получаем, что для любой точки $x \in \widetilde{P(S^2V)}$ класс изоморфизма расслоения \tilde{E}_a принадлежит $M_2(\mathbb{P}^2)$ и не зависит от точки $a \in p^{-1}(x)$.

Собирая вместе все предыдущие конструкции и результаты, с учетом предложения 4.3 получаем следующую теорему.

Теорема 4.4. 1) Для всех $a \in F$ имеем

$$(88) \quad [\tilde{E}_a] \in M_2(\mathbb{P}^2).$$

Более того, расслоению \tilde{E}_a на дереве $S_a = \mathbf{p}^{-1}(a)$, $a \in F$, раздутий плоскости \mathbb{P}^2 соответствует взвешенный граф $\tilde{T}(S_a, \tilde{E}_a) \in \mathbf{T}_2$ вида:



2) Для любой точки $x \in \widetilde{P(S^2V)}$ точка $[\tilde{E}_a] \in M_2(\mathbb{P}^2)$ не зависит от точки $a \in p^{-1}(x)$. Тем самым, определено отображение $\psi : \widetilde{P(S^2V)} \rightarrow M_2(\mathbb{P}^2) : x \mapsto [\tilde{E}_a]$, $a \in p^{-1}(x)$.

3) Отображение $\psi : \widetilde{P(S^2V)} \rightarrow M_2(\mathbb{P}^2)$ – биекция. Другими словами, семейство $M_2(\mathbb{P}^2)$ классов изоморфизма стабильных расслоений ранга 2 с $c_1 = 0$, $c_2 = 2$ на деревьях раздутий проективной плоскости \mathbb{P}^2 ограничено и биективно многообразию $\widetilde{P(S^2V)}$.

Следствие 4.5. Если $M_2(\mathbb{P}^2)$ имеет структуру схемы такой, что ψ – морфизм, то нормализация схемы $M_2(\mathbb{P}^2)$ изоморфна раздутию пространства $\widetilde{P(S^2V)} \simeq \mathbb{P}^5$ вдоль поверхности Веронезе \mathcal{V} .