МАТЕМАТИКА

УДК 512.7

С.А. Тихомиров

О размерностях семейств стабильных векторных расслоений ранга 2 на пространстве P^3 с классами Черна $c_1 = 0$ и $c_2 = n \geq 7$, имеющих спектр $(-1,0^{n-2},1)$

В данной статье мы приводим доказательство одного результата для специальных классов стабильных расслоений ранга 2 на P^3.

Ключевые слова: векторное расслоение, стабильное расслоение, классы Черна, монада.

S.A. Tikhomirov

On Dimensions of Families of Rank-2 Stable Vector Bundles on P^3 with Chern Classes $c_1 = 0$ and $c_2 = n \geq 7$ Having a Spectrum $(-1,0^{n-2},1)$

In this article we give the proof of one result for special classes of rank-2 stable bundles on P^3.

Key words: vector bundle, stable bundle, Chern classes, monad.

В работе доказывается общий результат, касающийся специальных классов расслоений E_2 второго ранга на трехмерном проективном пространстве, имеющих нулевой первый класс Черна, второй класс $n \geq 7$, а также имеющих спектр (-1,0^{n-2},1), где символом 0^{n-2} обозначается набор нулей в количестве $n-2$ штук.

Как показано в статьях [1], [2] и [5], указанные расслоения могут являться когомологическими пучками монад двух или более видов, поэтому нас будут интересовать расслоения, соответствующие монадам вида

$$0 \to (n-4)O_{P^3}(-1) \oplus O_{P^3}(-2) \to (2n-4)O_{P^3} \to$$
$$\to O_{P^{\#}}(2) \oplus (n-4)O_{P^3}(1) \to 0(*)$$

Действительно, монада (*) задает на P^3 расслоение ранга $2n-4-(n-4+1)-(n-4+1) =$ $= 2$ и многочленом Черна

$$\frac{1}{(1-2t)(1+2t)(1-t)^{n-4}(1+t)^{n-4}}$$
$$= \frac{1}{(1-4t^2)(1-t^2)^{n-4}} = (1+4t^2)$$
$$(1++t^2)^{n-4} = (1+4t^2)(1+(n-4)t^2) = 1+nt^2.$$

Члены степени ≥ 4 мы везде опускаем в силу их очевидного зануления по свойствам классов Черна. Поскольку определение спектра в работе [3] вводилось для стабильных расслоений, то нам остается проверить, что монада (*) задает расслоение со спектром $\chi =$ (-1,0^{n-2},1). Основной смысл спектра χ заключается, согласно [3], в соблюдении равенств $H^1(E_2(-1-i) = H^0(K(-i)), \forall i \geq 0,$ где $K = \oplus_{k \in \chi} O_{P^1}(k).$ В нашем случае $K = O_{P^1}(-1) \oplus (n-2)O_{P^1} \oplus O_{P^1}(1)$, тем самым $H^0(K) = n,$ $H^0(K(-1)) = 1,$ $H^0(K(-2-j) = 0, \forall j \geq 0.$ Следовательно, нам необходимо убедиться в справедливости соотношений $H^1(E_2(-1)) = n,$ $H^1(E_2(-2)) = 1,$ $H^1(E_2(-2-$ $-j)) = 0$, $\forall j \geq 0,$ исходя из монады (*). Дисплей монады (*) имеет вид (см., например, [4]):

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
0 \to (n-4)O_{P^3}(-1) \oplus O_{P^3}(-2) & \to & K & \to & E_2 \to 0 \\
\cong\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 \to (n-4)O_{P^3}(-1) \oplus O_{P^3}(-2) & \to & (2n-4)O_{P^3} & \to & Q \to 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & (n-4)O_{P^3}(1) \oplus O_{P^2}(2) & = & (n-4)O_{P^3}(1) \oplus O_{P^2}(2). \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0
\end{array}
$$

Тензорно умножая его подходящим образом, легко получаем требуемое.

Имеет место следующая

Теорема. *Семейства стабильных векторных расслоений ранга 2 на пространстве* P^3 *с классами Черна* $c_1 = 0$ *и* $c_2 = n \geq 7$*, имеющие спектр* $(-1, 0^{n-2}, 1)$ *и являющиеся когомологическими пучками монад (*), имеют «правильную» размерность 8n-3 и могут, тем самым, образовывать компоненты в соответствующих пространствах модулей.*

Доказательство. При подсчете размерностей μ таких семейств справедлива известная формула Барта, предъявленная в статье [2]:

$$\mu = \dim Hom_{O_{P^3}}(B, C) - h^0(\Lambda^2 C) -$$

$$\dim GL(C) - h^0(S^2 B),$$

где B – средний член, а C – правый член монады. Вычислим отдельно каждое слагаемое.

1) h=dim

$$Hom_{O_{P^3}}((2n-4)O_{P^3}, O_{P^3}(2) \oplus (n-4)O_{P^3}(1)) = h^0((2n-4)O_{P^\#}(2) \oplus (2n-4)(n-$$

$$-4)O_{P^3}(1)) = (2n-4)10 + (2n-4)(n-4)4 = 20n - 40 + 8n^2 - 32n - 16n + 64 = 8n^2 - 28n + 24;$$

2) $\lambda = h^0(\Lambda^2(O_{P^3}(2) \oplus (n-4)O_{P^3}(1))) = h^0(\begin{pmatrix} n-4 \\ 2 \end{pmatrix} O_{P^3}(2) \oplus (n-4)O_{P^\#}(3)) = 5(n-5)(n-4) +$

$$+20(n-4) = 5n^2 - 45n + 100 + 20n - 80 = 5n^2 - 25n + 20;$$

3) $g = \dim GL(C) = \dim Hom_{O_{P^3}}(O_{P^3}(2) \oplus (n-4)O_{P^3}(1), O_{P^3}(2) \oplus (n-4)O_{P^3}(1)) = h^0(O_{P^\#} \oplus$

$\oplus (n-4)O_{P^3}(-1) \oplus (n-4)O_{P^3}(1) + (n-4)^2 O_{P^3}) = 1 + 4(n-4) + (n-4)^2 = 1 + 4n - 16 + n^2 - 8n +$

$+16 = n^2 - 4n + 1;$

4) s= $h^0(S^2((2n-4)O_{P^\#})) = h^0(\begin{pmatrix} 2n-3 \\ 2 \end{pmatrix} O_{P^3}) = \dfrac{(2n-3)(2n-4)}{2} = (2n-3)(n-2) = 2n^2 - 7n + 6.$

Таким образом, размерности наших семейств равны $\mu = h - \lambda - g - s = 8n^2 - 28n + 24 -$

$-(5n^2 - 25n + 20) - (n^2 - 4n + 1) - (2n^2 - 7n + 6) = 8n - 3.$

Теорема доказана.

Библиографический список

1. Hartshorne R., Rao A.P. Spectra and monads of stable bundles, J. Math. Kyoto Univ., **31**, № 3 (1991), 789-806.
2. Barth W. Some experimental data. In: les equations de Yang-Mills. A.Douady, J.-L.Verdier, eds, seminaire E.N.S. 1977-1978, Asterisque, **71-72** (1980), 205-218.
3. Barth W., Elencwajg G. Concernant la cohomologie des fibres algebriques sur P_n, Springer Lecture Notes, 683 (1978), 1-24.
4. Оконек, К., Шнайдер, М., Шпиндлер, Х. Векторные расслоения на комплексных проективных пространствах [Текст].– , М.:Мир,1984.
5. Тихомиров, С.А. Метод двойных расширений в исследовании стабильных расслоений на P^3 [Текст] // Труды шестых Колмогоровских чтений, – Ярославль: ЯГПУ, 2008.– С. 174-183.