A.D. Novikov

ABOUT TOOLKIT AND A TECHNIQUE OF RESEARCH OF FUNCTIONS ON DECREASE AND INCREASE

As a result of the analysis of the approach existing now to research of functions on decrease and increase, in given article the conclusion about presence ineradicable within the limits of this approach of contradictions is done. As the alternative approach the author offers the new concept, toolkit and the scheme of research of functions on decrease and the increase, meeting the requirements of consistency and completeness of the theory. The new approach we shall apply as in high school rates of the mathematical analysis and higher mathematics, and in a average school rate of mathematics.

Keywords: decrease of function, increase of function, research of function, a technique of teaching of mathematics.

В современных учебниках по математическому анализу и в другой учебно-методической литературе под основной задачей исследования функций на возрастание и убывание понимается определение множеств, на которых рассматриваемая функция соответственно возрастает и убывает. В школьном курсе алгебры и начал математического анализа (см., например [4]) под этими множествами понимаются промежутки убывания и возрастания функций. В вузовских курсах математического анализа и высшей математики кроме промежутков убывания и возрастания функций находят также отдельные точки возрастания и убывания функции. Заметим, что в средней школе в конце 80-х годов прошлого столетия эти понятия были вообще изъяты из учебников по алгебре и началам анализа. Это привело к невозможности полноценного исследования функций на возрастание и убывание в школе и вызвало серьёзную озабоченность и вопросы учителей средней школы и преподавателей вузов.

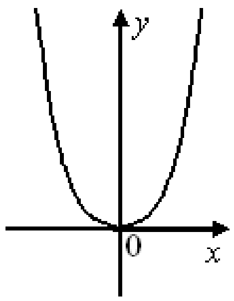

Рис. 1

В статье [1] А.Я. Блох, отвечая на вопрос учителей о включении или нет точек экстремума в промежутки возрастания (убывания) функции, пишет " … одна и та же экстремальная точка принадлежит сразу двум множествам: одному из промежутков возрастания и одному из промежутков убывания функции". И далее автор приводит пример исследования на монотонность функции $y = x^2$ (см. рис. 1). По его мнению, совпадающему с точкой зрения авторов современных школьных учебников по алгебре и началам математического анализа (например, [4]), исследование функций на монотонность сводится к нахождению их промежутков убывания и возрастания. Поэтому данная функция, как он считает, убывает на полуинтервале $(-\infty; 0]$ и возрастает на полуинтервале $[0; +\infty)$.

Отнесёмся к этому выводу критически и проследим метод получения такого результата. Первая часть утверждения получена в результате применения определения функции, убывающей на множестве к функции $y = x^2$ с областью определения $(-\infty; 0]$, а вторая – в результате применения определения возрастающей на множестве функции к функции $y = x^2$ и областью определения $[0; +\infty)$. Спрашивается, а где же исследование заявленной функции $y = x^2$ с областью определения $(-\infty, +\infty)$? Его просто нет. Ведь в ходе такого «исследования» потерян сам его объект – исследуемая функция. Дело в том, что исследованием двух отличных от заявленной функций нельзя заменить исследования данной функции, поскольку все три функции задаются одинаковой формулой, но имеют различные области определения. Если же определения монотонных на множестве функций применить к функции $y = x^2$ с областью определения $(-\infty, +\infty)$, то единственный результат, который может быть получен на основе этих определений, таков: функция $y = x^2$ с областью определения $(-\infty, +\infty)$ не является монотонной. Другими словами, исследуемая на возрастание и убывание функция $y = x^2$ с $D(y) = (-\infty, +\infty)$ так и осталась неисследованной. Аналогичная ситуация складывается и при исследовании любой другой функции, имеющей как точки возрастания, так и точки убывания. Это означает, что такие функции остаются фактически не исследованными. Причина этого заключается, прежде всего, в некорректности концепции подхода к исследованию, а именно, в разбиении области определения исследуемой функции на промежутки с последующим исследованием получившейся совокупности функций. Кроме того, как будет показано ниже, выбор инструментария исследования (определения монотонных функций и точек убывания и возрастания функции) неадекватен поставленной задаче.

В самом деле, считая, что основной задачей исследования функций на возрастание (убывание) определение её промежутков возрастания и убывания, мы одновременно отказываемся от исследования исходной функции, так как неизбежно подменяем её совокупностью других функций, задаваемых той же формулой, но имеющих другие области определения. Уже этого факта достаточно для того, чтобы отказаться от столь противоречивого подхода. Кроме того, пользуясь определениями возрастающей и убывающей на множестве функции, можно лишь выяснить, является ли исследуемая функция возрастающей или убывающей, и не более того, что следует из самой сути этих определений.

Сказанное выше подтверждает также исследование на возрастание и убывание дифференцируемых функций. Например, функция $y = \dfrac{1}{x}$ имеет производную $y' = -\dfrac{1}{x^2} < 0$ на всей области определения данной функции $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Следовательно, эта область D и является областью её убывания, понимаемой как множества точек, в каждой из которых данная функция убывает. И в то же время функция $y = \dfrac{1}{x}$ с $D(y) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ не является убывающей, так как не удовлетворяет соответствующему определению убывающей функции. Итак, говорить, что эта функция является убывающей на промежутках $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$, бессмысленно, поскольку тогда на самом деле речь пойдёт уже о двух других функциях $y = \dfrac{1}{x}$ с областью определения $D = (-\infty, 0)$ и $y = \dfrac{1}{x}$ с областью определения $(0, +\infty)$.

Следующий пример показывает, что современный выпускник средней школы оказывается не в состоянии правильно исследовать на убывание и возрастание даже следующую довольно простую функцию

$$y = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, \ x \neq 0, \\ 0, \ x = 0. \end{cases}$$

В самом деле, старшеклассники в качестве результата исследования этой функции напишут, что она убывает на промежутках $(-\infty. 0)$ и $(0, +\infty)$. При этом точку области определения функции $x = 0$ (точка возрастания) они никак не классифицируют, поскольку не знакомы с понятиями точек убывания и возрастания функции. Как было сказано выше, эти понятия без всяких объяснений в конце 80-х годов прошлого века были изъяты из школьных учебников математики.

И лишь студенты вузов, изучающие полные курсы математического анализа, смогут классифицировать эту точку.

Опираясь на изложенное выше, приходим к выводу, что используемые ныне инструментарий и постановка основной задачи исследования функций на возрастание и убывание неадекватны цели исследования, поскольку попытка искать «промежутки возрастания и убывания функции» автоматически приводит к потере объекта исследования.

Поэтому мы предлагаем исследовать функции на возрастание и убывание, пользуясь другой, непротиворечивой системы определений, в которой основной задачей такого исследования является нахождение областей возрастания и убывания функций [5-7].

Определение 1. Областью возрастания (убывания) функции называется множество точек возрастания (убывания) этой функции.

Определения точек возрастания и убывания функций приведены в [2. С. 224] и [3. С. 175] и используют понятие δ-окрестности точки. Однако в силу симметрии δ-окрестности относительно исследуемой точки x_0 в случае дискретных функций с её помощью далеко не всегда можно найти все точки возрастания (убывания) функции, что показывает следующий пример.

Пример. Выяснить, является ли точка $x=1$ точкой возрастания функции $f(x)=x^2$ с областью определения $D(f)=\{-3;\,-2;\,-1;\,0;\,1;\,3\}$. Найти области возрастания и убывания данной функции.

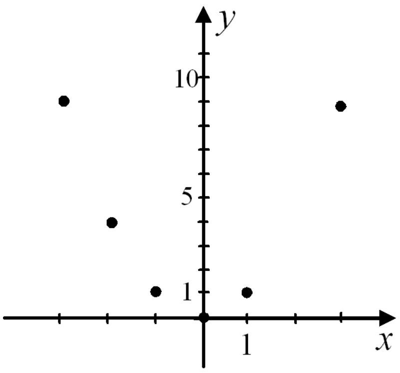

Рис. 2

В этом примере (см. график на Рис. 2) определение точки возрастания функции на основе понятия δ-окрестности точки не позволяет классифицировать точку $x=1$ как точку возрастания данной функции, поскольку не существует такой δ-окрестности этой точки, в которой $f(x_1)<f(x)<f(x_2)$, где $x_1\in(1-\delta;\,1)$ и $x_2\in(1;\,1+\delta)$. В то же время, как видно, например, из графика данной функции, точка $x=1$ есть точка возрастания заданной функции.

Рассмотренный пример позволяет сделать вывод, что определения точек возрастания и убывания функций, базирующиеся на понятии δ-окрестности, позволяют находить эти точки только при исследовании непрерывных функций. Если же обобщить эти определения, заменив в них понятие δ-окрестности на понятие окрестности, которая может быть и несимметричной относительно исследуемой точки, то точка $x=1$ в рассмотренном выше примере будет классифицирована как точка возрастания функции. Сформулируем обобщённые определения точек возрастания и убывания функции.

Определение 2. Функция $y=f(x)$ называется возрастающей в точке x_0, если существует такая окрестность точки x_0 $(x_0-\delta_1,\,x_0+\delta_2)$, в которой $f(x)<f(x_0)$ при $x<x_0$, $x\in D(f)$ и $f(x)>f(x_0)$ при $x>x_0$, $x\in D(f)$.

Определение 3. Функция $y=f(x)$ называется убывающей в точке x_0, если существует такая окрестность точки x_0 $(x_0-\delta_1,\,x_0+\delta_2)$, в которой $f(x)>f(x_0)$ при $x<x_0$, $x\in D(f)$ и $f(x)<f(x_0)$ при $x>x_0$, $x\in D(f)$.

В соответствии с этими определениями точка минимума функции $x=0$ в примере не может быть включена ни в область возрастания, ни в область убывания исследуемой функции. Аналогичное заключение, очевидно, будет иметь место и для точек экстремума любых других функций.

Исследуем далее точки $x=-3$ и $x=3$ из предыдущего примера. Ясно, что поскольку функция не определена слева от точки $x=-3$ и справа от точки $x=3$, то определения 2 и 3 для этих точек не применимы. Поэтому для их классификации потребуются ещё два определения.

Определение 4. Функция $y=f(x)$ называется убывающей в точке x_0 справа, если существует такая правосторонняя окрестность точки x_0 $(x_0,\, x_0+\delta)$, в которой $f(x)<f(x_0)$ при $x>x_0$, $x\in D(f)$.

Определение 5. Функция $y=f(x)$ называется возрастающей в точке x_0 слева, если существует такая левосторонняя окрестность точки x_0 $(x_0-\delta,\, x_0)$, в которой $f(x)<f(x_0)$ при $x<x_0$, $x\in D(f)$.

Применяя определения 4 и 5 соответственно к точкам $x=-3$ и $x=3$, приходим к выводу, что в точке $x=-3$ исследуемая функция убывает справа, а в точке $x=3$ – возрастает слева. Следовательно, областью убывания функции из предыдущего примера является множество $D\chi$ $=\{-3,\,-2,-1\}$, а областью возрастания – $D\uparrow=\{1,\,3\}$. Заметим, что практикуемый ныне в средней и высшей школе подход к исследованию функций, подобных той, что приведена в только что рассмотренном примере, вообще не применим (средняя школа) либо приводит, как было показано выше, к абсурдным результатам (высшая школа).

В то же время ясно, что при первоначальном введении функциональной зависимости и изучении свойств функций в 7 классе средней школы сразу же вводить такое далеко не самое простое понятие, как понятие окрестности точки, привело бы к серьёзным методическим трудностям. Это понятие разумнее было бы ввести при последующем изучении функций в 8-м и 9-м классе. И это возможно, если в 7-м классе при изучении функций, заданных на множествах изолированных точек, заменить определения 2-4 на эквивалентные им определения, в которых используются гораздо более простые для усвоения понятия – понятия предшествующей и последующей точек дискретного множества.

Определение 2′. Точка x_i называется точкой возрастания функции $y=f(x)$, если выполняется неравенство $f(x_{i-1})<f(x_i)<f(x_{i+1})$, т.е. если значение функции в данной точке больше значения функции в предшествующей точке, но меньше значения функции в последующей точке.

Определение 3′. Точка x_i называется точкой убывания функции $y=f(x)$, если выполняется неравенство $f(x_{i-1})>f(x_i)>f(x_{i+1})$, т.е. если значение функции в данной точке меньше значения функции в предшествующей точке, но больше значения функции в последующей точке.

Определение 4′. Точка $a=x_1$ называется точкой возрастания (убывания) справа функции $y=f(x)$, если выполняется неравенство $f(x_1)<f(x_2)$ ($f(x_1)>f(x_2)$), т.е. если значение функции на левой границе её области определения меньше (больше) значения функции в последующей точке.

Определение 5′. Точка $b=x_n$ называется точкой возрастания (убывания) слева функции $y=f(x)$, если выполняется неравенство $f(x_u)>f(x_{n-1})$ ($f(x_n)<f(x_{n-1})$), т.е. если зна-

чение функции на правой границе её области определения больше (меньше) значения функции в предыдущей точке.

Заметим, что определения 4, 5, 4′, 5′ можно использовать при исследовании функций на возрастание и убывание, лишь применяя их к наименьшему и наибольшему значениям независимой переменной из области определения функции. Так, например, для функции $y = x^2$ с $D(y) = (-\infty, +\infty)$ определения 4, 5 не применимы для точки $x_0 = 0$, поскольку данная функция определена как слева, так и справа от этой точки.

Остановимся далее на выявлении точек, в которых функция нестрого убывает или возрастает. Для этого достаточно воспользоваться системой определений, аналогичной системе определений 2-5.

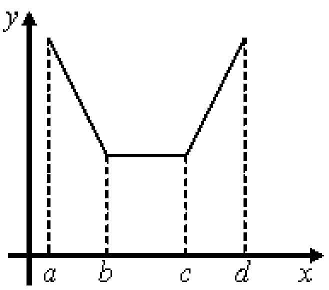

Рис. 3

Рассмотрим пример исследования такой функции, график которой изображён на рис. 3, имеет область нестрогого убывания D э = $[a, c]$ и область нестрогого возрастания D & = $[b, d]$. Отсюда видно, что отрезок, параллельный оси (x), входит как в область нестрогого убывания функции, так и в область нестрогого её возрастания, т.е. не классифицируется. Поэтому разумно ввести понятие области постоянства функции D_-.

***Определение** 7*. Областью постоянства функции называется множество точек функции, для каждой из которых существует такая хотя бы односторонняя её окрестность, в каждой точке которой из области определения функции функция принимает одинаковые значения.

Определения 2-7 вместе с определениями точек экстремумов позволяют при исследовании функции на возрастание и убывание разбить все точки её области определения на непересекающиеся классы точек: область убывания, область возрастания, область постоянства, точки минимума и точки максимума. Таким образом, предлагаемый нами подход к исследованию функций на возрастание и убывание представляет собой не только полноценный, но и, скорее всего, безальтернативный метод, позволяющий классифицировать все точки области определения исследуемой функции.

Используя определения 2-5 (строгого возрастания и убывания функции) и определение 7, нетрудно получить следующие результаты исследования функции, график которой изображён на рис. 3: область убывания $D_{\chi} = [a, b)$, область постоянства $D_- = [b, c]$, область возрастания $D_{\bar{=}} (c, d]$. Определения точек нестрого возрастания и убывания функции, как видно из приведённого примера, становятся излишними.

Заметим также, что при определении области убывания (возрастания) функции в качестве инструмента классификации необходимо пользоваться двусторонней окрестностью исследуемой точки. И только при классификации точек, соответствующих наименьшему и наибольшему значениям аргумента (если они существуют), нужно пользоваться односторонними окрестностями этих точек. В качестве универсального инструмента выявления точек постоянства функции следует пользоваться замкнутыми окрестностями исследуемых точек.

В ходе дальнейшего изучения свойств функций важно обратить внимание на необходимость уточнения терминологии при исследовании функций на непрерывность и с помощью производных. А именно:

- при исследовании функций на непрерывность вместо термина «промежутки непрерывности» следует пользоваться термином «область непрерывности»;
- при вычислении производной функций действительной переменной вместо терминов «промежутки дифференцируемости» функции следует пользоваться термином «область дифференцируемости» функции;

- при исследовании функций действительной переменной на выпуклость (вогнутость) вместо терминов «промежутки выпуклости функции» и «промежутки вогнутости функции» правильно использовать термины «область выпуклости функции» и «область вогнутости функции».

Библиографический список

1. Блох, А.Я. Возрастание функции в точке и на множестве [Текст] // Математика в школе. – 1978. – № 6. – С. 21-23.
2. Ильин, В.А., Садовничий, В.А., Сендов, Бл.Х. Математический анализ. Начальный курс: в 3-х т. Т. 1. – М.: Изд-во МГУ, 1985. – 425 с.
3. Райков Д.А. Одномерный математический анализ: учеб. пособие. – М.: Высш. школа, 1982. – 415 с.
4. Алгебра и начала анализа: учеб. для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений / А.Н. Колмогоров, А.М. Абрамов, Ю.П. Дудницын и др.; под ред. А.Н. Колмогорова. – 14-е изд. – М.: Просвещение, 2004. – 384 с.
5. Новиков, А.Д. Новый подход к исследованию функций на возрастание и убывание в вузе и школе // Наука и школа. – 2008. – № 1. – С. 23-26.
6. Новиков, А.Д. О корректном введении определения возрастающей (убывающей) на множестве функции // Высшее образование сегодня. – 2008. – № 2. – С. 70-72.
7. Новиков, А.Д. Возрастание и убывание функций на дискретных множествах // Высшее образование сегодня. – 2008. – 96, № 12. – С. 83-85.