УДК

Н.И. Перов

Задача многих тел: поиск устойчивых точек либрации в многокольцевых центральных конфигурациях

Работа выполнена в рамках Федеральной целевой программы «Научные и научно - педагогические кадры инновационной России» на 2009 – 2013 годы. (Государственный контракт №П539).

Рассматриваются динамические системы $N \cdot n$ тел, с равными массами m, между которыми действуют силы ньютоновского тяготения. n тел находятся в вершинах правильного n–угольника ($3<n<1000$), а число таких n-угольников равно N ($1<N<25$). В центре системы расположено тело массой M. Система равномерно вращается с (неизвестной) угловой скоростью ω. Определяются - а) стороны a_k (k=1,…, N) каждого n – угольника; б) положения точек либрации – тел с нулевой массой; в) минимальное значение массы M центрального тела, при котором точки либрации L являются устойчивыми по Ляпунову.

Ключевые слова: небесная механика, задача N тел, центральные конфигурации, точки либрации, устойчивость движения.

N.I. Perov

N-body problem: searching for stability points of libration in the multyrings central configurations

The dynamical systems of $N \cdot n$ gravitating bodies, with equal masses, forming central configurations are under consideration. n bodies are placed in the vertexes of regular n-polygon ($3<n<1000$). The number of these n-polygons is equal to N ($1<N<25$). Bodies with different mass M are placed in the centers of the systems. The systems rotate around the central bodies with angular velocities ω. We determine - a) sides a_k (k=1,…, N) of the each n – polygon; b) positions of the libration points – bodies with zero mass - in respect of the mass centre; c) the minimum value of the mass M of the central body for which the points of libration L are stable in the sense of Lyapunov.

Ключевые слова:celestial mechanics, N-body problem, central configurations, libration points, stability of motion.

Введение

Рассмотрим следующую небесномеханическую задачу. Имеется динамическая система N x n тел - материальных точек, - с произвольными, но одинаковыми массами m, между которыми действуют силы ньютоновского тяготения, причём на всём рассматриваемом интервале времени n тел находятся в вершинах правильного n–угольника, а число таких n-угольников равно N. Вершины многоугольников расположены на N соответствующих прямых (по N на каждой), проходящих через центр масс системы. В центре системы расположено тело массой M. Система равномерно вращается с угловой скоростью ω относительно оси, проходящей через центр масс, перпендикулярно плоскости, в которой располагаются все n-угольники. На рисунке 1 представлен частный случай рассматриваемых центральных конфигураций: N=2, n=3.

Необходимо определить - а) стороны a_k (k=1,…, N) каждого n – угольника; б) положения – расстояния от центра масс системы - R_L - точек либрации – тел с нулевой массой; в) минимальное значение массы M центрального тела, при котором точки либрации L будут устойчивыми по Ляпунову.

Очевидно, в данной постановке задача является более общей, по сравнению с предыдущей работой автора [4].

Определение расстояний между телами a_k (k=1,…, N)

Очевидно, рассматриваемая динамическая система является центральной конфигурацией [1]. Уравнения движения тел таких систем (в системе отсчёта, связанной с центральным телом) имеют следующий вид [1]

$$d^2\mathbf{R}_i/dt^2=-\sum_{i,j=1,\, i\neq j}^{nxN}\{Gm_j(\boldsymbol{R}_i-\boldsymbol{R}_j)/|\boldsymbol{R}_i-\boldsymbol{R}_j|^3\}-GM\boldsymbol{R}_i/R_i^3,\ (i,j=1,\dots,nxN),\ (1)$$

$$d^2\mathbf{R}_i/dt^2=-\omega^2\boldsymbol{R}_i,\ i=1,\dots,n\ x\ N.\ (2)$$

Для сторон a_k N правильных n-угольников, выраженных через радиусы описанных окружностей R_i , имеем соотношение

$$a_k = 2R_k \sin\frac{\pi}{n}, k = 1,..., N . \quad (3)$$

Из системы уравнений (1) – (3) находим величины a_k.

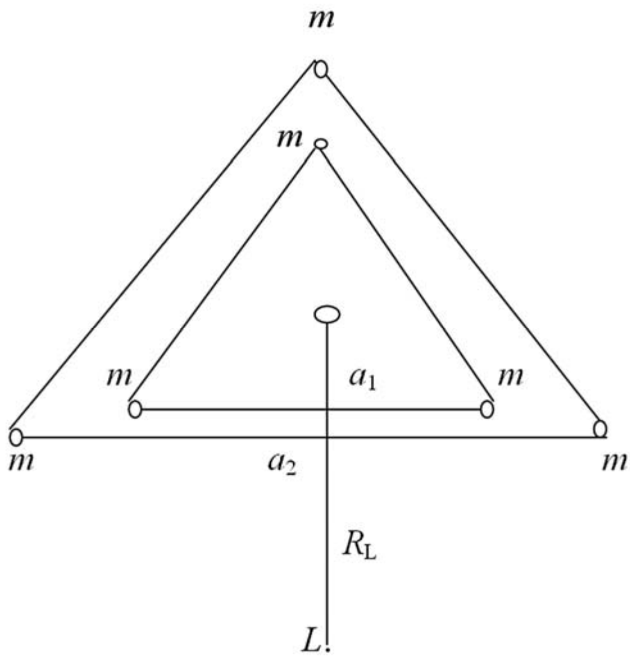

Рис. 1. Частный случай рассматриваемых центральных конфигураций. a_k – стороны многоугольников (для 2-х треугольников n=3, N=2, k=1, 2), в вершинах которых расположены одинаковые массы m. L – точка либрации. R_L– расстояние от центрального тела массой M до точки либрации L.

Определение положений R_L точек либрации L

Из условия задачи следует ожидать, что устойчивые точки либрации будут находиться на лучах «центр масс системы М – середины сторон N правильных n-угольников». В дальнейшем для каждой динамической системы будем определять положение только наиболее удалённой от центра масс системы точки либрации L (с помощью численных экспериментов не удалось обнаружить точки либрации, расположенные ближе к центру масс, чем самая удалённая от него точка либрации). Уравнения движения точки L аналогичны уравнениям (1) и (2). Используя также, определение центральной конфигурации

$$\omega^2 = \omega_L^2, \quad (4)$$

найдём положение R_L точки либрации L.

Определение минимальной массы центрального тела M, необходимой для устойчивости точки либрации L

Для исследования устойчивости движения точки либрации L, (в малой окрестности) воспользуемся уравнениями движения, записанными в неинерциальной системе отсчёта. Аналогично [2]

$$d^2\mathbf{R}/dt^2 = \mathbf{A} + 2[\mathbf{V}, \boldsymbol{\omega}] + [\boldsymbol{\omega}, [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{R}]] \quad (5)$$

Здесь $\mathbf{V}$ и $\mathbf{R}$ относительная скорость в возмущённом движении и радиус-вектор точки L во вращающейся с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ системе координат. $\mathbf{A}$ –ускорение этой точки (ускорение тела с ничтожно малой массой, движущегося под действием силы ньютоновского притяжения). Для малых отклонений x, y, z точки L от положения равновесия имеем [4, 5]

$$\ddot{x} - \gamma_x x - 2\dot{y}\omega - \omega^2 x = 0,$$
$$\ddot{y} - \gamma_y y + 2\dot{x}\omega - \omega^2 y = 0,$$
$$\ddot{z} - \gamma_z z = 0. \quad (6)$$

Здесь $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ – производные по координатам x, y, z правой части уравнения вида (1), записанного для малых отклонений рассматриваемой точки либрации от положения равновесия.

Заметим, что методами компьютерной алгебры (а также аналитически - «вручную») доказывается тождество

$$\gamma_x + \gamma_y + \gamma_z \equiv 0. \quad (7)$$

На основании методов и теорем А.М. Ляпунова [3], аналогично работе [5], определим значение центральной массы M, при которой среди корней Ω характеристического уравнения (8), вытекающего из системы дифференциальных уравнений (6), нет корней с положительными вещественными частями.

$$\Omega^4+\Omega^2(-\gamma_y+2\omega^2-\gamma_x)+(\gamma_x+\omega^2)(\gamma_y+\omega^2)=0. \quad (8)$$

Указанное условие является необходимым условием устойчивости движения точки либрации L [3, 4, 5].

Примеры определения величин a_k, R_L, M при различных значениях N и n.

Используя уравнения (1) – (8), найдём значения a_k, R_L и M – минимальное значение массы центрального тела, при котором движение точки либрации L будет устойчивым (точнее, будет выполняться необходимое условие устойчивости по Ляпунову в первом приближении). Результаты вычислений для N=1, 5; n=3, 6, 10; приведены в таблице 1.

Таблица 1. M – минимальная масса центрального тела (с точностью до 0.01 в единицах m); a_k, (k=1,…, N) – стороны N правильных n–угольников; ω – угловая скорость центральной конфигурации, R_L – расстояние точки либрации L от центра масс системы определяет её положение (в невозмущённом движении); R_{inmax} – расстояние от центра масс системы до середины стороны внешнего n-угольника (со стороной a_N); $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ – производные по x, y, z правой части уравнения, аналогичного уравнению (1), но записанного для возмущённого движения L; Ω – корни характеристического уравнения (8) для различного числа N x n тел, расположенных в вершинах N правильных n–угольников. Единицы измерения: длины – a_1, массы – m, единица времени выбирается таким образом, чтобы значение величины Gm/a_1^3=1. Вычисления производились с 24 значащими числами, с использованием пакета прикладных программ “MAPLE’13”.

N=1			
n	3	6	10
M	43,19	366,52	1722,38
ω^2	227,421823	368,347350	407,510564
R_L	0,580355	1,001220	1,618734
R_{inmax}	0,288675	0,8660354	1,538842
γ_x	440,739628	719,764402	797,964383
γ_y	-208,829997	-339,206986	-375,544794
γ_z	-231,909631	-380,557416	-422,419588
$\gamma_x+\gamma_y+\gamma_z$	0	$1\cdot10^{-21}$	0
$\Omega_{1,2}$	±10,481861√-1	±13,318549√-1	±14,002165√-1
$\Omega_{3,4}$	±10,633184√-1	±13,369874√-1	±14,019305√-1
N=5			
n	3	6	10
M	204,27	1744,51	8209,97
a_2	1,125147	1,057043	1,033082
a_3	1,241294	1,108907	1,062934
a_4	1,361235	1,161613	1,093075
a_5	1,499686	1,221601	1,127171
ω^2	591,433355	1301,723187	1624,664501
R_L	0,708703	1,105831	1,718147
R_{inmax}	0,431922	1,057938	1,734537
γ_x	1146,452200	2544,711283	3182,879754
γ_y	-543,120685	-1198,920433	-1497,475817
γ_z	-603,331514	-1345,790849	-1685,403937
$\gamma_x+\gamma_y+\gamma_z$	$3\cdot10^{-21}$	$-1\cdot10^{-20}$	$1\cdot10^{-21}$
$\Omega_{1,2}$	±16,968556√-1	±25,065548√-1	±27,956155√-1
$\Omega_{3,4}$	±17,076396√-1	±25,087324√-1	±27,971029√-1

Примечание. При оценке приближённого значения минимальной массы М центрального тела, при которой наиболее удалённая от него точка либрации является устойчивой, использовались следующие (приближённые) соотношения.

A) $M/m \approx \sqrt{3}n^3N$.

(Завышенное значение для нижней границы M/m для произвольных чисел N и n).

B) $M/m \approx \sqrt{3}n^3N - n^{\ln N+1}$, для чисел N и n в диапазоне 1≤N≤10, 3<n<10.

C) $\left[\dfrac{M_{n+1}}{M_n}\right]_N \approx \dfrac{n+2}{n-1}$. При фиксированном N и произвольном n.

D) $\left[\dfrac{M_{N+1}}{M_N}\right]_n \approx \dfrac{N+1}{N}$. При фиксированном n и произвольном N.

Рекуррентные формулы C) и D) позволяют уверенно дать оценку значения M, не находя решения уравнений (1) – (8). (Эти уравнения – (1) – (8), – представленные в явном виде, являются чрезвычайно громоздкими, даже при умеренных значениях N и n).

Для примера вычислим $M_{N=1,\ n=20.}$ Используя из таблицы 1значение $M_{N=1,n=10}$, последовательно определяя по формуле C) величины $M_{11},\ldots, M_{19}$, найдём $M_{N=1,n=20}$=13883.Точное значение, установленное в результате решения системы уравнений (1) – (8), $M_{N=1,\ n=20}$=13879,71. (При этом в единицах измерения a_1=1, m=1 Gm/a_1^3=1, имеем – ω^2 =425,381347, R_L=3,1965697, R_{inmax}=3,156876, $\Omega_{1,2}$=±14,296859√-1, $\Omega_{3,4}$=±14,30723√-12).

Заключение

Приведём основные результаты работы.

1. При больших значениях n и N для оценки минимального значения массы M центрального тела, при которой наиболее удалённая от него точка либрации L является устойчивой, предлагается использовать рекуррентные формулы C) и D).

2. С ростом n и N, при устойчивости точки L, отношения сторон N правильных n–угольников стремятся к 1.

3. С увеличением N (и n) наиболее удалённая от центра масс системы точка либрации L переходит из области пространства, расположенной вне N-го n-угольника ($R_L > R_{inmax}$), во внутреннюю область N-го n-угольника ($R_L < R_{inmax}$).

4. Квазипериодическое движение точки L вблизи положения равновесия при фиксированном значении N и больших значениях n происходит с некоторой предельной частотой Ω_{lim} .

5. В настоящее время устойчивость центральных конфигураций исследуется для небольших значений n и N или вообще не исследуется [6]. Вместе с тем для практических целей интерес представляет исследование устойчивости небесномеханических систем многих тел на основе обозримых соотношений. Поэтому установление устойчивости (неустойчивости) динамической системы гравитационно связанных тел на основании исследования устойчивости только 1-й (!) точки либрации имеет значение для решения таких проблем, как происхождение Солнечной и внесолнечных планетных систем и локализации вблизи ближайших звёзд планет земного типа. (В работе [4] при N=1 и произвольном значении n показано, если точка либрации L является устойчивой, то и рассматриваемая небесномеханическая система является устойчивой). Отметим, что поиски подобных планет из прямых наблюдений заложены в программах космических аппаратов “DARWIN”, “KEPLER”, “GAIA”.

Библиографический список

1. Уинтнер, А. Аналитические основы небесной механики [Текст] – М.: Наука, 1967.
2. Ландау, Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. Теоретическая физика –. М.: Наука, 1973. – Т.1.
3. Ляпунов, А.М. Общая задача об устойчивости движения [Текст] / М.–Л.: АН СССР, 1956. // Собр. Соч. Т.2.
4. Перов, Н.И. Поиск устойчивых центральных конфигураций [Текст] / Материалы конференции «Чтения Ушинского» физико–математического факультета ЯГПУ.– Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2008. С. 67 – 75.
5. **Medvedev Yu. D., Perov N. I. Restricted four-body problem. The case of a central configuration: libration points and their stability / Astronomical Letters. RAS. 2008. V. 34. No. 5. P. 357-365.**
6. Montserrat Corbera and Jaume Llibre. On the existence of central configurations of *p* nested regular polyhedra / Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 2010. V. 106. N 2. P. 197 – 207.