

МАТЕМАТИКА

УДК

В.Н. Осташков

Аттрактор векторного поля с тремя неподвижными точками

В статье рассматриваются некоторые классы диссипативных систем типа систем Лоренца, связанных с задачей вращения вокруг неподвижных точек. Полученные с помощью численных методов решения иллюстрируются и анализируются методом компьютерного моделирования.

Ключевые слова: диссипативные системы, численные методы, компьютерное моделирование, странный аттрактор, фрактальные структуры.

В.Н. Осташков

Аттрактор векторного поля с тремя неподвижными точками

В статье рассматриваются некоторые классы диссипативных систем типа систем Лоренца, связанных с задачей вращения вокруг неподвижных точек. Полученные с помощью численных методов решения иллюстрируются и анализируются методом компьютерного моделирования.

Ключевые слова: диссипативные системы, численные методы, компьютерное моделирование, странный аттрактор, фрактальные структуры.

Задачи вращения твердого тела вокруг неподвижной точки в вязкой среде связаны с диссипативными системами, которые являются в общем случае неинтегрируемыми и остаются мало исследованными. В простейшем случае, когда вращение тела с простой геометрией происходит с малыми угловыми скоростями (исключаются вихри) при отсутствии внешних сил, динамика тела описывается уравнением [1]:

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \mathbf{AM} + \mathbf{BM}, \quad (*)$$

где \mathbf{M} — вектор кинетического момента в системе координат, связанной с телом, $\mathbf{A} = \mathbf{I}^{-1} = \text{diag}(a_1, a_2, a_3)$, где \mathbf{I} — тензор инерции, \mathbf{B} — постоянная матрица. К системам типа (*) относится, например, система Лоренца [1]. Мы рассмотрим систему такого типа, обладающую рядом особенностей, не встречающихся в литературе.

1. Постановка задачи. Найдем векторное поле \mathbf{F} в 3-мерном пространстве \mathbf{R}^3 , определяемое уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_1(x, y, z), & \dot{y} &= f_2(x, y, z), \\ \dot{z} &= f_3(x, y, z) \end{aligned} \quad (1)$$

и удовлетворяющее условиям:

$$(2) \text{div } \mathbf{F} < 0,$$

(3) \mathbf{F} имеет 3 стационарные точки,

(4) \mathbf{F} имеет странный аттрактор с тремя полюсами.

2. Пример. Система Лоренца

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\sigma x + \sigma y, & \dot{y} &= rx - y + xz, \\ \dot{z} &= -bz + xy \end{aligned} \quad (5)$$

удовлетворяет (при определенных значениях констант σ, r, b) условиям (2) и (3), однако (4) не выполняется, так как фазовые кривые векторного поля (5) притягиваются множеством, которое называется *аттрактором Лоренца* [1] и является *двухполюсным*. Последнее означает, что фазовая траектория системы (5) в зависимости от начальных условий с течением времени попеременно попадает в одну из двух конкурирующих зон, расположенных вблизи соответствующих

стационарных точек O_2 и O_3 , переходя бесконечно много раз из одной зоны в другую случайным образом. Стационарные точки являются нулями многочленов

$$Q_1 = rx - y + xz, \quad Q_2 = -bz + xy, \\ L = -x + y.$$

Причем квадрики Q_1 и Q_2 пересекаются по кривой γ с параметрическими уравнениями

$$x = t, \quad y = \frac{brt}{b-t^2}, \quad z = \frac{rt^2}{b-t^2}. \quad (6)$$

Из (6) следует, что с произвольной плоскостью $Ax + By + Cz + D = 0$ кривая γ пересекается в точках, отвечающих корням кубического уравнения

$$At(b-t^2) + Bbrt + Crt^2 + D(b-t^2) = 0,$$

а с плоскостью L — в точках, определяемых уравнением $t^3 - b(1-r)t = 0$. Таким образом, система (5) порождается двумя квадриками Q_1 , Q_2 и плоскостью L .

3. Построение векторного поля. Прежде всего, в качестве квадрик возьмем пару квадрик: гиперболический параболоид $Q_1 = x - yz$ и гиперболический цилиндр $Q_2 = xz - 1$. Их пересечение — нормкривая c^3 степени 3 — определяется параметрическими уравнениями:

$$x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^{-1}. \quad (7)$$

В качестве третьей поверхности возьмем плоскость, проходящую через 3 заданные точки $M_i(t_i) \in c^3$, $i = 1..3$. Легко показать, что эта плоскость — множество нулей линейной функции

$$L = \sigma_1 x - y + \sigma_3 z - \sigma_2, \quad (8)$$

где

$$\sigma_1 = t_1 + t_2 + t_3, \quad \sigma_2 = t_2 t_3 + t_3 t_1 + t_1 t_2, \quad \sigma_3 = t_1 t_2 t_3 \quad (9)$$

— симметрические функции.

Теперь мы можем записать систему дифференциальных уравнений с тремя стационарными точками $M_i(t_i)$, $i = 1..3$:

$$\dot{x} = p(x - yz), \\ \dot{y} = q(xz - 1), \quad (10)$$

$$\dot{z} = r(\sigma_1 x - y + \sigma_3 z - \sigma_2),$$

где p, q, r положительные постоянные.

Дивергенция

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} = p + r\sigma_3$$

системы (9) будет отрицательной, а сама система — диссипативной, если $\sigma_3 < -\frac{p}{r}$. Это возможно в случае, когда среди чисел t_1, t_2, t_3 имеется нечетное количество отрицательных.

4. Линеаризация. Чтобы выявить вид неустойчивости стационарных точек M_i , найдем

матрицу $\mathbf{A} = \left(\frac{\partial(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})}{\partial(x, y, z)} \right)$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} p & -z & -y \\ qz & 0 & qx \\ r\sigma_1 & -1 & \sigma_3 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Для того чтобы стационарная точка была устойчивой, необходимо, согласно теореме Ляпунова, чтобы корни $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ характеристического уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$ удовлетворяли условиям $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$.

5. Пример. Рассмотрим конкретную систему, положив в (9) и (10) $t_1 = -1, t_2 = 0.7, t_3 = 5, p = q = 1, r = 0.5$. Тогда находим:

$\sigma_1 = 4.7, \sigma_2 = -2.2, \sigma_3 = -3.5$ — значения симметрических функций;

$\operatorname{div} \mathbf{F} = -3/4$ — дивергенция;

$O_1 = (-1, 1, -1), O_2 = (0.7, 0.49, 10/7),$

$O_3 = (5, 25, 0.2)$ — стационарные точки (7);

$\lambda_1 = -1.764565, \lambda_{2,3} = 0.5072823 \pm b_1 i$

— характеристические корни в O_1 ;

$\lambda_1 = -1.624794, \lambda_{2,3} = 0.437397 \pm b_2 i$

— характеристические корни в O_2 ;

$\lambda_1 = 0.04329681, \lambda_{2,3} = -0.3966484 \pm b_3 i$

— характеристические корни в O_3 .

6. Инвариантные многообразия. Так как условия теоремы Ляпунова не выполняются, то все стационарные точки являются неустойчивыми. И хотя мы получили три стационарные точки одного типа — типа седло–фокус,— следует заметить, что поведения фазовых траекторий в линейных окрестностях у этих точек существенно различны: фазовые кривые в окрестности точек O_1, O_2 ведут себя подобно фазовым кривым системы Лоренца в окрестности аналогичных стационарных точек, а в окрестности O_3 — принципиально иначе. Точнее говоря, одномерное инвариантное многообразие $\gamma_i, i \in \{1; 2\}$, в точке O_i является отталкивающим, а двумерное инвариантное многообразие B_i — притягивающим; в точке же O_3 , наоборот, одномерное инвариантное многообразие γ_3 — притягивающее, а двумерное инвариантное многообразие B_3 — отталкивающее.

В отличие от системы Лоренца, в которой одна из трех стационарных точек внешне никак не сказывается на поведении фазовых кривых, в нашей системе все три стационарные точки конкурируют между собой за влияние на фазовые траектории.

7. Бассейны притяжения аттракторов. На рис. 1 показан аттрактор A системы (10) при указанных в п. 5 параметрах, полученный численно методом Эйлера (с шагом $h = 10^{-4}$). Установлено также, что максимальный показатель Ляпунова положителен. Следовательно, движение по аттрактору A является хаотическим, а сам аттрактор является странным. Пересечение аттрактора A с плоскостью L , показанное на рис. 1 б, имеет фрактальную структуру.

Кроме A система (10) имеет аттрактор A_∞ , совпадающий с бесконечно удаленной точкой оси Oy (в положительном направлении).

7.1. Граница раздела бассейнов притяжения. Обозначив бассейны притяжения аттракторов A и A_∞ соответственно через B и B_∞ , рассмотрим границу θ , разделяющую B и B_∞ . Исследовать свойства границы θ аналитическими средствами не представляется возможным. Поэтому были применены численные методы и

установлены некоторые ее свойства, перечисленные ниже.

7.2. Аттрактор орбит на θ . Если стартовая точка находится на θ , то через бесконечный промежуток времени фазовая кривая τ , выпущенная из этой точки, окажется в точке O_3 , которая, следовательно, является аттрактором. При реализации орбиты τ на компьютере возникает существенная трудность, обусловленная дискретностью численных методов и положительным старшим показателем Ляпунова и приводящая к тому, что траектория τ очень быстро «сваливается» с θ , устремляясь либо к A , либо к A_∞ . Чтобы преодолеть эту трудность, можно обратить векторное поле \mathbf{F} и, взяв стартовую точку x_0 в малой окрестности ω точки O_3 , построить фазовую кривую векторного поля $-\mathbf{F}$, выходящую из x_0 . Для этого достаточно изменить знак параметров p, q, r . В этом случае возникающие вычислительные погрешности приводят к тому, что экспериментальная орбита $\tilde{\tau}$ постоянно совершает малые отклонения от истинной траектории τ , оказываясь то в области B , то в области B_∞ , которые уже не конкурируют на захват фазовых траекторий, а действуют на отторжение «заблудшей» орбиты $\tilde{\tau}$, стремясь вытолкнуть ее из себя и отправить в сторону конкурента. Результатом такого согласованного отторжения является орбита, близко прилегающая к θ и со временем уходящая в бесконечность в положительном или отрицательном направлении оси Oz , описывая вокруг последней гладкую сужающуюся спираль.

Взяв в ω достаточно большое число различных стартовых точек, мы получим модель многообразия θ . На рис. 2 показан результат такой процедуры, выполненной для 10^7 стартовых точек. Аттрактор A располагается внутри поверхности θ (рис. 3). На рис. 4 и 5 приведены сечения бассейна B вертикальной и горизонтальной плоскостями.

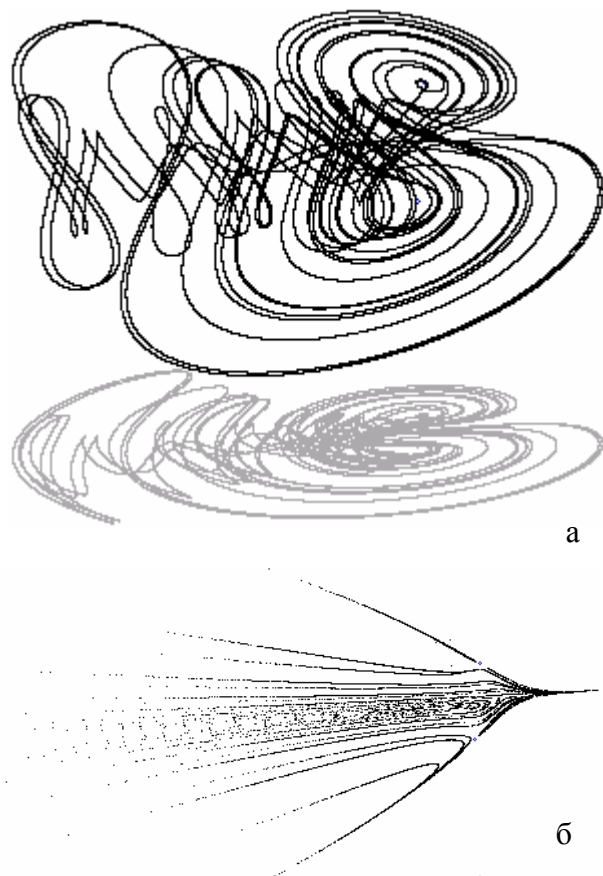


Рис. 1. Аттрактор с тремя полюсами (а) и его сечение (б) плоскостью L .

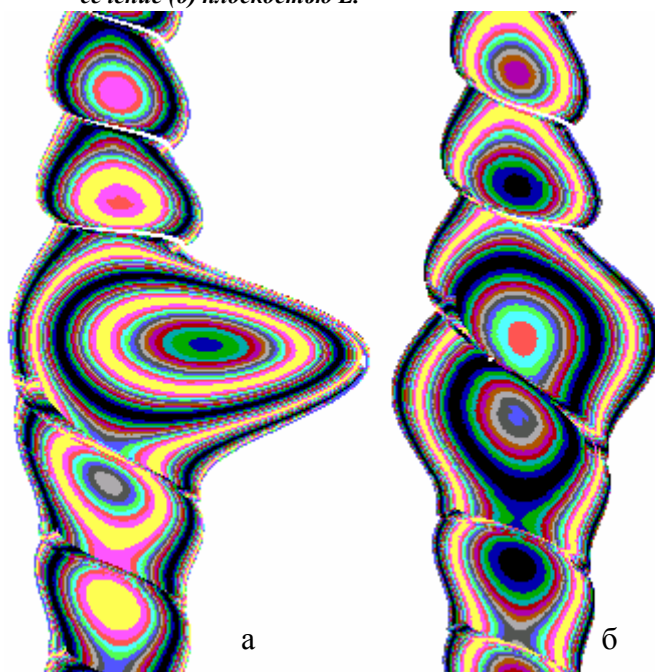


Рис. 2. Рельеф границы θ раздела бассейнов притяжения: а — вид с востока, б — вид с юга.

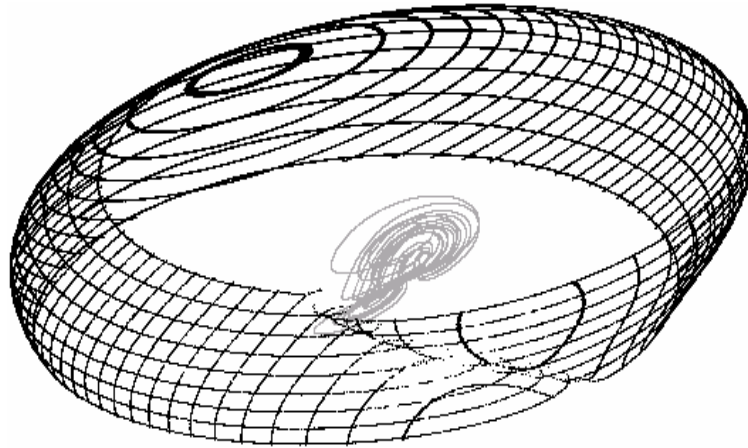


Рис. 3. Сечения поверхности θ плоскостями $z = c$, $c \in \{-4, -3, \dots, 4\}$ и плоскостями $y = \text{const}$. На переднем плане — плохо прорисованный карман, устремленный к аттрактору A , который изображен в центре.

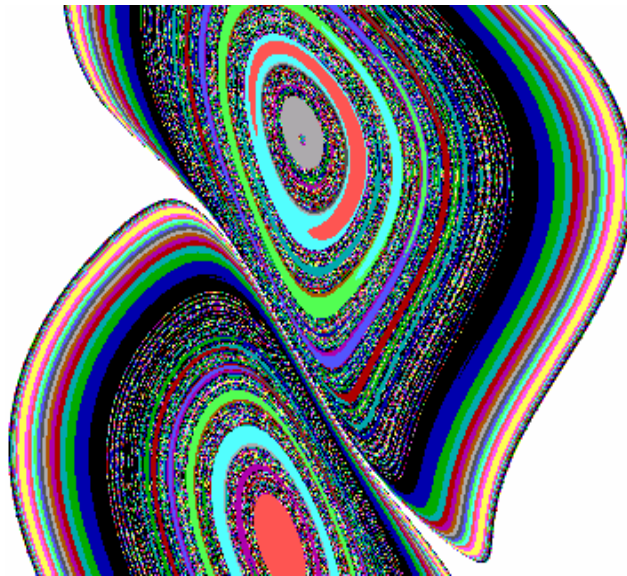


Рис. 4. Сечение бассейна B плоскостью $y = -2$.

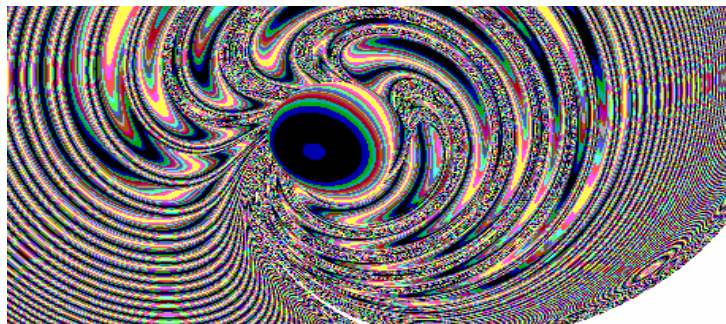


Рис. 5. Фрагмент сечения бассейна B плоскостью $z = 2$. Цвет точки зависит от ее скорости приближения к аттрактору A .

Библиографический список

1. Борисов, А.В., Мамаев, И.С. Динамика твердого тела. [текст] — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.— 384 с.